



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

STURM THEOREM

Sturm 定理

佩捷 冯贝叶 王鸿飞 编译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

STURM THEOREM

Sturm 定理

佩捷 冯贝叶 王鸿飞 编译



 哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书从一道“华约”自主招生试题的解法谈起,介绍了斯图姆定理的应用,本书共分为七章,并配有许多典型的例题。

本书适合高中生及数学专业本科生阅读。

图书在版编目(CIP)数据

Sturm 定理/佩捷,冯贝叶,王鸿飞编译. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2018. 1

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-6802-3

I. ①S… II. ①佩… ②冯… ③王…

III. ①代数方程—研究 IV. ①O151. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 181029 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 聂兆慈

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 黑龙江艺德印刷有限责任公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 9.25

字数 103 千字 插页 1

版 次 2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-6802-3

定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎
代

序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有何事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样，必须先有一块根据地，站稳后再开创几块，最后连成一片。

丰富我文采，澡雪我精神

辛苦了一周，人相当疲劳了，每到星期六，我便到旧书店走走，这已成为生活中的一部分，多年如此。一次，偶然看到一套《纲鉴易知录》，编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史，上自盘古氏，直到明末，记事简明，文字古雅，又富于故事性，便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说，例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说，这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题（伊朗人质、劫机人质等），这些书中早就有了，秦始皇的父亲便是受害者，堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗，不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇，诚绝唱也。《论语》束身严谨，勇于面世，“己所不欲，勿施于人”，有长者之风。司马迁的《报任少卿书》，读之我心两伤，既伤少卿，又伤司马；我不知道少卿是否收到这封信，希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文，果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品，常记他们的诗句：“人生自古谁无死，留取丹心照汗青”“休言女子非英物，夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》，丰富我文采，澡雪我精神，其中精粹，实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》，既叹服其广博，也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著。我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择。决不要看坏书,对一般书,要学会速读。

读书要多思考。应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题。

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录。对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”。动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

◎ 前言

这是一本“挂羊皮卖狗肉”的小册子。所谓的“羊皮”作为图书来讲一定要是当前图书市场的热点。作为一个专门出数学图书的机构，热点当然是和高考挂钩。而在近10年来，高考中的黑马便是自主招生考试，于是我们便借此为由夹带点数学精华的私货。

21世纪教育研究院副院长熊丙奇曾写过一篇文章，题目叫“自主招生标准为何重回分数原点”。

前不久有传言称，2011年和2012年都参加北京大学“中学校长实名推荐制”的南京金陵中学，2013年没有参加推荐的资格，原因是去年的推荐生“裸分”没达到北大在江苏的录取线。而就在近日，清华大学明确，2013年“领军计划”增加了“学业成绩排名在全年级前1%的应届高中毕业生优先”的政策。

这一消息令舆论很是不解：自主招生提出这么高的学业成绩要求，这样的改革还有何意义？这些排名在重点高中前1%的学生不需要参加自主招生，照样可以进名校。北大、清华如此操作不过是“抢生源”，而且也在自主招生中重复与高考一样的选拔标准。

舆论的不解源于误会了我国高校正在推进的自主招生，以为高校的自主招生建立了多元评价体系，会给一些偏才、怪才以进入大学的渠道。其实我国大学目前的自主招生，其实质根本就不是自主招生。目前自主招生操作的流程是，考生先要参加学校的笔试、面试，获得自主招生资格后，还要参加高考，填报志愿，必须把该校填报在第一志愿（传统志愿填报）或A志愿（平行志愿填报），高考成绩达到高校承诺的录取优惠方能被该校录取。按照这一操作，考生的选择权并没有增加，自主招生还和高考集中录取嫁接，自主招生必定成为高校抢生源的手段。

这就是北大乐于推出“中学校长实名推荐制”的原因。在2010年该制度推出时，北大还宣称这是给中学校长的推荐权利，可以发现一些“怪才”，可说到底，这是把学校的高分学生提前揽到学校门下。按照北大校长实名推荐的操作，获得推荐并通过学校面试的学生，必须承诺报考该校，这不摆明在抢生源吗？再就是，所有获得“校长实名推荐”资格的学校，实行的都是学校推荐，采用的都是以学业成绩为主的“综合指标”体系，因为一方面学校校长不愿意以教育声誉承担推荐责任；另

