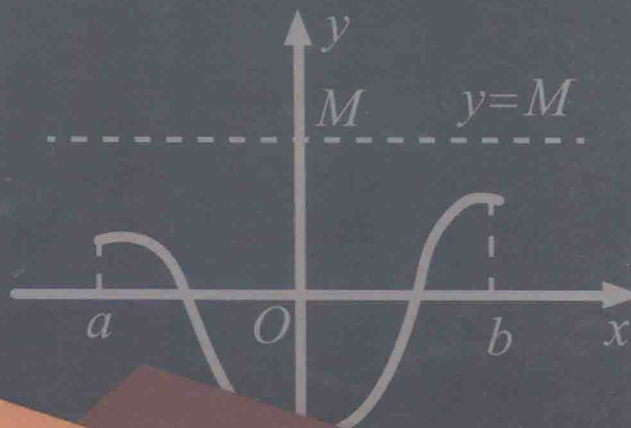
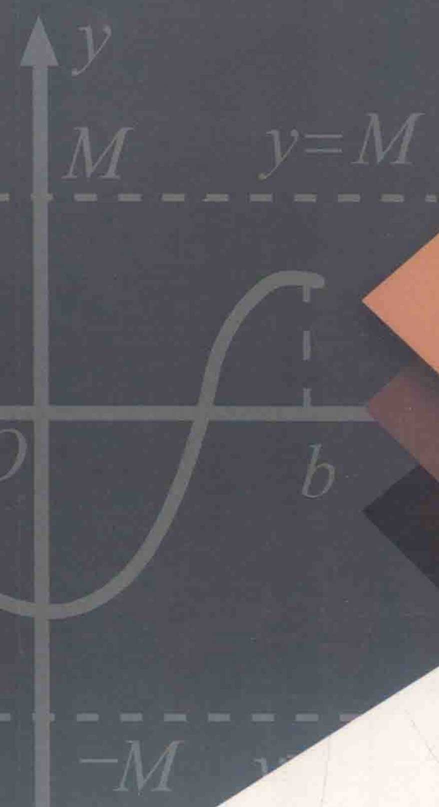
大学数学信息化教学丛书





高等数学及其应用（下）

刘为凯　王志宏　杨建华
主编

科学出版社

大学数学信息化教学丛书

高等数学及其应用

（下）

刘为凯　王志宏　杨建华　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书依据《工科类本科数学基础课程基本要求》编写而成. 全书分上、下两册，共 11 章. 下册内容包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程. 本书吸取了国内外优秀教材的优点，调整了教学内容，适应分层分级教学，各章均有相应的数学实验，注重培养学生的数学素养和实践创新能力.

本书可作为本科院校高等数学课程教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学及其应用. 下/刘为凯，王志宏，杨建华主编. —北京：科学出版社，2018.6

(大学数学信息化教学丛书)

ISBN 978-7-03-057807-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… ②王… ③杨… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 123708 号

责任编辑：谭耀文 王 晶/责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超/封面设计：彬 峰

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：787×1092 1/16

2018 年 6 月第 一 版 印张：20 1/4

2018 年 6 月第一次印刷 字数：476 000

定价：57.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

高等数学是理工科高等院校的一门重要的基础课.与初等数学相比,高等数学的理论更加抽象,逻辑推理更加严密.初学者往往对高等数学的概念和理论感到抽象难懂,解决问题缺少思路和方法.具有良好的数学素质是学生可持续发展的基础,它不仅为学习后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础,而且对培养学生抽象思维、逻辑推理能力,综合利用所学知识分析问题解决问题的能力,自主学习能力和创新能力都具有非常重要的作用.一套好的高等数学教材,作为教学内容和教学方法的知识载体,对培养学生良好的数学素质有着举足轻重的作用.我们依据《工科类本科数学基础课程基本要求》,以提高学生的数学素质、掌握数学的思想方法与培养数学应用创新能力为目的,参考了大量国内外优秀教材,充分吸取了编者们多年来教学实践经验与教学改革成果,编写了这套教材.

