国家出版基金项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS AND GOLDBACH CONJECTURE

素数分布与 Goldbach 猜想

潘承洞 著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

DISTRIBUTION OF PRIME NUMBERS AND GOLDBACH CONJECTURE

素数分布与Goldbach猜想

潘承洞 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共分6章,以素数分布与哥德巴赫猜想为中心,分别介绍了哥德巴赫猜想概述、整数的基本性质、素数分布、素数定理的初等证明、三素数定理、大偶数理论介绍. 通过这些内容,将使读者对数论的研究内容有初步的了解,也将为数论的进一步研究奠定基础.

本书适合于高等学校数学及相关专业师生使用,也适合于数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

素数分布与Goldbach猜想/潘承洞著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.1

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-6638-8

Ⅰ.①素… Ⅱ.①潘… Ⅲ.①素数 ②哥德巴赫猜想 Ⅳ.①O156.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第111862号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 刘立娟
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 黑龙江艺德印刷有限责任公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张9.5 字数100千字
版　　次 2018年1月第1版 2018年1月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-6638-8
定　　价 58.00元

⊙代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法,一种和他们展开讨论的方式;一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信;一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券;一股改造自己、丰富自己的强大力量.书籍是全人类有史以来共同创造的财富,是永不枯竭的智慧的源泉.失意时读书,可以使人重整旗鼓;得意时读书,可以使人头脑清醒;疑难时读书,可以得到解答或启示;年轻人读书,可明奋进之道;年老人读书,能知健神之理.浩浩乎!洋洋乎!如临大海,或波涛汹涌,或清风微拂,取之不尽,用之不竭.吾于读书,无疑义矣,三日不读,则头脑麻木,心摇摇无主.

潜能需要激发

我和书籍结缘,开始于一次非常偶然的机会.大概是八九岁吧,家里穷得揭不开锅,我每天从早到晚都要去田园里帮工.一天,偶然从旧木柜阴湿的角落里,找到一本蜡光纸的小书,自然很破了.屋内光线暗淡,又是黄昏时分,只好拿到大门外去看.封面已经脱落,扉页上写的是《薛仁贵征东》.管它呢,且往下看.第一回的标题已忘记,只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新:

日出遥遥一点红,飘飘四海影无踪.

三岁孩童千两价,保主跨海去征东.

第一句指山东,二、三两句分别点出薛仁贵(雪、人贵).那时识字很少,半看半猜,居然引起了我极大的兴趣,同时也教我认识了许多生字.这是我有生以来独立看的第一本书.尝到甜头以后,我便千方百计去找书,向小朋友借,到亲友家找,居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等,樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:“康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也.”可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即“涉猎”)相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即“始于精于一,返于精于博”.正如中国革命一

样，必须先有一块根据地，站稳后再开创几块，最后连成一片.

丰富我文采，澡雪我精神

辛苦了一周，人相当疲劳了，每到星期六，我便到旧书店走走，这已成为生活中的一部分，多年如此. 一次，偶然看到一套《纲鉴易知录》，编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材. 这部书提纲挈领地讲中国历史，上自盘古氏，直到明末，记事简明，文字古雅，又富于故事性，便把这部书从头到尾读了一遍. 从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说，例如《三国演义》和《东周列国志》. 我常对人说，这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全. 即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等)，这些书中早就有了，秦始皇的父亲便是受害者，堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗，不屑于名利. 其中"秋水""解牛"诸篇，诚绝唱也.《论语》束身严谨，勇于面世，"己所不欲，勿施于人"，有长者之风. 司马迁的《报任少卿书》，读之我心两伤，既伤少卿，又伤司马；我不知道少卿是否收到这封信，希望有人做点研究. 我也爱读鲁迅的杂文，果戈理、梅里美的小说. 我非常敬重文天祥、秋瑾的人品，常记他们的诗句："人生自古谁无死，留取丹心照汗青""休言女子非英物，夜夜龙泉壁上鸣". 唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》，丰富我文采，澡雪我精神，其中精粹，实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》，既叹服其广博，也使我动了写《科学发现纵横谈》的心. 不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信. 以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”.动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物. 涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此. 曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人. 他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

◎ 目录

第1章

哥德巴赫猜想概述

人们经常要同各种数字打交道，从日常生活到最新的尖端科学技术都离不开数. 我们最熟悉和用得最多的是 1,2,3,4,5,…这些正整数，它们也叫作自然数. 研究正整数的性质，特别是整除性，是一件十分重要而有趣的事，它的性质非常丰富，至今还没有被人们所完全认识.“数论”就是研究正整数性质和规律的一门学问.

我们把那些可以被 2 整除的数叫作偶数，如 2,4,6,8,…，剩下的那些正整数就叫作奇数，如 1,3,5,7,…，这样，所有的正整数就被分成了偶数和奇数两大类. 另一方面，我们发现，除去 1，有的数除 1 和它本身以外，不能再被别的整数整除，如 2,3,5,7,11,13,17,…，这种数称作素数. 有的数除 1 和它本身以外，还能被别的数整除，这种数就叫作合数，如 4,6,9,21,…就是合数. 1 这个数比较特殊，它既不算素数也不算合数. 这样，所有正整数就又被分为

1、素数、合数三类. 正整数的这种分类要比它分为偶数和奇数两大类复杂多了. 人们在很早以前就知道素数有无限多个,后来又知道素数的个数比合数要少很多,但至今我们还没有一种能判断任意一个数是素数还是合数的简单可行的方法,甚至有的数我们根本不知道它是素数还是合数. 现在我们所知道的最大的素数是 $2^{21\,701}-1$. 比它更大的素数虽然存在但目前我们还不知道.

