教育部教师工作司组织专家审定
高等院校小学教育专业规划教材

高等数学基础

（上册）（第2版）

主 编 邱 森

高等教育出版社

部教师工作司组织专家审定

院校小学教育专业规划教材

高等数学基础

GAODENG SHUXUE JICHU

（上册）（第2版）

主编 邱森

高等教育出版社·北京

内容提要

全书分上、下册，上册的主要内容为一元微积分，下册的主要内容为空间解析几何、多元函数微积分、线性代数、概率与统计等。全书每一部分内容均以概念导入起，从直观问题到抽象数学知识，题材丰富有趣，反映社会对数学的需求；表达浅近易懂、深入浅出。内容注重正本清源，刻画数学本质，至简至易；强调学生通过动手尝试进行数学研究，获得数学创造体验，训练思维能力。修订版新增数学应用内容，介绍用数学建模解决实际问题的全过程；新增“问题与思考”“探究与发现”栏目，强调思想与方法学习；更强调与小学数学的联系，沟通大学数学学习与小学数学教学之间的联系，突出学以致用。

本书可供高等院校小学教育专业作为教材使用，也可供其他专业学生选用或参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学基础．上册/邱森主编．--2 版．--北京：高等教育出版社，2018.10

ISBN 978-7-04-050534-4

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①邱…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 203204 号

策划编辑	肖冬民	责任编辑	肖冬民	封面设计	姜　磊	版式设计	徐艳妮
插图绘制	于　博	责任校对	张　薇	责任印制	田　甜		

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	北京人卫印刷厂		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	20.75	版　次	2007 年 6 月第 1 版
字　数	420 千字		2018 年 10 月第 2 版
购书热线	010-58581118	印　次	2018 年 10 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	38.00 元

物 料 号　50534-00

高等院校小学教育专业规划教材总序

教育部教师工作司

我国已进入全面建成小康社会、加快推进社会主义现代化的新的历史阶段。在这样一个历史阶段，教育越来越成为促进社会全面发展、推动科技迅猛进步，进而不断增强综合国力的重要力量，成为我国从人口大国逐步走向人力资源强国的关键因素。我国的教师教育正面临着前所未有的机遇和挑战。教师教育的改革发展直接关系到千百万教师的成长，关系到素质教育的全面推进，关系到一代新人思想道德、创新精神和实践能力的培养和提高，最终关系到推动科学发展、促进社会和谐、全面建成小康社会奋斗目标的实现。

培养具有较高学历的小学教师是全面建成小康社会和适应基础教育改革与发展的迫切需要，也是我国教师教育改革发展的必然趋势。为了适应基础教育改革与发展的需要，我国对培养较高学历小学教师工作进行了长时间的积极探索，取得了较大成绩，并积累了许多宝贵经验。《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》提出：到 2020 年，要“努力造就一支师德高尚、业务精湛、结构合理、充满活力的高素质专业化教师队伍”。《教育部关于大力推进教师教育课程改革的意见》提出：“要围绕培养造就高素质专业化教师的目标，坚持育人为本、实践取向、终身学习的理念，实施《教师教育课程标准(试行)》，创新教师培养模式，强化实践环节，加强师德修养和教育教学能力训练，着力培养师范生的社会责任感、创新精神和实践能力。”为此，要优化教师教育课程结构，改革课程教学内容，开发优质课程资源等。

开展小学教师培养工作，课程教材建设是关键。当务之急是组织教育科研机构、高等师范院校的专家学者和教师联合编写出一套高水平、规范化的、专为培养较高学历小学教师的教材。

编写小学教育专业课程教材，应该遵循以下原则：

一、时代性与前瞻性。教材要面向现代化、面向世界、面向未来，反映当代社会经济、文化和科技发展的趋势，贴近国际教育改革和我国基础教育课程改革的前沿，体现新的教育理念。

二、基础性与专业性。教材要体现高等教育的基础性，同时要紧密结合当今小学教育课程改革的趋势和实施素质教育的要求，针对小学教育专业的特征和小学教师的职业特点，力求构建科学的教材体系，提高小学教师的专业化水平。