在教材编写过程中,我们按照精品课程的要求,体现创新教学理念,以利于激发学生自主学习,提高学生的综合素质和培养学生的创新能力;对教学内容进行适当的调整,以适应分层分级教学模式;试图在保证理论高度不降低的前提下,适当运用实例和图形,以便易教易学;以单元的方式介绍数学实验,帮助学生了解掌握数学和数学的应用;适时介绍有关数学史料,以体现人文精神.总之,编者将长期的教学实践经验渗透到教材中,力求达到便于施教授课的目的.书中带“*”号的内容可视学生的能力及专业要求由教师决定是否讲授.

本教材分上、下两册,上册由阮正顺、张忠诚、刘雁鸣主编,下册由刘为凯、王志宏、杨建华主编.具体分工为:第 1 章由张忠诚编写;第 2 章由宁小青编写;第 3 章由柳翠华编写;第 4 章由阮正顺、刘雁鸣编写;第 5 章由熊晓龙编写;第 6 章由杨雪帆编写;第 7 章由刘为凯编写;第 8 章由王志宏编写;第 9 章由杨建华编写;第 10 章由余荣编写;第 11 章由曾华编写;各章的数字实验由李小刚编写;姜朝君参加了部分内容和习题的编写.本书由刘为凯、王志宏、杨建华主编负责统稿、定稿.

由于编者水平有限,书中有不足之处,希望得到广大专家、同行和读者的批评指正.

编　者

2018 年 3 月

目　录

第7章 多元函数微分法及其应用

上册中所讨论的函数都只有一个自变量,这种函数称为一元函数.一元函数所能描述的只是客观现实中很少一部分事物的变化规律,而更多的情形,需要考虑多个因素影响下的变化规律.反映到数学上,就是一个变量依赖于多个变量的情形.本章将把一元函数的概念推广到多个自变量的情形,即多元函数的情形,并在一元函数微分学的基础上,讨论多元函数的微分法及其应用.从一元函数到二元函数,需要许多新的思想方法;而从二元函数到二元以上的函数,新的思想方法并不多,只是形式和计算上复杂一些.因此,本章以讨论二元函数为主,对二元以上的多元函数可类推.

7.1 多元函数

7.1.1 平面点集

一元函数的定义域是实数轴 $\mathbf{R}^1$ 上的点集,而二元函数的定义域是坐标平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点集.为了将一元函数微积分推广到多元函数的情形,下面分别将 $\mathbf{R}^1$ 中的点集、两点间的距离、区间和邻域等概念推广到坐标平面 $\mathbf{R}^2$ 中,然后引入 n 维空间,以便推广到一般的 $\mathbf{R}^n$ 中,同时,还要引进一些其他概念.

1. 平面点集

由平面解析几何知,建立平面直角坐标系后,平面上的一点 P 与有序二元实数组 (x, y) 之间就建立了一一对应关系.这种建立了坐标系的平面称为坐标平面.二元有序实数组 (x, y) 的全体,即 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x, y) \mid x, y\in\mathbf{R}\}$ 就表示坐标平面.

坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合,称为平面点集,记为

$$E=\{(x, y) \mid (x, y)\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如,$C=\{(x, y) \mid x^2+y^2<R^2\}$ 表示以原点为中心,R 为半径的圆内所有点所构成的平面点集.

下面,在坐标平面上引进几个重要概念.

1) 邻域

设 $P_0(x_0, y_0)$ 为 xOy 面上的一点,$\delta>0$ 为常数,称

$$U(P_0, \delta)=\{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$$

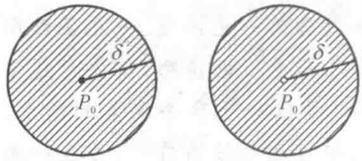
为点 P_0 的 **δ 邻域**,简称**邻域**(图 7-1(a)),也就是说,邻域是以点 $P_0(x_0, y_0)$ 为中心,

笔记栏

以 $\delta > 0$ 为半径的圆内点 $P(x, y)$ 的全体；在 $U(P_0, \delta)$ 中去掉点 P_0，记为

$$\mathring{U}(P_0, \delta) = \{(x, y) \mid 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$
$$= \{P \mid 0 < \mid PP_0 \mid < \delta\},$$

并称为点 P_0 的 **δ 去心邻域**，简称为**去心邻域**（图 7-1(b)）. 在不需要明确指出邻域的半径 δ 时，邻域简记为 $U(P_0)$ 及 $\mathring{U}(P_0)$.