合数与素数之间有什么关系呢? 一个正整数如能被一个素数整除,那么这个素数就叫作这个正整数的一个素因子. 例如,2 是 2 的一个素因子,它也是 10 的素因子. 显然一个素数就只有它本身一个素因子,而合数就可能有好几个素因子,如 6 就有 2 和 3 两个素因子,30 就有 2,3,5 三个素因子,而 4 有两个 2 作为它的素因子,叫作重因子. 所以合数要比素数复杂多了,但合数又是它的所有素因子的乘积,如

$$4=2\times2$$

$$30=2\times3\times5$$

$$96=2\times2\times2\times2\times2\times3$$

等等. 这样,一个合数的素因子的个数愈少愈简单,就愈近似地像一个素数.

容易看出在所有素数中只有一个 2 是偶数,其他全是奇数,叫作奇素数.

正整数可分为偶数和奇数,又可把它分为 1、素数与合数,那么这两种分类之间究竟有什么联系呢? 这是一个十分有趣的问题.

哥德巴赫(Goldbach)猜想就是对这种联系的一种

推测.

在科学研究中,人们在已有知识和实践的基础上往往小心地提出一些推测,以做进一步的研究,这些推测有的后来被证明是正确的,有的被证明是错误的,但也有的至今我们还不知道它是对是错,著名的哥德巴赫猜想就是这样一个至今还未证实的推测.

1742 年 6 月 7 日,德国数学家哥德巴赫在给当时的大数学家欧拉(Euler)的信中,提出了这样两个推测:(1)每个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和;(2)每个不小于 9 的奇数都是三个奇素数之和. 这两个推测就是人们常说的哥德巴赫猜想. 对许多偶数和奇数进行验算都表明这两个推测是正确的,例如

$$6=3+3$$

$$24=11+13$$

$$100=97+3$$

以及

$$103=23+37+43$$

等等. 1742 年 6 月 30 日,欧拉在复信中写道:“任何大于 6 的偶数都是两个奇素数之和,虽然我还不能证明它,但我确信无疑这是完全正确的定理.”容易看出,由第一个推测可以推出第二个推测. 由于欧拉是当时最伟大的数学家,因此他对这个推测的信心,便吸引了许多数学家的注意,都企图去证明它们. 但是,当整个 19 世纪结束的时候,在研究这两个推测方面仍没有取得任何进展,甚至根本不知道应该如何下手. 1900 年德国大数学家希尔伯特(Hilbert)在国际数学会的演说中,提出了具有重要意义的 23 个问题,这就是通常所

说的希尔伯特问题.哥德巴赫猜想被列为希尔伯特第 8 问题的一部分.1912 年另一个德国数学家朗道(Landau)在国际数学会的报告中说,即使要证明下面的较弱的命题:"任何大于 4 的正整数,都能表示成 C 个素数之和",也是现代数学家力所不能及的(这里 C 是某个常数).1921 年英国数学家哈代(Hardy)曾说过哥德巴赫猜想的困难程度是可以和任何没有解决的数学问题相比的.

在 20 世纪 20 年代,英国数学家哈代与李特伍德(Littlewood)提出了用所谓"圆法"来研究哥德巴赫猜想,第一次做出了意义极为重大的推进,并得到了一些初步成果.1937 年苏联数学家维诺格拉多夫(Vinogradov)在哈代-李特伍德工作的基础上,用他自己创造的"三角和方法"首先基本上证明了第二个推测是正确的.确切地说,他证明了每一个大奇数一定可以表示成三个奇素数之和.后来人们经过计算知道,这里所谓的"大奇数"是指一个差不多比 10 的 400 万次方,即 1 后面加上 400 万个 0 这样一个数还要大的数,数字之大是无法用实际东西来比拟的.而目前已经知道的最大素数要比 10 的 400 万次方小得多,所以在这之间的许多奇数我们仍然不知道它们能否表示成三个奇素数之和.因而只能说是基本上解决了哥德巴赫的第二个推测.但这已是一个很重大的贡献了.

在维诺格拉多夫的重要工作之后,我国数学家华罗庚在 1938 年证明了下面的重要定理:几乎全体偶数都能表示成两个素数之和.确切地说,华罗庚证明了几

乎全体偶数都能表示成 $p_1 + p_2^k$ 的形式，这里 p_1,p_2 为素数，k 为任意给定的大于或等于 1 的自然数. 这是华罗庚对第一个推测做出的重要贡献.

