



国家电网公司  
电力科技著作出版项目

# 工程电磁场

## 数值计算理论分析

Theoretical Analysis of Numerical Calculation  
of Engineering Electromagnetic Field

李朗如 王 晋 编著



中国电力出版社  
CHINA ELECTRIC POWER PRESS



国家电网公司  
电力科技著作出版项目

# 工程电磁场 数值计算理论分析

Theoretical Analysis of Numerical Calculation  
of Engineering Electromagnetic Field

李朗如 王晋 编著



中国电力出版社  
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

## 内 容 提 要

本书是一本关于电磁场数值计算理论分析的专著,属于电气学科强电类、工学(工程学)门类中的专业课程范畴。近20年来,随着科学技术的迅猛发展,国内与电气学科相关的研究机构、大型生产企业和高等院校的研究生及课题研究人员,对于电磁装置的设计和运行行为的分析计算,均已采用一种基于“场”的数值计算的现代设计分析方法。本书在于分析和阐明这些数值计算方法的理论基础,内容包括电磁场理论基础综合分析、有限元法、加权余量法、图论场模型法、边界单元法、涡流场计算的差分法、涡流方程的解析求解法、“场-路”耦合法、电机电磁转矩的理论和数值计算方法等。为适应读者进行现代设计方法数值计算的需求,本书还介绍了电磁场数值计算商用软件的使用方法与算例,包括恒定场、涡流场以及电气装置与系统的动态行为仿真。

本书可作为高等院校电气工程专业研究生教材和参考资料,读者需要具备工程数学、电路理论、电磁场、电机学等学科的基础理论知识。本书也可供从事电磁装置设计、运行分析和研究的人员参考使用,还可供对电磁场数值计算感兴趣的研究者参考使用。

### 图书在版编目(CIP)数据

工程电磁场数值计算理论分析 / 李朗如, 王晋编著. —北京: 中国电力出版社, 2019.1  
ISBN 978-7-5198-2503-4

I. ①工… II. ①李… ②王… III. ①电磁场-数值计算 IV. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 236390 号

---

出版发行: 中国电力出版社

地 址: 北京市东城区北京站西街 19 号 (邮政编码 100005)

网 址: <http://www.cepp.sgcc.com.cn>

责任编辑: 周 娟 杨淑玲 (010-63412602)

责任校对: 黄 蓓 李 楠

装帧设计: 王英磊

责任印制: 杨晓东

---

印 刷: 三河市百盛印装有限公司

版 次: 2019 年 1 月第 1 版

印 次: 2019 年 1 月北京第 1 次印刷

开 本: 710mm×1000mm 16 开本

印 张: 17

字 数: 304 千字

定 价: 69.80 元



---

版权专有 侵权必究

本书如有印装质量问题, 我社发行部负责退换

# 前言

电气科学是一门传统学科，也是一门基础学科，与此学科紧密联系的从电能生产到装备制造再到电能利用，在国民经济及社会生活各个方面的应用极其广泛。目前，涉及本学科内的电磁装置设计和运行行为的分析计算，均已采用现代设计分析方法，它是一种基于“场”的数值计算方法。由于计算机和计算技术的迅速发展，以前用等效“路”的计算分析方法无法解决或解决得不是很好的问题，现在用“场”的数值解法可以予以解决。

这种基于“场”的数值计算方法，给电磁装置设计计算与运行分析提供了一种新的手段与方法，具有较高的计算精度，可以从细微的角度考察与分析电磁和其他物理量在所设计电磁装置内的分布情况，从而大大提高了设计和分析水平。但要掌握这种方法并且运用自如，需要设计者具有较高的专业知识和理论水平。