(a) (b)

图 7-1

2）内点、外点、边界点

内点：若 $\exists \delta > 0$，有 $U(P, \delta) \subset E$，则称点 P 是 E 的**内点**（图 7-2）.

外点：若点 $P \overline{\in} E$，且存在点 P 的邻域 $U(P, \delta)$，使 $U(P, \delta) \cap E = \varnothing$，则称点 P 是 E 的**外点**（图 7-3）.

边界点：若 $\forall \delta > 0$，邻域 $U(P, \delta)$ 内既有点属于 E，又有点不属于 E，则称点 P 是 E 的**边界点**（图 7-4）. 而 E 的边界点的全体，称为 E 的**边界**.

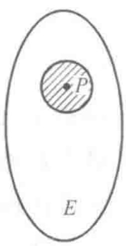


图 7-2

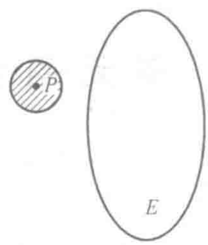


图 7-3

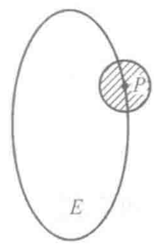


图 7-4

3）有界集、无界集

若 $\exists r > 0$，有 $E \subset U(O, r)$，则称 E 是**有界集**，其中 O 是坐标原点. 反之，称 E 是**无界集**.

4）聚点

设 E 是一个平面点集，若点 P 的任意邻域都含有 E 的无穷多个点，则称点 P 为 E 的**聚点**.

可以证明，点 P 是点集 E 的聚点 $\Leftrightarrow \forall \delta > 0, \mathring{U}(P, \delta) \cap E \neq \varnothing$.

例如，给出平面点集：

$$E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\},$$
$$F = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geqslant 1\},$$
$$G = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}.$$

易看到，E, F, G 内的任何点都是各自的内点，即一个点集的内点必属于它（外点必不属于它）；E, F 的边界是点集 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$，而 G 的边界是

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2\};$$

显然，E 的边界点不属于 E，而 F, G 的边界点属于 F, G，即一个点集的边界点可能属于它，也可能不属于它；E, G 是有界集，而 F 是无界集；E, F, G 的一切内点和边界点都是各自的聚点. 由此可知，点集的聚点可以属于它，也可以不属于它.

5）区域

开集：若平面点集 E 中任一点都是 E 的内点，则称点集 E 为**开集**.

连通集：若平面点集 E 内的任何两点都可用折线联结起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 是**连通集**.

开区域：连通的开集称为**开区域**，简称**区域**.

闭区域：区域 E 连同它的边界组成的点集称为**闭区域**.

例如，$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 是区域，而 $F=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$ 是闭区域.

*2. n 维空间

平面和空间的二元、三元有序实数组 (x,y) 和 (x,y,z) 的全体构成的集合分别记为 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$，n 元有序实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$n\in\mathbf{N}^+$ 的全体构成的集合记为

$$\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},\ i=1,2,\cdots,n\}.$$

平面和空间中的点或向量与有序实数组一一对应.类似地，$\mathbf{R}^n$ 中的元素 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点或一个 n 维向量，其中 x_i 称为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标或 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量.当 $x_i=0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 时，$\boldsymbol{x}$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的零元，且称为 $\mathbf{R}^n$ 中的坐标原点或 n 维零向量.如果在 $\mathbf{R}^n$ 中定义线性运算，即设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中任意两个元素，$\lambda\in\mathbf{R}$，规定

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),\quad \lambda\boldsymbol{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n),$$

这样定义了线性运算的集合 $\mathbf{R}^n$ 称为 **n 维空间**.