三、综合性与学有专长。教材要根据现代科技发展和基础教育课程改革综合化的趋势，强化综合素质教育，加强文理渗透，注重科学素养，体现人文精神，加强学科间的相互融合以及信息技术与各学科的整合；同时，根据小学教育的需要，综合性教育与单科性教育相结合，使学生文理兼通，学有专长，一专多能。

四、理论与实践相结合。教材要根据小学教师职前教育的要求，既要科学地安排文化知识课和教育理论课，又要加强实践环节，注重教育实践和科学实验，重视教师教育教学能力的培养。

五、充分体现教材的权威性、专业性、通用性和创新性。以教育部制定的《教师教育课程标准(试行)》为编写依据，以本、专科通用为目的，培养、培训沟通，在教材体系框架、内容、呈现方式等方面开拓创新，加大改革力度，充分体现以学生为本的教育理念，使教材从能用、好用提升到教师、学生喜欢用。

高等教育出版社根据以上原则组织编写了有关教材，经过专家审定，我们向各地推荐这套教材，请有关单位和学校酌情选用。

第 2 版前言

第 1 版前言

本书是在第 1 版的基础上全面修订的，我们保持了本教材的特色，力求在培养学生的应用意识和创新能力上形成新的特色，新增了“探究与发现”“阅读与思考”等栏目。

在“探究与发现”中，探究性的题材是多样的，可以是数学问题，也可以是实际问题，通过探究性问题的自主探究，学习者可以尝试数学研究或数学建模的全过程，积累创造性思维的经验，培养长期起作用的洞察力、理解力以及探索和发现的创新精神与实践能力。

在“阅读与思考”中的应用性题材来源于物理学、医学、生命科学和经济学等各个领域，它们反映了当今社会对数学的需求，也体现了数学的自身价值，都具有一定的实际背景，有一定的应用价值，从中我们可以看到，许多重大的科学发现都是从学科之间的相互交叉、相互渗透中逐渐产生的，一些突破性的想法往往产生于人们意想不到的事物之间的联系。学生接触这些现代化的新内容和新思想，了解数学的现代应用，有利于培养应用意识和创新意识。我们也可以看到，最深的道理也可以用最浅近的方式来表达，一些原创性思想往往是简单而精彩、学生又易于接受的。例如，现代医学成像技术 CT 被公认为 20 世纪 70 年代的重大科技突破，用线性方程组就能说明 CT 图像重建的基本原理。在教学时教师只要简单介绍问题的创意与构思，让学生弄清需要解决什么实际问题，可以用什么数学工具建立数学模型来解决问题，这样，通过应用就可以让学生更深刻地理解数学的内容、方法和意义，从而加强基础，不需多占课时。

在修订中，我们对第 1 版削枝强干，更新例题，凸显特色，为改善学生的学习方式提供时间和空间，使学生在打好基础的同时，学会用数学的思考方式解决问题，认识世界。另外，修订中我们删除了“积分表”的内容，将习题答案以二维码方式链接在目录中，学习者可用手机扫描二维码获取。

本书虽经多次打磨，但缺点和疏漏之处仍在所难免，恳请使用本书的教师和同学批评指正。在教材编写和出版过程中，我们得到了高等教育出版社的支持和协助，在此也深表谢意。

编　者

2018 年 3 月

目 录

全书习题答案

第一章　函数

本章学习提要

- 函数的概念、性质与运算
- 初等函数
- 函数模型及其应用

由于工业生产和科学技术自身发展的需要，到了 16 世纪，对运动与变化的研究已成为自然科学的中心问题. 例如，测定船舶位置的问题要求准确地研究天体运行的规律，根据炮弹的速度要求推测它能达到的高度和射程等，都向数学提出了新的要求，从而导致了新的数学工具——变量数学的产生. 函数指因变量依从自变量的关系，它是微积分的研究对象. 函数(function)一词最初由德国数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz，1646—1716)在 1692 年使用. 1859 年我国清代数学家李善兰(1811—1882)第一次将"function"译成"函数". 1734 年瑞士数学家欧拉(L. Euler，1707—1783)引入了函数符号 $f(x)$，并称变量的函数是一个解析表达式，认为函数是由一个公式确定的数量关系，当时的函数概念仍然比较模糊. 直到 1837 年，德国数学家狄利克雷(P. G. L. Dirichlet，1805—1859)提出："如果对于 x 的每一个值，y 总有一个完全确定的值与之对应，则 y 是 x 的函数."这个定义才较清楚地说明了函数的内涵，函数 $y=f(x)$ 是 x 与 y 之间的一种对应，不管其对应法则是公式、图像、表格还是其他形式. 19 世纪 70 年代以后，随着集合概念的出现，函数概念又进而用更严谨的集合和对应的语言表述，这就是本章学习的函数概念.