近20年来，随着科学技术的迅猛发展，国内与电气学科相关的研究机构 and 大型生产企业，对于电磁装置的设计和运行行为的分析计算，凡是涉及高精度设计和精细分析、“全方位”设计，尤其对于大型系统中的关键装置，必须进行电磁、热传导、流体（通风冷却）以及力学的（强度、刚度和振动问题）综合物理场的稳态和瞬态分析计算，甚至要考虑各个物理场的耦合计算问题，必然用到“场”的现代数值计算理论与分析方法。本书对于电磁场数值计算方法的理论基础进行分析与阐述，以提高相关人员具备有关这方面的知识和分析能力。

本书在以下几个方面做了一些工作：

(1) 对最基本电磁场理论的定理进行了详细理论证明，如用矢量分析方法证明矢量场必须满足的赫姆霍兹定理。

(2) 详细阐明了电机的电磁转矩理论和数值计算方法，利用电磁场动量原理导出麦克斯韦张力，并推导出电机的电磁转矩的数值计算公式，具有普遍性。

(3) 讨论了求解涡流场的一般性方程，包括用场变量和位函数表示的涡流方程以及各种数值解法的涡流方程。用两个典型工程实例讨论涡流方程的解析求解法：一个是直线电机次级中的涡流分析，代表恒稳涡流场解析求解；另一个是补偿式脉冲发电机的气隙和补偿筒内的涡流场分析，代表瞬态涡流

场解析求解。

(4) 介绍了“场-路”耦合法，详细阐述和讨论了具有磁性的非线性和机械旋转部件因素时，电磁装置内的参数变化与控制系统的信号变化是相互联系的，在做动态计算与分析时，必须将电磁装置内的磁场变化与控制系统的信号变化耦合起来计算，才能反应实时的真实状况，这是电磁装置系统做精确设计与分析所必需的。还导出了旋转电机与控制系统耦合的数值计算的普遍性公式。

(5) 对电磁场计算的边界条件的理论基础进行了详细阐述与推导，这是对于进行电磁场边值问题的数值计算必须遵循的最基本规律。

全书共分 10 章，第 1 章概论，简要介绍了电磁场问题的类型及其求解方法，现代数值计算方法的发展和现代工程技术中的应用。第 2 章讨论了电磁场理论基础，介绍麦克斯韦方程，用矢量分析方法证明矢量场必须满足的赫姆霍兹定理，阐明采用场变量与位函数的边界条件所必须满足的理论基础，同时介绍了场的级数解法，多极子展开的理论。第 3 章讨论了电机电磁转矩数值计算的理论与方法，电磁转矩是电机进行能量转换的重要参数，电磁转矩计算是研究电机运行行为的重要任务之一，本章利用电磁场动量原理导出麦克斯韦张力，从而便于电机电磁转矩的数值计算。第 4 章讨论了当前广泛应用的数值计算方法有限单元法（亦称有限元法），并阐明其数学基础——泛函与变分的基本概念，详细讨论求解的电磁场边值问题（偏微分方程加边界条件）转化为泛函求极值的问题，即变分问题的离散化处理过程。第 5 章讨论了加权余量法，这是求微分方程近似解的另一种有效方法，阐明其原理和离散化处理方法。第 6 章讨论了边界单元法，这是一种积分方程法，边界单元法的最大优点是可以降低维数，本章首先介绍了边界积分方程的建立，然后讨论了离散化处理的方法，最后简要介绍了边界单元与有限单元法耦合算法。第 7 章讨论了图论场模型法，简称网络场模型，这种方法的理论基础是网络拓扑学。它是基于描述电磁场的基本物理规律，直接从物理图像建立离散模型，然后根据图论的分析方法，建立起端点方程、节点方程和回路方程等，借助计算机辅助分析法求解。第 8 章讨论了涡流场的求解，主要介绍了涡流场的一般性方程，包括用场变量和位函数表示的涡流方程以及各种数值解法的涡流方程，同时用两个典型工程实例讨论涡流方程的解析求解法。第 9 章介绍了“场-路”耦合法，电机或电磁装置的工作原理是建立在电磁相互作用基础之上的，建立磁场的铁磁物质具有非线性特性，它一方面与机械系统相耦合，另一方面与电气系统相联系，电磁装置内的参数变化与控制系统的信号变化是相互联系的，在做动态计算与分析时，必须将电磁装置内的磁场变化与控制系统的信号变化耦合起来计算，才能反应实时的真实状况。第