$\mathbf{R}^n$ 中任意两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离定义为

$$|PQ|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

仿照平面上的邻域概念，还可定义 $\mathbf{R}^n$ 中点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 δ 邻域的概念，记为

$$U(P,\delta)=\{Q\mid |PQ|<\delta,\ Q\in\mathbf{R}^n\}.$$

有了 $\mathbf{R}^n$ 中的邻域的概念，便可以定义 $\mathbf{R}^n$ 中内点、边界点、聚点，从而定义 $\mathbf{R}^n$ 中的区域、闭区域及有界区域等一系列概念.在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中定义了距离以后，就可以定义 $\mathbf{R}^n$ 中变元的极限.设

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad \boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n,$$

如果 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的距离 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\to 0$，则称变元 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中趋于固定元 $\boldsymbol{a}$.记为 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$.显然

$$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}\Leftrightarrow x_1\to a_1,\ x_2\to a_2,\ \cdots,\ x_n\to a_n.$$

7.1.2 多元函数的基本概念

矩形的面积 S 与它的长 x，宽 y 有如下关系：$S=xy\ (x>0,\ y>0)$；一个商场的某种商品的销售额 W 与商品的单价 P 和销售量 Q 有如下关系：$W=PQ$.一个量由多个量决定的现象不胜枚举，现将它们归于下面的定义：

定义 7.1.1 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的**二元函数**，通常记为 $z = f(x, y), (x, y) \in D$ 或 $z = f(P), P \in D$，其中，点集 D 称为该函数的**定义域**，x, y 称为**自变量**，并称

$$f(D) = \{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

为函数的**值域**，其中 $z = f(x, y)$ 称为 f 在点 (x, y) 的**函数值**.

定义 7.1.1 中的函数习惯上记为 $z = f(x, y), (x, y) \in D, z = f(x, y)$，并也常记为 $z = \varphi(x, y), z = z(x, y)$ 等.

类似地，可定义三元函数 $u = f(x, y, z), (x, y, z) \in D$. 不过，这时的 D 是空间 $\mathbf{R}^3$ 中的点集.

一般地，把定义 7.1.1 中的平面点集 D 换成 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 内的点集 D，映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 就称为定义在 D 上的 n 元函数，通常记为 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$，或简记为 $u = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$，也可记为 $u = f(P), P(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$. 若令 $n = 2$ 或 $n = 3$ 便得二元或三元函数. 二元及二元以上的函数统称为**多元函数**.

一般地，若用算式表达二元函数为 $z = f(x, y)$，那么使这个算式有意义的点 (x, y) 所构成的点集称为二元函数的自然定义域，因而，这类函数的定义域不再特别标出.

例如，函数 $z = \dfrac{\sqrt{x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}$，$x, y$ 应满足 $\begin{cases} x - y^2 \geqslant 0, \\ 1 - x^2 - y^2 > 0, \\ 1 - x^2 - y^2 \neq 1 \end{cases}$ 其定义域为

$$D = \{(x, y) \mid x \geqslant y^2, x^2 + y^2 < 1, x \neq 0, y \neq 0\},$$

如图 7－5 所示.

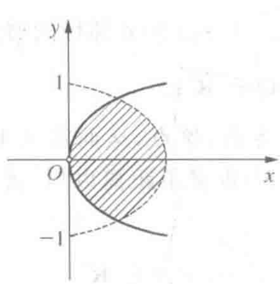


图 7－5

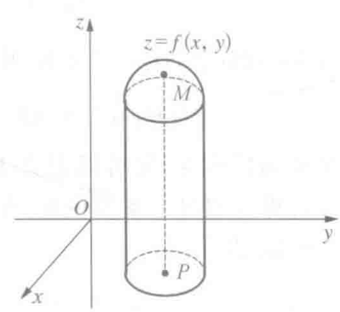


图 7－6

值得注意的是，若对于 D 中任意一点 (x, y)，有两个或两个以上的 z 与点 (x, y) 对应，称 $z = f(x, y)$ 为多值函数，例如，$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$，$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 均确定了多值函数 $z = f(x, y)$，常把它拆成单值函数来讨论，比如，$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 拆成 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，它们在 $\mathbf{R}^3$ 中分别表示以原点为中心，a 为半径的上半球面与下半球面，它们在 xOy 面的投影区域均为 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$，这也是两个单值函数的定义域. 以后，对于二元函数、三元函数，如无特别声明，总假定

所讨论的函数是单值的.

设二元函数 $z=f(x, y)$ 的定义域为 D, $\forall P(x, y) \in D$,对应的函数值 $z=f(x, y)$. 于是,在空间就确定了一点 $M(x, y, z)$,当 (x, y) 遍取 D 上的一切点时,便得到一个空间点集: $\{(x, y, z) \mid z=f(x, y), (x, y) \in D\}$. 这个点集称为二元函数 $z=f(x, y)$ 的图形(图 7-6). 该二元函数的图形是一张曲面,这张曲面在 xOy 面上的投影就是函数 $f(x, y)$ 的定义域 D.