对于第一个推测，虽然现在已有人对 33×10^6 以下的每一个偶数进行验算都表明它是正确的，但要想证明它却是更为困难的了. 很早以前，人们就退一步想，能否先来证明每一个大偶数都是两个素因子个数不太多的数之和，由此来找到一条通向解决第一个推测的道路. 为了说起来简单起见，我们把“每一个大偶数可以表示为一个素因子个数不超过 a 的数和一个素因子个数不超过 b 的数之和”，这一命题叫作命题“$a+b$”. 这样，哥德巴赫猜想基本上就是要证明命题“1+1”是正确的. 差不多在哈代-李特伍德提出“圆法”的同时，1920 年挪威数学家布朗(Brun)在这方面迈出了具有重大意义的一步，在其开创性的论文中，第一个对古老的“筛法”做了重大的改进. 他用“筛法”证明了每一个大偶数是两个素因子都不超过 9 个的数之和，即证明了命题“9+9”是正确的. 其后许多数学家继续用布朗提出的方法，尽量减少其中每个数的素因子的个数. 其中主要有：1924 年拉得马切尔(Rademacher)证明了“7+7”；1932 年埃斯特曼(Estermann)证明了“6+6”；1938 年和 1940 年布赫夕塔布(Buchstab)又先后证明了“5+5”和“4+4”. 后来，在 1947 年塞尔伯格(Selberg)对“筛法”做了进一步的改进，并在 1950 年宣布用他的方法可以证明“2+3”，但是始终没有给出他的证明. 1956 年我国数学家王元证明了“3+4”，同年维诺格拉多夫证明了“3+3”，直到 1957 年才

由王元证明了命题“2 + 3”，这已经是愈来愈接近于命题“1 + 1”了. 但以上所证明的结果都有一个共同的弱点，就是其中两个数没有一个可以肯定是为素数的.

早在 1948 年，匈牙利数学家瑞尼（Rényi）在其开创性的工作中，应用筛法和其他更为复杂的方法相结合，得到了一个有趣的结果，就是每一个大偶数都是一个素数和一个素因子不超过 C 个的数之和，即证明了命题“1 + C”. 这是对研究哥德巴赫猜想的一个重大推进. 但是这里的 C 是一个没有计算出来的很大的未知常数. 所以，这只是一个定性的结果. 以后的十多年内在这方面也没有进一步的发展. 1962 年作者首先得到了 C 的定量估计，证明了 $C = 5$，即命题“1 + 5”成立. 随后（同年）王元和作者证明了命题“1 + 4”，1963 年巴尔巴恩（Барбан）也证明了该命题. 1965 年布赫夕塔布、维诺格拉多夫和意大利数学家朋比尼（Bombieri）又都证明了“1 + 3”，特别是朋比尼的工作，当时在国际数学界被认为是了不起的成就.

证明了命题“1 + 3”后，我国数学家陈景润在 1966 年就已经宣布他证明了命题“1 + 2”. 但由于当时他没有发表详细的证明，所以在 1973 年以前的六年间，国际数学界仍然认为命题“1 + 3”是最好的. 因此，当陈景润于 1973 年，用他提出的方法发表了命题“1 + 2”的全部证明后，在世界数学界引起了强烈的反响，这就是著名的“陈氏定理”，在陈景润的证明发表后的短短几年中，国际上又连续发表了五个简化证明，其中，丁夏畦、王元及作者都对“陈氏定理”给出了一个实质性的简化证明.

对于哥德巴赫猜想的研究还必须提及须尼尔曼(Shnirel' man)的重要工作,在 1930 年须尼尔曼引入了关于自然数集合的"正密率"的概念,从而证明了每一整数可以表示成不超过 C 个素数之和. 在须尼尔曼的工作发表后,曾有许多数学家利用了他的方法,并结合"筛法"得到了一系列的结果. 若我们用 S 表示最小的整数,使每一充分大的整数都能表示成不超过 S 个素数之和,则用须尼尔曼的方法可以得到 S 的明确上界. 用他的方法可以算出 $S\leqslant 8\times 10^6$. 罗曼诺夫(Romanov)以后又证明了 $S\leqslant 2\ 208$. 沿着这一方向还有许多数学家做了更进一步的改进. 1950 年夏皮洛与瓦格利用塞尔伯格的筛法证明了$S\leqslant 20$,1956 年我国数学家尹文霖利用渐近密率的方法又将 20 改进成 18,而最好的结果是最近沃恩证明的 $S\leqslant 6$①.

哥德巴赫猜想从提出到今天已经过去两个多世纪了,虽有很多进展,但还未完全解决. 研究哥德巴赫猜想的历史,生动地说明了攀登科学高峰的征途是艰难、漫长而又曲折的,经过许多卓越数学家的辛勤劳动才取得了今天这样的成就. 中华人民共和国成立后,培养了一批年轻的数学工作者,他们在华罗庚教授与闵嗣鹤教授的指导帮助下,曾对哥德巴赫猜想等数论专题方面的研究做出了重要的贡献.

但是应该看到,二百多年来,虽然在研究哥德巴赫

① 用前面提到的维诺格拉多夫将大奇数表示成三个素数的定理可以推出 $S\leqslant 4$. 但维氏所用的方法是相当高级的,而这里的方法却较为"初等"些.