10 章介绍了利用现代仿真软件进行电磁场数值计算的方法并举出三个算例，阐述无刷直流电机二维静磁场分析，用笼型异步电动机为例介绍二维涡流场分析计算，用永磁同步电机为例介绍电机三维场瞬态行为的仿真分析。

本书第 1 章至第 9 章由李朗如教授执笔，第 10 章由王晋（博士）副教授执笔，全书由李朗如教授统稿。同时，感谢电磁工程与新技术国家重点实验室和华中科技大学电气与电子工程学院对本书出版的大力支持，对中国电力出版社周娟编审对本书给予的支持，在此一并表示感谢。

由于我们水平有限，不妥之处在所难免，希望读者不吝指正。

编 者

2018 年 12 月于喻家山

# 目 录

前言

第 1 章 概论	1
1.1 电磁场理论及其计算方法的历史回顾和现代发展	1
1.1.1 电磁场理论的发展概况	1
1.1.2 电磁场问题的类型与经典求解方法	3
1.1.3 现代求解方法——数值求解法	5
1.2 电磁场数值计算方法的工程应用	6
1.3 本书的任务与基本内容	7
第 2 章 电磁场理论基础综述	10
2.1 麦克斯韦方程组	10
2.2 不同媒质交界面的边界条件	16
2.2.1 场矢量的连续性	16
2.2.2 位函数的连续性	19
2.3 多极子场——无界场的计算（场的级数解法）	23
2.3.1 标量电位的多极子展开	24
2.3.2 矢量磁位的多极子展开	26
2.4 媒质的附加场分析	29
2.4.1 电介质的极化场	29
2.4.2 磁性媒质的磁化场	30
2.5 格林函数法——有界场的计算	34
2.6 电磁场的积分方程法	36
2.7 永久磁体磁场分析	38
第 3 章 电机电磁转矩数值计算的理论与方法	41
3.1 作用于电机转子上电磁力体密度的一般表达式	41
3.2 转子系统受到的力和转矩	43
3.3 复数场量时的电磁力和电磁转矩	46

3.4	由电磁场数值计算电磁力和电磁转矩	48
3.4.1	计算流程	48
3.4.2	电磁场数值解的电磁转矩计算公式	48
<b>第4章</b>	<b>电磁场数值计算的有限元法</b>	<b>52</b>
4.1	电磁场的基本方程	52
4.2	求解电磁场边值问题的有限元法概述	55
4.3	泛函与变分的基本概念	56
4.3.1	最简单命题和历史上有名的命题	57
4.3.2	关于泛函与变分的基本概念	60
4.3.3	变分问题的求解——欧拉方程(欧拉定理)	61
4.3.4	泛函的确定方法	65
4.4	定解问题求解的有限元法	67
4.4.1	求解域的单元剖分	67
4.4.2	单元内近似解表达式的选取——构造单元的插值函数	68
4.4.3	变分问题的离散化处理——单元分析	72
4.4.4	总体合成	76
4.4.5	强加边界条件处理	79
4.5	三维问题	80
<b>第5章</b>	<b>加权余量法</b>	<b>83</b>
5.1	加权余量法的基本原理	83
5.2	用加权余量法建立电磁场有限元离散化方程	91
<b>第6章</b>	<b>边界单元法</b>	<b>97</b>
6.1	边界积分方程的建立	97
6.2	离散化处理方法	105
6.3	非线性问题的处理方法	113
6.4	多媒质区域的处理方法	114
6.5	边界元法与有限元法的混合应用	115
<b>第7章</b>	<b>图论场模型法</b>	<b>118</b>
7.1	概述	118
7.2	图论场模型建立的基本原理	118
7.3	场图的构成	120