例如,由空间解析几何知,线性函数 $z=ax+by+c$ 的图形是一张平面,而函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的图形是上半锥面, $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ 的图形是上半椭球面,其中上半锥面和上半椭球面在 xOy 面上的投影就是它们的定义域.

如果存在 $M>0$,使 $|f(x, y)| \leqslant M, (x, y) \in D$,称二元函数 $f(x, y)$ 在 D 上**有界**.

7.1.3 多元函数的极限

为方便起见,仅就二元函数的情形,讨论函数的极限问题.

定义 7.1.2 设二元函数 $f(P)=f(x, y)$ 的定义域为 D,点 $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点,如果对于 $P(x, y) \in D \cap \mathring{U}(P_0, \delta)\ (\delta>0)$,且当点 $P(x, y)$ 以**任何方式**趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时,函数 $f(P)$ 无限接近于某常数 A,则称常数 A 为二元函数 $f(P)$ 当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)=A \quad 或 \quad f(P) \rightarrow A\ (P \rightarrow P_0),$$

也记为

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y)=A \quad 或 \quad f(x, y) \rightarrow A\ ((x, y) \rightarrow (x_0, y_0)). \tag{7.1.1}$$

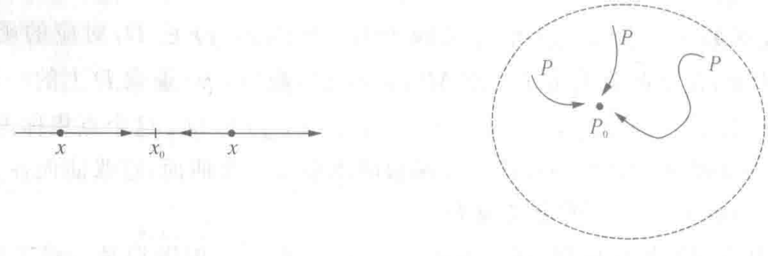
注意到定义 7.1.2 中点 $P(x, y)$ 以任何方式趋于点 $P_0(x_0, y_0)$,最终的结果是点 P 与点 P_0 的距离趋于零,即

$$|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \rightarrow 0.$$

在形式上,式(7.1.1)与一元函数极限 $\lim\limits_{x \rightarrow x_0} f(x)=A$ 类似,但它们有以下本质的差别:

$x \rightarrow x_0$ 是 x 沿横轴从 x_0 两侧趋于 x_0,即趋近的方式只有两种,当然这种趋近的方式可以用连续的方式进行,也可以用任何点列的方式进行(图 7-7(a));但在平面上, $P \rightarrow P_0$ 是位于 $\mathring{U}(P_0) \cap D$ 内的任何点 P,从任何方向趋于 P_0,而且趋近的方式是沿任何曲线或点列趋近 P_0(图 7-7(b)). 这样一来,势必使二元函数的极限问题比一元函数复杂得多.

据二元函数极限的定义,当点 $P(x, y)$ 沿着任意两个不同的方向或曲线趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时,所对应的函数 $f(P)$ 趋于不同的两个结果,这时就可断言,当 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 时,二元函数 $f(P)$ 的极限不存在.



(a) $x \to x_0$ (b) $P \to P_0$

图 7－7

例 7.1.1 讨论 $f(x, y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点$(0, 0)$的极限问题.

解 取点(x, y)沿斜率为 k 的直线趋近点$(0, 0)$，即点(x, y)沿直线 $y=kx$ 趋于点$(0, 0)$，如图 7－8 所示，从而

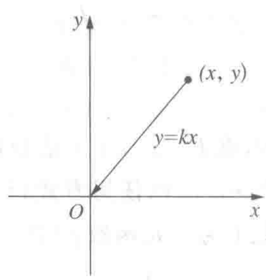


图 7－8

$$\lim_{\substack{(x, y)\to(0, 0)\\ y=kx}} f(x, y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}. \tag{7.1.2}$$

显然当 k 不同时，上式右端的结果不同，从而 $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ 不存在.