一方面,大学还是以被推荐参加者高考的成绩来评价学校的推荐是否得力。如果被推荐者参加高考分数不高,甚至将影响到来年大学是否给这所学校推荐指标。

自主招生高校显然明白北大的真实用意,因此,在北大之后,清华、人大等高校推出的计划貌似给学生更多的选择机会,其实是让学生更焦虑,在推荐阶段,就必须做出选择,一旦获得推荐,就不得再选其他学校。

正是由于学生没有选择权,所以北大、清华把学业成绩的标准进一步提高,也就十分正常。这是自主招生与集中录取制度嫁接的必然。而如果实行真正的自主招生,情况就完全不同。自主招生的实质,应当是学校和学生双向选择,一名考生可以申请若干所大学,可以获得多张大学录取通知书再做选择,在这种情况下,大学可以提出基本的学业成绩要求,但如果其把成绩要求提得太高,就将很大程度限制申请数量,结果是难以招收到适合本校的学生。在这种双向选择机制中,大学也会逐渐形成自己的办学特色和招生标准,而不是所有学校都用一个相同的学业成绩标准去评价、选择学生。

2013年,我国高校的自主招生改革试点将进入第11个年头,10年的自主招生实践,让高校的招生标准又回到分数原点,这值得深思。只有实行真正意义的自主招生,才能推进高校转变观念,多元评价体系也才有望形成。

自主招生的试题在短期内一定会是中学师生心目中的热点：多解加强的有之，引为例题论据的有之，但是随着时间的推移，它们一定会逐渐淡出人们的视野，但它们背后所应用到的某个数学定理却愈加凸显，更显历久弥新，就像在一个“拼爹的时代”，你是谁不重要，重要的是你的爹是谁。

前任广东省委书记汪洋喜欢谈历史，其中一个最生动的故事叫“落第秀才干大事”。在2011年1月的广东省委全会上，他对干部说道：“《论语》有一句话，我看了很受启发，‘导千乘之国，敬事而信，节用而爱人，使民以时。’就是管理一个地方，要踏踏实实做事，这样才能得到群众的信任，要节俭用度，爱护民众，珍惜民力，动用民力要审时度势，恰到好处。”

“我最近还看了一个故事，现场要考考你们”，汪洋在会议现场给官员出历史题，他先念了一份名单：“傅以渐、王式丹、林召棠、王云锦、刘福姚、刘春霖。你们知道这6个人是干什么的吗？”

现场沉默。汪洋说：“我估计你们都不知道。”他接着念第二份：“洪秀全、顾炎武、吴敬梓、蒲松龄、金圣叹、黄宗羲。”

这时，现场有不少回应，汪洋笑语：“我估计你们都知道。”

“第一份名单写的全是清朝的科举状元，你们可能一个都记不住；第二份名单全是清朝的落第秀才，但大家都认识”，汪洋对官员们总结说：“一个人能被后人记住，不是你做多大的官，是看你做多大的事，你做了什么事。”