7.4 图方程的建立 .....	123
<b>第 8 章 涡流场分析 .....</b>	<b>131</b>
8.1 概述 .....	131
8.2 涡流场的基本方程 .....	132
8.3 涡流方程的差分解法 .....	141
8.4 涡流方程的有限元解法 .....	145
8.5 瞬态涡流方程的边界元解法 .....	151
8.6 涡流方程的解析法求解 .....	157
8.6.1 直线感应电动机次级中的涡流问题 .....	157
8.6.2 补偿式脉冲发电机补偿筒内的涡流问题 .....	168
附录 补偿电机圆柱坐标下无槽绕组电机的电感计算 .....	185
<b>第 9 章 “场-路” 耦合法 .....</b>	<b>193</b>
9.1 概述 .....	193
9.2 “场-路” 耦合分析原理 .....	194
9.3 磁链和感应电动势的离散化处理 .....	198
9.4 动态气隙单元处理方法 .....	205
<b>第 10 章 利用现代数值计算软件求解电磁场问题算例 .....</b>	<b>210</b>
10.1 无刷直流电机二维静磁场分析 .....	211
10.1.1 二维静磁场分析理论 .....	211
10.1.2 电感和磁链的计算 .....	211
10.1.3 静磁力和转矩的计算 .....	213
10.1.4 仿真算例 .....	214
10.2 笼型异步电动机二维涡流场分析 .....	226
10.2.1 二维时谐涡流场分析理论 .....	226
10.2.2 趋肤效应 .....	226
10.2.3 阻抗矩阵 .....	227
10.2.4 力和力矩 .....	229
10.2.5 仿真算例 .....	229
10.3 永磁同步电机三维瞬态场分析 .....	240
10.3.1 三维瞬态场分析理论 .....	240
10.3.2 仿真算例 .....	242
<b>参考文献 .....</b>	<b>260</b>

# 第1章 概 论

## 1.1 电磁场理论及其计算方法的历史回顾和现代发展

### 1.1.1 电磁场理论的发展概况

在电磁场理论发展中，三大实验定律奠定了电磁场理论的实践基础，这就是：

1785年的库仑定律 (Coulomb's Law)。该定律说，两静止带电体之间的相互作用力的大小与其电荷量的乘积成正比，与它们之间距离的二次方成反比。这就是有名的平方反比定律。这里隐含了电荷间的相互作用是通过“场”发生的。

1820年的奥斯特或安培定律 (Oersted's or Ampere's Law)。它说明载电流导体之间的相互作用，两载电流导体之间的作用力也满足平方反比定律。该定律确定了电生磁的关系，载电流导体产生磁场，载电流导体在磁场中受到力的作用，也是通过“场”发生的。

1831年的法拉第定律 (Faraday's Law)，即电磁感应定律。它说明穿过一个闭合回路的磁通发生变化时，在闭合回路中会产生感应电动势，由此电动势引发的电流企图阻碍磁通的变化，该定律确定了磁生电的关系。

1864年的麦克斯韦电磁场方程组 (Maxwell's Equation)。麦克斯韦集前人实验与理论之大成，创立了完整和系统的电磁理论，即电磁场的动力学理论——麦克斯韦电磁场方程组，其表达形式为：

	微分形式	积分形式
全电流定律	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}$
磁感应定律	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$
高斯定律	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \rho dv$
磁通连续性定律	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
媒质性能关系	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$	

式中： $\mathbf{H}$ 为磁场强度矢量； $\mathbf{B}$ 为磁感应强度矢量； $\mathbf{J}$ 为电流体密度矢量； $\mathbf{D}$ 为电位移矢量； $\mathbf{E}$ 为电场强度矢量； $\rho$ 为电荷体密度； $\mu$ 为媒质磁导率； $\varepsilon$ 为媒质的电容率； $\sigma$ 为媒质的电导率。