由式(7.1.2)知，点(x, y)沿 x 轴(即 $k=0$)趋于点$(0, 0)$同沿 y 轴(即 $k=\infty$)趋于点$(0, 0)$的结果是一致的. 事实上

$$\lim_{\substack{(x, y)\to(0, 0)\\ y=0}} f(x, y)=0, \qquad \lim_{\substack{(x, y)\to(0, 0)\\ x=0}} f(x, y)=0.$$

看来，尽管当$(x, y)\to(x_0, y_0)$时，函数 $f(x, y)$的极限不存在，但选择特殊的趋近路径可能有特殊的结果. 常见的特殊路径有两种：

先从点(x, y)沿水平直线(即将 y 固定)，趋于点(x_0, y)，再从点(x_0, y)沿直线 $x=x_0$ 趋于点(x_0, y_0)，即

$$(x, y)\xrightarrow{x\to x_0}(x_0, y)\xrightarrow{y\to y_0}(x_0, y_0)$$

(图 7－9(a)). 将这种极限记为

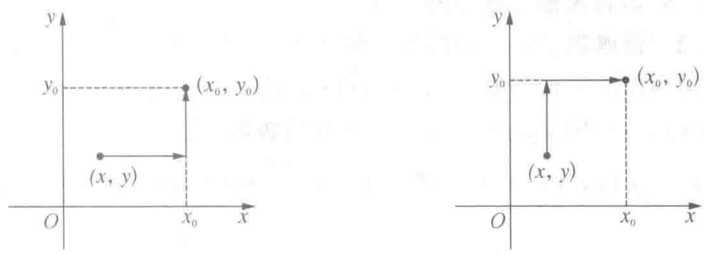
$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y). \tag{7.1.3}$$

同样还有

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y) \tag{7.1.4}$$

(图 7－9(b)). 当三种极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$，$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 都存在时，它们的极限值相等，但仅知其中一个极限存在，不能推出另外两个极限存在.

为区别起见，把 $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)=A$ 称为二重极限，而式(7.1.3)和式(7.1.4)的极限称为累次极限.



(a)　　　　　　　　(b)

图 7－9

同一元函数的极限运算一样，二元函数的极限有以下的四则运算法则：

设 $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y)=A$，$\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} g(x,\ y)=B$，则有

（1）和差法则：$\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)}[f(x,\ y)\pm g(x,\ y)]=A\pm B.$

（2）积法则：$\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)}[f(x,\ y)g(x,\ y)]=AB.$

特殊地，

$$\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)}[kf(x,\ y)]=k\cdot\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y)=kA.$$

（3）商法则：$\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)}\dfrac{f(x,\ y)}{g(x,\ y)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0).$

例 7.1.2　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 1)}\dfrac{x-xy-4}{x^2y+xy-y^3}$；　　（2）$\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 2)}\dfrac{\sin xy}{x}$.

解　（1）　　原式 $=\dfrac{0-0\times1-4}{0^2\times1+0\times1-1^3}=4.$

（2）　　原式 $=\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 2)}\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot y$

$$=\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 2)}\frac{\sin xy}{xy}\cdot\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 2)} y$$

$$=1\times2=2.$$

例 7.1.3　求 $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)}\dfrac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

解　当 $(x,\ y)\to(0,\ 0)$ 时，分母 $\sqrt{x}-\sqrt{y}\to0$，因此，不能用商法则，希望用恒等变形的方法，将极限为零的因子去掉.

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)}\frac{x^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)}\frac{(x^2-xy)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$=\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)}\frac{x(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}$$

$$=\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} x(\sqrt{x}+\sqrt{y})=0.$$

定义 7.1.2 是对二元函数极限的描述性定义.

下面用“$\varepsilon-\delta$”语言来描述极限的概念.

定义 7.1.3 设函数 $f(x, y)$的定义域为 D,点 $P_0(x_0, y_0)$为 D 的聚点,A 为常数,$\forall\varepsilon>0$,若 $\exists\delta>0$,使当$P(x, y)\in D\cap\mathring{U}(P_0, \delta)$时,都有 $|f(x, y)-A|<\varepsilon$,则称 A 为函数 $f(x, y)$ 当$(x, y)\to(x_0, y_0)$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=A \quad 或 \quad f(x, y)\to A\ ((x, y)\to(x_0, y_0)),$$

也可记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad 或 \quad f(P)\to A\ (P\to P_0).$$

类似地,可以定义 n 元函数的极限.