下面简要介绍一下本书的主角斯图姆(Sturm, Charles-Francois, 1803—1855)，瑞士数学家、物理学

家,生于瑞士日内瓦,卒于法国巴黎。曾在日内瓦高等专科学校(Geneva Academy)攻读,1823年到日内瓦附近的科佩堡(Château de Coppet)当家庭教师。随后投身于巴黎科学界。在巴黎大学和法兰西学院向安培、柯西等人学习过物理、数学,与傅里叶、阿拉哥(Arago)等人也有交往。1827年,他同柯拉登(Colladon)因研究液体的压缩而获得巴黎科学院奖金,并被任命为安培的助手。1829年担任《科学与工业通报》(*Bulletin des Sciences et de l'industrie*)的数学主编。1840年,成为巴黎理工大学分析和力学教授,还受聘为巴黎理学院力学教授。先后被选为柏林科学院(1835)、彼得堡科学院(1836)、巴黎科学院(1836)院士,英国皇家学会会员(1840)。1840年获得皇家学会科普利(Copley)奖章。斯图姆在代数方程论、微分方程论、微分几何学等方面都有所贡献。1829年,他向巴黎科学院提交了论文“论数字方程解”(Mémoire sur la résolution des équations numériques),其中深入地讨论了代数方程的根的隔离,提出了有名的斯图姆定理,也称为斯图姆判别法:设 $f(x)=0$ 为区间 (a,b) 内的无重根的方程,方程的系数以及 a,b 皆为实数。作斯图姆函数序列 $f(x), f'(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)=\text{常数}$, 此处 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数, $f_1(x)$ 为以 $f'(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式,但取相反符号, $f_2(x)$ 为以 $f_1(x)$ 除 $f'(x)$ 所得的余式,取相反符号,依此类推, $f_m(x)$ 为最后的余式,等于常数。然后算出数列 $f(a), f'(a), f_1(a), f_2(a), \dots, f_m$ 中符号变换(即由“+”变至“-”,以及其逆)的次数 A , 以及数列 $f(b), f'(b), f_1(b), f_2(b), \dots, f_m(x)$ 中符号变换的次数 B , 最后,差

值 $A-B$ 即等于方程 $f(x)=0$ 在区间 (a,b) 中的实根的个数。1933 年,斯图姆撰写了关于微分方程的一篇著名论文,文中研究了形如 $L \frac{d^2 V}{dx^2} + M \frac{dV}{dx} + N \cdot V = 0$ 的方程,其中 L, M 和 N 是 x 的连续函数, V 为未知函数。此外,斯图姆也写过许多力学和分析力学论文。其《力学教程》(*Cours de mécanique*, 1861) 和《分析教程》(*Cours d'analyse*, 1857~1859) 在半个世纪内被视为经典之作。

自主招生对大城市重点校学生有利,对农村学生及普通校的学生不利,表面上看是视野的原因,根本上说是体制的原因。日本作家村上春树有高墙与鸡蛋之喻,他表示要站在鸡蛋一边。在现实中,我们大部分人都会选择高墙。而我们今天的大学,基本上也成了“高墙”的一部分,并以为既有体制提供“人力资源”为第一要务,而非以培养出具价值意识和反思意识的公民为本。

在二元体制格局下,农村考生为脱离生存地,拼命复习高考中大概率出现的内容。对自主招生考试中这样需要更高数学素养、更广泛数学阅读、更高层次数学视野的东西无缘相见,即便相见也无暇顾及。这也正是本书出版的意义之一。

20 世纪初,赵绦(负沉)在上海编《数学辞典》,交群益书局出版,老板给了他一笔钱。他用这钱为儿女买了玩具,他说:“人世间的事,原是玩玩而已,玩来的尽可玩去。”

这或许应该是我们做书的态度。

刘培杰

2017 年 5 月 8 日

于哈工大

◎
目
录

第 0 章	引言 // 1
第 1 章	试题 1 的三个不同证法 // 3
第 2 章	斯图姆定理详论 // 8
第 3 章	几个相关问题 // 74
第 4 章	实变多项式函数的中间值 定理 // 79
第 5 章	利用斯图姆定理 // 86
第 6 章	一个研究性问题 // 94
第 7 章	判断方程根的其他 方法 // 96
附 录	“杀手”问题 // 111
	编辑手记 // 128



引言

第

0

章

在 2012 年“华约”自主招生考试中有一道令中学师生感到困难的试题：

试题 1 请证明：方程 $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = 0$ 在 n 为偶数时没有实数根，在 n 为奇数时有且仅有一个实数根。

其实这是一道大学考研题目，最早出现于 1983 年四川师范学院招收硕士学位研究生的试题中。近年来又在大学生数学竞赛试题中出现，如 2008 年浙江省大学生高等数学竞赛试题中。其实类似的试题在各国的数学试题中都出现过，如 1976 年苏联大学生数学竞赛试题、《美国数学月刊》征解问题，最早甚至可以追溯到 20 世纪