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学主要的研究对象之一，它是进一步学习微积分的基础. 本章将在中学数学关于函数知识的基础上，对函数的概念、性质与运算等进行研究，并对初等函数作概括的介绍，最后，通过多种函数模型介绍一些函数的应用，从中了解什么是数学建模以及数学建模的一般过程.

一　函数的概念、性质与运算

1.1　常量与变量

我们在日常生活和生产实践中，经常会遇到各种不同的量，如物理学中的质量、温度、时间、速度、加速度、力等，其中有些量在所研究的过程中，其数值保持不变，这种量叫作常量. 有些量在所研究的过程中，其数值是不断变化的，可以取不同的数值，这种量叫作变量.

例如，在自由落体运动中，落体的质量 m 和重力加速度 g 保持不变，m,g 就是常量；而落体的速度 v、所经过的路程 s 和下落的时间 t 都是不断变化的，v,s,t 都是变量.

通常，我们用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示常量，用字母 $x,y,t,\cdots$ 表示变量.

一个量是常量还是变量并不是绝对的，而是相对于某一过程而言的. 例如，上面提到的自由落体运动，在小范围内，g 可以看作是常量；而在大范围内，如发射人造卫星的过程，就要考虑 g 的差异，这时 g 就是变量. 又如，火车在起步阶段和刹车阶段，速度是变化的，因而在该过程中是变量；而在正常行驶阶段，速度变化很小，可以看作是不变的量，因而是常量.

任何一个变量都有一定的变化范围，变量的变化范围可以用数集(即元素为数

的集合)来表示. 下面是几个常用的数集:

正整数集(记作 $\mathbf{N}_+$),整数集(记作 $\mathbf{Z}$),

有理数集(记作 $\mathbf{Q}$),实数集(记作 $\mathbf{R}$).

如果变量的变化是连续的,那么变量通常还可用区间表示. 区间分为有限区间和无限区间两种.

有限区间指介于两个实数之间的一切实数所组成的数集,这两个实数称为区间的端点,区间的端点可以包含在所论及的区间之内,也可以不包含在所论及的区间之内.

设 a,b 为两个实数,且 $a<b$. 有限区间有以下四种:

(1) 由满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 所组成的数集称为闭区间,记作 $[a,b]$,左、右端点 a,b 都包含在区间内.

(2) 由满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 所组成的数集称为开区间,记作 (a,b),左、右端点 a,b 都不包含在区间内.

(3) 由满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的一切实数 x 所组成的数集称为半开区间,记作 $(a,b]$,左端点 a 不包含在区间内,而右端点 b 包含在区间内.

(4) 由满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的一切实数 x 所组成的数集称为半开区间,记作 $[a,b)$,左端点 a 包含在区间内,而右端点 b 不包含在区间内.

以上四种有限区间分别用数轴来表示,如图 1-1 所示.

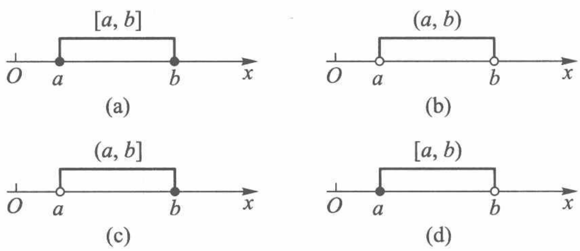

图 1-1

无限区间表示由大于或小于、不大于或不小于某个实数所组成的数集,或者由全体实数所组成的数集.

设 a,b 为实数,无限区间有以下五种:

(1) 由满足不等式 $x\geqslant a$ 的一切实数 x 所组成的数集,用区间表示成 $[a,+\infty)$,左端点 a 包含在区间内.

(2) 由满足不等式 $x>a$ 的一切实数 x 所组成的数集,用区间表示成 $(a,+\infty)$,左端点 a 不包含在区间内.