例 7.1.4 设 $f(x, y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$,求证 $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)=0$.

证 这里函数 $f(x, y)$的定义域为 $D=\mathbf{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$,点 $O(0, 0)$ 为 D 的聚点. 因为

$$|f(x, y)-0|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant x^2+y^2,$$

可见,$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$,则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$,即 $P(x, y)\in D\cap\mathring{U}(O, \delta)$ 时,总有 $|f(x, y)-0|<\varepsilon$ 成立,所以 $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)=0$.

利用极限的四则运算法则也可得同样的结果:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x, y)\to(0, 0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\\
&=\lim_{(x, y)\to(0, 0)} x^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}+\lim_{(x, y)\to(0, 0)} y^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}\\
&=0+0=0.
\end{aligned}$$

这里利用了与一元函数极限类似的运算法则:“无穷小量与有界量的乘积仍为无穷小量”. 本题若令 $u=x^2+y^2$,则当$(x, y)\to(0, 0)$ 时,$u\to 0$,于是

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{u\to 0} u\sin\frac{1}{u}=0.$$

显然,这种代换的结果是把二元函数极限问题化成了一元函数极限问题.

7.1.4 多元函数的连续性

由二元函数极限的概念,不难说明二元函数连续性.

定义 7.1.4 设二元函数 $f(P)=f(x, y)$ 的定义域为 D,点 $P_0(x_0, y_0)$ 为 D 的聚点,且 $P_0\in D$,如果 $\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=f(x_0, y_0)$,则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处**连续**.

如果函数 $f(x, y)$在 D 的每一点都连续,那么就称函数 $f(x, y)$**在 D 上连续**,或者称 $f(x, y)$是 D 上的连续函数.

以上关于二元函数的连续性概念,可相应地推广到 n 元函数 $f(P)$上去.

例 7.1.5 设 $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y)\neq(0, 0), \\ 0, & (x, y)=(0, 0).\end{cases}$ 证明：$f(x, y)$在点$(0, 0)$处连续.

证 $\forall\varepsilon>0$,取$\delta=\sqrt{2}\varepsilon$,当$0<|x|<\delta, 0<|y|<\delta$时,有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\frac{|xy|}{\sqrt{2|xy|}}=\frac{\sqrt{|x||y|}}{\sqrt{2}}<\varepsilon,$$

因而

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0, 0),$$

故$f(x, y)$在点$(0, 0)$处连续.

定义 7.1.5 设函数$f(x, y)$的定义域为D,点$P_0(x_0, y_0)$是D的聚点,如果$f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$不连续,则称点$P_0(x_0, y_0)$为函数$f(x, y)$的**间断点**.

例如,

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0, \\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

点$O(0, 0)$是函数定义域$D=\mathbf{R}^2$的聚点,在前面已讨论函数$f(x, y)$在点$O(0, 0)$处极限不存在,故点$O(0, 0)$为函数$f(x, y)$的一个间断点.

又如,$f(x, y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$,点$(0, 0)$是它的间断点.

再如,$f(x, y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$, $x^2+y^2=1$是它的间断线.

依照上面的定义,还可定义n元函数的间断点.

与一元函数类似,利用多元函数的极限运算法则可以证明,多元连续函数的和、差、积、商(在分母不为零处)仍是连续函数,多元连续函数的复合函数亦是连续函数.

与一元初等函数类似,一个多元初等函数是指能用一个算式表示的多元函数,这个算式是由常数及具有不同自变量的一元基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而得到的.例如,$\dfrac{x+x^2-y^2}{1+y^2}$, $\sin(x^2+y^2+z)$, e^{xy^2} 等都是多元初等函数.

根据连续函数的和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合函数的连续性,再利用基本初等函数的连续性,进一步可得出如下结论:**一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.**所谓定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

由多元初等函数的连续性,如果要求它在点P_0处的极限,而该点又在此函数的定义区域内,则极限值就是函数在该点的函数值,即$\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)$.

例 7.1.6 求$\lim\limits_{(x, y)\to(1, 2)}\dfrac{x+y}{xy}$.

笔记栏