注意到这个方程组中的第一个方程，对于静态情况下的闭合回路，方程的右端不存在与时间有关的第二项，即为安培的全电流定律

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

对以上等式的两边取散度，由矢量分析可知，任意矢量旋度的散度恒等于零，也就是它满足

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

即满足静态情况下的电流连续性方程。但在瞬态情况下，电荷是随时间变化的，此时的连续性方程应满足

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

于是有

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

即

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

这样，就形成了麦克斯韦电磁场方程组的第一个方程，其中第二项称为位移电流，由此麦克斯韦预言到电磁波的存在，并为后来的实验所证明，这是他对人类做出的伟大贡献。

麦克斯韦电磁场方程组加上洛伦兹力定律

$$\mathbf{f} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

式中： $\mathbf{f}$ 为电磁力矢量； $q$ 为电荷量； $\mathbf{v}$ 为电荷在磁场中运动速度矢量。就构成了今天的全部经典电磁场动力学基础。它们确定了源与场之间的关系：

$$\text{源:} \quad \rho \quad \mathbf{J} \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\text{场:} \quad \mathbf{E} \quad \mathbf{B} \text{ 或 } \mathbf{D} \quad \mathbf{H}$$

一般情况下，它们是空间和时间的函数，对于静态场则与时间无关。

## 1.1.2 电磁场问题的类型与经典求解方法

求解电磁场的边值问题包含三个要素：源的分布；场的分布；媒质和边界条件与初始条件。

求解问题的类型有：

- (1) 已知媒质和边界与初始条件及源的分布，求场的分布。
- (2) 已知媒质和边界条件，求源的分布。
- (3) 边值问题的反演问题，即已知源和场的分布求媒质和边界条件。

求解场分布的数学模型为偏微分方程的定解问题，求源分布的数学模型为积分方程的求解。偏微分方程的定解问题的求解仅在简单、对称边界条件下，才有可能用经典方法求得解析形式的严格解，大多数情况下只能求得近似解。而积分方程的求解则极少能求得严格解析解，多数情况下只能找到近似求解方法。

求解问题的形式有：

(1) 直接用场量（矢量）与源的关系求解，由上述麦克斯韦方程组不难导出如下方程：

求解电场

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\rho}{\epsilon} \right)$$

求解磁场

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

(2) 引进位函数（标量位或矢量位）求解。对于静电场或载流导体外部的恒定磁场为无旋场，可用标量位表示求解，此时标量位满足泊松方程或拉普拉斯方程。因为  $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ，对于有载流导体区域的磁场为有旋场，可用矢量磁位表示求解，此时矢量磁位满足泊松方程。

电场用标量电位

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

磁场用标量磁位与矢量磁位

$$\nabla^2 \varphi_m = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

恒定场的计算，大多数采用位函数即用位场计算，分为两种类型问题：

分布型问题。对于静态场，已知场源分布， $\rho(x, y, z)$ ， $\mathbf{J}(x, y, z)$ ，求区域内的位函数分布，电位  $\varphi(x, y, z)$ ，标量磁位  $\varphi_m(x, y, z)$ ，矢量磁位  $\mathbf{A}(x, y, z)$ ，

一般采用直接法求解。

边值型问题。已知边界上的位或位的梯度，求场域内的位函数分布，一般用间接法求解。

1) 分布型问题的直接求解法见表 1-1。

表 1-1 恒定场采用的求解方法

恒定电场	恒定磁场
(1) 应用库仑定律 $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho}{r} dv$ 仅适用于均匀媒质	(1) 应用比奥-沙伐定律 $\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_L \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$ 仅适用于均匀媒质
(2) 应用高斯定律 $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \rho dv$ 适用于均匀、非均匀媒质	(2) 应用全电流定律 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum i$ 适用于均匀、非均匀媒质
(3) 应用泊松方程求解 $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ 仅适用于均匀媒质	(3) 应用泊松方程求解 $\nabla^2 A = -\mu J$ 仅适用于均匀媒质

2) 边值型问题求解法。对于用位函数的边值问题求解，除了必须根据描述的物理问题写出控制方程外，还必须知道足够的边界条件，才能获得所求场域内的唯一解。一般存在三种边界条件：