(3) 由满足不等式 $x\leqslant b$ 的一切实数 x 所组成的数集,用区间表示成 $(-\infty,b]$,右端点 b 包含在区间内.

(4) 由满足不等式 $x<b$ 的一切实数 x 所组成的数集,用区间表示成 $(-\infty,b)$,右

端点 b 不包含在区间内.

(5) 由满足不等式 $-\infty<x<+\infty$ 的一切实数 x 所组成的数集,即全体实数组成的数集用区间表示成 $(-\infty,+\infty)$.

注意:$+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作"正无穷大"和"负无穷大".它们不是数,仅仅是记号.

以上五种无限区间分别用数轴来表示,如图 1-2 所示.

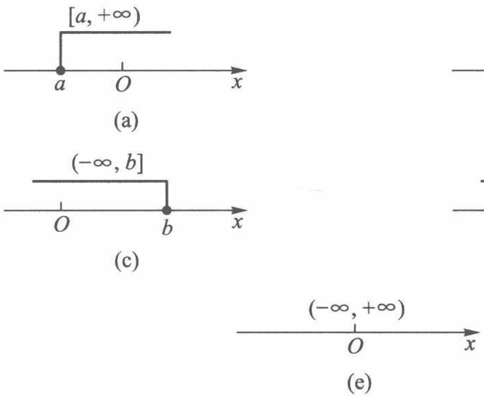

图 1-2

例 1.1 解下列不等式,并将解集用区间记号表示:

(1) $2x-1>x+1$;(2) $|x-3|<1$;(3) $|x-2|\geqslant 1$.

解 (1) 显见,不等式的解集为 $x>2$,用区间记号表示为 $(2,+\infty)$.

(2) 由原不等式得 $-1<x-3<1$,它的解集为 $2<x<4$,用区间记号表示为 $(2,4)$.

(3) 原不等式等价于

$$x-2\geqslant 1 \quad \text{或} \quad x-2\leqslant -1,$$

所以,不等式的解集为 $\{x\,|\,x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant 1\}$,用区间记号表示为 $[3,+\infty)\cup(-\infty,1]$[①].

当研究函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 附近的形态(例如,做变速直线运动的物体在某一时刻 t_0 的速度等)时,我们还需要引进邻域的概念,它是由某点附近的所有的点组成的集合.设 $\delta>0$,以点 x_0 为中心,δ 为半径的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域(如图 1-3 所示),即

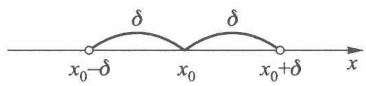

图 1-3

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\}$$
$$=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}.$$

1.2 函数的概念

在具体问题中出现的变量往往不止一个,而且这些变量之间也不是彼此独立的,而是互相联系、互相制约的,当一个变量变化时,这种变化会引起另一个变量按一定

① 由集合 A 和 B 的所有元素组成的集合称为集合 A 和 B 的并集,记作 $A\cup B$.

的规律变化.

例如,在初速度为零的自由落体运动中,路程 s 和时刻 t 都是变量,它们的变化并不是独立的,而是互相联系的. 当 t 变化时,这种变化会引起 s 的相应变化,联系它们之间变化的对应规律是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$ 是常量.

根据上述规律,在下落过程中的每一个时刻 t,都有确定的路程 s 与之相对应.

例如,当 $t=1\ \mathrm{s}$ 时,

$$s=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times 9.8\ \mathrm{m/s^2}\times(1\ \mathrm{s})^2=4.9\ \mathrm{m};$$

当 $t=2\ \mathrm{s}$ 时,

$$s=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times 9.8\ \mathrm{m/s^2}\times(2\ \mathrm{s})^2=19.6\ \mathrm{m}.$$

从上面这个例子可知,在具体变化过程中,两个变量(如 t,s)的变化是互相联系、互相依赖的. 当一个变量(如 t)的值确定时,另一个变量(如 s)就按一定的对应规律,有唯一确定的值与之相对应,这种变量之间的相互依赖关系称为函数关系.

一般地,如果 x 和 y 是两个变量,当变量 x 在某个范围 D 中任意取定一个数值时,按照一定的法则,变量 y 总有唯一确定的数值与它对应,那么变量 y 称为变量 x 的函数,记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中变量 x 称为自变量,变量 y 称为因变量,自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域. 函数的定义域是一个数集,一般用区间或不等式来表示.