第一类边界条件：边界上的位函数值已知， $u(\mathbf{r}) = c$ 。当  $c=0$  时，称为一类齐次边界，数学上称为狄里赫利边界条件 (Dirichlet Boundary Condition)。

第二类边界条件：边界上的位函数梯度值已知， $\frac{\partial u}{\partial n} = q$ 。当  $q=0$  时，称为二类齐次边界，数学上称为纽曼边界条件 (Neumann Boundary Condition)。

第三类边界条件：为混合边界条件，边界上的位函数与梯度值线性组合已知， $\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = q_1$ ，数学上称为柯西边界条件 (Cauchy Boundary Condition)。

3) 古典求解方法。

① 解析法。根据描述物理问题写出的控制方程，加边界条件求解解析形式的严格解或精确解，解具有连续函数形式，有如下方法：

a. 直接积分法。对于边界条件对称的问题 (如对心、轴对称)，可以将偏微分方程化为一个变量的方程，直接用积分法求解。

b. 解析函数法。对于二维场问题，解析函数法是通过一个解析函数将位

场表现出来,而在一个区域内,解析函数是具有单值连续性质并有确定连续导数的复变函数,其实部和虚部均满足拉普拉斯方程,且其实部和虚部函数描绘的曲线族相互正交,当某一个解析函数所描绘出的几何图形,与导体的磁场或带电体的电场的边界曲线相符合时,则此解析函数即可作为描述待求位场的解。

c. 分离变量法。对于电磁场物理问题的描述,一般均表达为偏微分方程,而分离变量法就是求解偏微分方程的经典方法。此种方法的主要措施就是将问题待求的位函数表示为三个(三维问题)或两个(二维问题)独立坐标函数的乘积,代入原方程后,将偏微分方程化为三个或两个仅含一个变量的常微分方程,从而分别求解,最后合成为原方程解的形式。最终严密唯一解的得出,还有赖于由边界条件确定积分常数,而仅在边界条件简单或严格对称的条件下才有可能,对于复杂边界则很难获得有确定意义解的函数形式。

d. 镜像法。对于二维静态场问题,采用位函数求解时,由于满足一定边界条件的拉普拉斯方程的解是唯一的,所以对于对称、简单问题,例如:求一个在导电媒质无穷大平面附近的带电体产生的电场;求一根在无穷大铁磁媒质平面附近载流导体产生的磁场;将媒质分界面视为等位面,由带电体或载流导体对分界面为镜像,构成其对应体(带电体互为异号、载流导体为同号)形成的场解分布是唯一的,其分界面以上的场即为所求。

② 模拟法。当采用位函数求解二维静态场时,由于其描述物理问题的基本方程相似,边界条件也相似,因而可以采用模拟法求解。例如,用恒定电流场模拟静电场或静磁场,用导电纸或电解槽试验模拟电机的磁极间漏磁或凸极磁极的气隙磁场。

③ 图解法。对于二维场,在复杂边界情况下,无法用解析法求解时,可借助于近似的图解法。它是将媒质边界视为等位面,再根据力线与位线处处互为正交的性质,采用人为画图的方法,描绘出力线与位线网格以构成求解区域场的分布图,近似计算出场解的物理量。此方法在电磁学发展初期得到了应用,如确定电机中的极间漏磁等。

### 1.1.3 现代求解方法——数值求解法

随着计算机、计算技术和数值算法的发展,电磁场问题现代求解法即是采用计算机数值求解近似解的方法,现代发展起来的有如下方法:

有限差分法(Finite Differential Method, FDM),直接离散偏微分方程。它是用差商近似代替微商,用差分方程代替微分方程,把求解域剖分成网格,在网格节点上求微分方程的近似解,所以又称网格法。

有限单元法(Finite Element Method, FEM),它属于微分方程法。有限单

元法是以变分原理为基础,将所要求解的电磁场边值问题(偏微分方程加边界条件)转化为泛函求极值的问题,即变分问题,通过网格剖分和分片插值离散化处理后,构造一个分片解析的有限元子空间,把变分问题近似地转化为有限元子空间中的多元函数极值问题,求得变分问题的近似解作为所求方程的近似解。

边界单元法(Boundary Element Method, BEM),边界单元法属于积分方程法。利用格林函数将求解的偏微分方程的边值问题化为边界积分方程,而后离散化处理求解,如果求解的是拉普拉斯方程,只需在求解域的边界上进行处理,因此边界元法的最大优点是可以降低维数。仅适用于均匀与线性媒质空间。

有限单元-边界单元耦合法(FEM-BEM)。对于多媒质场域问题,有限单元法用于非均匀媒质区域,边界单元法用于均匀媒质区域,在交界面上联立求解。

双标量位法(Double Scalar Potential Method, DSPM)。有限单元法采用矢量磁位求解磁场时,每一个节点必须计算三个分量,这样对计算机的内存和速度势必有更高的要求,为此,人们研究采用标量磁位计算磁场。当采用一种标量位计算铁磁材料内的磁场时,将会遇到两个相近的大数磁场强度相消,而得到很小的合成磁场强度的情况,从而大大降低计算精度的困难。同时,对于非线性问题,可能会造成迭代计算的不收敛。为了克服这些缺点,人们提出了双标量位法,它是用两种不同的标量磁位,分别描述有电流区域和无电流区域,同时用两种场域的交界面条件保证求解域内解的一致性。

棱边单元法(Edge Element Method, EEM)。将求解变量与剖分单元网格的棱边相联系,用变量沿棱边的线积分来定义自由度,以保证切向分量连续。

网络图论场模型法(Graph Theoretic Field Method, GTFM)。直接从物理图像和相关定律离散化,建立代数方程组,即用物理图像的有向线形图构成场图或连续的数学模型,用图论分析方法求解。

## 1.2 电磁场数值计算方法的工程应用

由于工程问题的物理性质本质上是“场”的问题,也就是说,从严格意义上看,任何需要求解的工程问题,其物理量是其所存在空间的点函数的分布问题,历史上由于求解场的问题难度大,不得不采用“路”的方法求解,即采取物理量在局部空间分布平均意义计算的办法,这样得到的解只是近似解,但它基本可以满足工程精度要求。由于现代计算机和计算技术的发展,为用场的方法求解工程电磁场问题创造了条件,因而电磁场数值计算的工程应用

越来越广泛,可以说凡是涉及与电、磁和电与磁相互作用有关的工程问题与器件设计运行问题,均可以应用场的分析与计算方法解决。现代涉及的工程应用问题极为广泛,例如:

电气工程:各类电机与电器,高电压技术与装备,电磁测量仪表与技术,电力电子技术。

工程核物理:强磁场技术,加速器磁体设计与仿真,核聚变工程。

高速运输系统:磁悬浮技术,电磁推进与发射,超高速试验技术。

新概念武器系统:电磁炮,电磁脉冲技术。

现代医疗诊断技术:核磁共振成像装置,医用诊断加速器。

电磁探测:无损探伤技术,地质电磁勘测技术。

微电子技术:微电子器件设计。

电磁冶炼技术:电加热炉设计。

生物电磁效应分析等。

### 1.3 本书的任务与基本内容

随着我国市场经济的发展与对外开放,1997年,教育部修订了我国普通高等学校的本科专业目录,强电类的电气工程学科取消了原来的二级学科,而按一级学科电气工程及其自动化招生与培养大学人才,即按“通才教育”也就是专业方向上按所谓“宽口径”模式培养,以适应我国经济发展对人才的需求。在高级人才(硕士和博士研究生)培养方面,则按二级学科招生,它们包括电机与电器、电力系统及其自动化、高电压与绝缘技术、电力电子与电气传动、电工理论与新技术等。在这些专业中,凡是涉及与电、磁和电与磁相互作用的相关课题领域,只要做深入研究,必然会用到电磁场理论进行分析计算,尤其是随着现代科学技术的发展,各种数值计算应用软件发展很快,这就要求作为高级人才培养对象的学生(硕士生与博士生)不仅要具备计算能力,更应具备分析能力,同时具有坚实的理论基础和宽广的知识面。