设函数 $y=f(x),x\in D$,当自变量 x 取定义域 D 中某一个值 x_0 时,因变量 y 的对应值称为当 $x=x_0$ 时的函数值,记作 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$. 当自变量 x 取遍定义域 D 中的一切数值时,由与之对应的函数值 $f(x)$ 的全体组成的数集称为函数的值域.

例 1.2 已知函数 $f(x)=x^2-2x+3$,

(1) 写出它的定义域;

(2) 求 $x=2$ 时的函数值 $f(2)$;

(3) 求 $x=a+1$ 时的函数值 $f(a+1)$.

解 (1) $D=\mathbf{R}$.

(2) $f(2)=2^2-2\cdot 2+3=3$.

(3) $f(a+1)=(a+1)^2-2(a+1)+3=a^2+2$.

例 1.3 设 $f(x)=x^2$,求

(1) $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;

(2) $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,

其中 Δx 是一个完整的记号,表示一个实数.

解 (1) $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2$

$$=2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

(2) $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x.$

关于函数的概念,我们应着重理解以下几点.

(1) 确定函数的要素是定义域和对应法则.

由函数的定义可知,函数由定义域和对应法则所确定. 给定了定义域和两个变量之间的对应法则,这两个变量之间就构成了一个确定的函数关系,从而函数的值域也就随之被完全确定了. 所以,确定函数的要素就是定义域和对应法则.

因此,两个函数,只要它们的定义域和对应法则完全相同,那么这两个函数就是同一个函数,否则便是不同的两个函数.

(2) 确定函数的定义域要考虑两种情况.

第一,如果不考虑自变量和因变量的实际意义而抽象地研究函数,那么我们约定,函数的定义域就是使函数有意义的自变量的一切实数值.

第二,如果考虑自变量和因变量的实际意义,那么函数的定义域就是既使函数有意义,且又符合实际意义的自变量的一切实数值.

例如,要写出函数 $S=\pi r^2$ 的定义域(其中 S 表示圆的面积,r 表示圆的半径). 如果仅考虑函数式本身,那么自变量 r 可取一切实数. 但 r 表示圆的半径,考虑它的实际意义,应有 $r>0$,所以,该函数的定义域应为$(0,+\infty)$.

(3) 函数 $y=f(x)$ 中的 f 是表示变量 x 和 y 之间对应法则的记号.

$f(x)$ 中的 f 与 x 不是相乘关系,而是表示某一种对应法则,即自变量 x 在经过对应法则 f 的对应之后,得到 $f(x)$. 值得注意的是,在同一问题中,一个函数应取定一种记号;在同一问题中,若有多个函数,则具有不同对应法则的函数,必须用不同的记号来表示,以免混淆. 如用 $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, $y=F(x)$ 等来表示不同的函数. 为了方便起见,有时我们也用记号 $y=y(x)$, $u=u(x)$, $s=s(t)$ 等来表示函数.

例 1.4 判断下列各对函数是否相同,并说明理由:

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$, $\varphi(x)=x+1$;

(2) $f(x)=|x|$, $\varphi(x)=x$;

(3) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$, $\varphi(x)=1$;

(4) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$, $\varphi(t)=\dfrac{1}{2}t^2$.

解 (1) 不是同一函数. 因为它们的定义域不相同, $f(x)$ 的定义域为 $x\neq1$,即 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,而 $\varphi(x)$ 的定义域为一切实数,即 $(-\infty,+\infty)$.

（2）不是同一函数. 因为它们的对应法则不相同. $\varphi(x)$ 的对应法则是"自变量本身"，而 $f(x)$ 的对应法则是"自变量的绝对值".

（3）是同一函数，因为定义域和对应法则都相同.

（4）是同一函数，因为定义域和对应法则都相同，仅仅是变量所取字母不同而已.

例 1.5 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；（2）$y=\sqrt{x-2}+\ln(x-1)$.

解 （1）要使函数式有意义，必须 $1-x^2>0$，即 $x^2<1$，故函数的定义域为 $-1<x<1$，或写成 $(-1,1)$.

（2）要使函数式有意义，必须 $\sqrt{x-2}$ 和 $\ln(x-1)$ 同时有意义，即必须 $x-2\geqslant 0$ 且 $x-1>0$. 故函数的定义域为 $[2,+\infty)$.

1.3 函数的表示法

函数的表示法就是把一个函数的定义域和对应法则表示清楚的方法. 表示函数的方法，最常用的有以下三种.

1. 列表法

将自变量所取的值与对应的函数值列成表格，这种表示函数关系的方法称为列表法.

例如，某制造商统计了半年其产品的市场占有率，如表 1-1 所示：

表 1-1

月份 t	1	2	3	4	5	6
市场占有率 p	62.4%	54.1%	48.0%	43.5%	43.2%	43.1%

表 1-1 清楚地表示了月份与当月的市场占有率的函数关系，这个函数的定义域为 $\{1,2,3,4,5,6\}$，值域为 $\{62.4\%,54.1\%,48.0\%,43.5\%,43.2\%,43.1\%\}$. 表中 $P(t)$ $(t=1,2,3,4,5,6)$ 的值在递减，说明该产品的市场占有率呈下降趋势，这使制造商感到不安. 计算当月与上个月间市场占有率的差值 $P(t)-P(t-1)$ $(t=2,3,4,5,6)$，得到表 1-2：

表 1-2

t	2	3	4	5	6
$P(t)-P(t-1)$	-8.3%	-6.1%	-4.5%	-0.3%	-0.1%

他发现表中这些差值虽然都是负数，但绝对值是递减的，这表明市场占有率的下降趋势在放慢，到第 6 个月，差值为 -0.1%，已接近零，故市场占有率有望止跌回升，于

是,他又乐观起来.

又如,数学用表中的平方表、立方表、对数表、三角函数表等,都是用列表法来表示函数的. 此外,在实验过程中,我们往往也把实验或观察所得的数据列成表格,以研究变量之间的函数关系.

列表法的优点是在给出了自变量的值后,我们能直接从表中查到对应的函数值,可以节省很多计算时间;但缺点是表中不可能列出全部函数值,有一定的局限性,而且也不便于理论分析.

在小学数学中,某些填数问题可以用列表法来求解(见下例和习题 1.1 第 21 题).

例 1.6 幻方问题.

将正整数 $1,2,\cdots,n^2$ 排列成一个 n 行 n 列的方阵,使得每行、每列及两对角线上的各数之和都相等,这样的方阵称为幻方,n 称为它的阶数.

我国古代传说,大禹治水(约公元前 22 世纪)在一个龟甲背上发现一个图形(图 1-4),称为洛书,把它写成数字的形式,就是一个 3 阶幻方,这是人们最早发现的一个幻方.

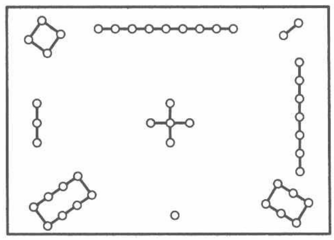

图 1-4

试求解 3 阶幻方问题(下面我们用列表法来求解).

解 首先,求每行、每列以及每条对角线上各数的和数.

因为 $1,2,\cdots,9$ 这 9 个数之和为 45,它们分布在 3 行上,且每行 3 数之和均相等,所以,每行 3 数之和是 $45\div3=15$.

一个 3 阶幻方共有 9 格,其中 4 格在角上,1 格在中心,还有 4 格在边的中部. 如图 1-5 所示,在角上的数"用"了 3 次,在中心的数"用"了 4 次,在边中部的数"用"了 2 次. 例如,中心的数在分别按中间一行、中间一列、两条对角线相加时,都要用到,共用了 4 次.

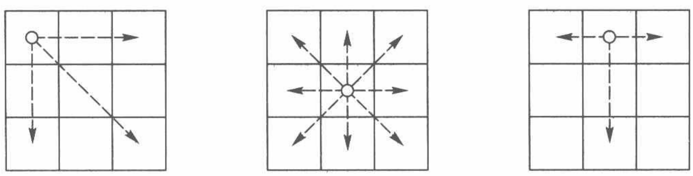

图 1-5

对 1 至 9 的每个数,我们进行观察:如果同一个数不能重复使用 2 次,那么可以有多少种不同的方式添加两数,使三数之和为 15? 我们可以把所有可能的情况列于表 1-3.