现在国内大学电气工程学科的本科课程设置中,与电学、磁学相关的,除了《大学物理》外,还有《电路理论》《电磁场》等,但这些课程已经不能适应现代研究工作的发展,需要在大学本科所学一般电磁场理论的基础上,扩充各种现代数值计算方法,加深理论基础,以适应研究工作的需要,并提高分析问题和解决问题以及创新能力。

近20年来,随着科学技术的迅猛发展,国内与电气工程学科相关的研究机构和大型生产企业,对于电磁装置的设计和运行行为的分析计算,凡是涉



及高精度设计和精细分析、“全方位”设计，尤其对于大型系统中的关键装置，必须进行电磁的、热传导的、流体的（通风冷却）以及力学的（强度、刚度和振动问题）综合物理场的稳态和瞬态分析计算，甚至要考虑各物理场的耦合计算问题，必然用到“场”的理论与分析方法，这就要求技术人员必须具有这方面的知识和能力。

本书是根据作者在 20 世纪 80 年代至 21 世纪初对研究生讲授工程电磁场课程时的讲稿整理而成的。20 世纪 70 年代末，国内各高等学校为适应国际科技发展水平的形势，掀起了电磁场数值计算研究的热潮，周克定教授为此编著了《工程电磁场专论》一书，并为研究生开设了此课程。本书作者自 1987 年开始承接周教授的课程，直至讲授到 2003 年止。周教授编著的专著内容较广泛且非常精练，本书作者在讲授时，对于有些定理进行了详细推导证明，同时，根据作者在开展科学研究工作中取得的成果，补充了一些新的内容，并注重从理论方面阐述清楚。

全书共分 10 章，第 1 章概论，简要地介绍电磁场问题的类型及其求解方法，现代数值计算方法发展和现代工程技术中的应用。第 2 章讨论电磁场理论基础，介绍麦克斯韦方程，用矢量分析方法证明矢量场必须满足的赫姆霍兹定理，阐明采用场变量与位函数的边界条件所必须满足的理论基础，同时介绍了场的级数解法，多极子展开的理论。第 3 章讨论了电机电磁转矩数值计算的理论与方法，电磁转矩是电机进行能量转换重要参数，电磁转矩计算是研究电机运行行为的重要任务之一，本章利用电磁场动量原理导出麦克斯韦张力，从而便于电机电磁转矩的数值计算。第 4 章讨论当前广泛应用的数值计算方法有限元法，并阐明其数学基础——泛函与变分的基本概念，详细讨论求解的电磁场边值问题（偏微分方程加边界条件）转化为泛函求极值的问题，即变分问题的离散化处理过程。第 5 章讨论加权余量法，这是求微分方程近似解的另一种有效方法，阐明其原理和离散化处理方法。第 6 章讨论边界单元法，这是一种积分方程法，边界单元法的最大优点是可以降低维数，本章介绍边界积分方程的建立，然后讨论离散化处理的方法，最后简要介绍边界单元与有限单元法耦合算法。第 7 章讨论图论场模型法，简称网络场模型，这种方法的理论基础是网络拓扑学。它是基于描述电磁场的基本物理规律，如欧姆定律，电路、磁路的安培环路定律，磁通连续性定律以及媒质特性方程等，直接从物理图像建立离散模型，然后根据图论的分析方法，建立起端点方程、节点方程和回路方程等，借助计算机辅助分析法求解。第 8 章主要介绍求解涡流场的一般性方程，包括用场变量和位函数表示的涡流方程以及各种解法的涡流方程，同时用两个典型工程实例讨论涡流方程的解析求解法：一个是直线电机次级中的涡流分析，代表恒稳涡流场解析求解；另一