通高等教育“十三五”规划教材
通高等教育工程数学系列教材

向量分析与场论 复变函数与积分变换复习与提高

主编　李景和　吴梦虹

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等教育工程数学系列教材

向量分析与场论　复变函数与积分变换复习与提高

主　编　李景和　吴梦虹
副主编　马秀娟　赵娇云　孙光坤　张相梅

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书是科学出版社出版的《向量分析与场论》和《复变函数与积分变换》两本教材的配套辅导用书, 内容包括向量分析、数量场、向量场、三种特殊形式的向量场、复数及复变函数、解析函数、复变函数的积分、复变函数的级数表示、残数及其应用、保形映射、傅里叶变换和拉普拉斯变换. 各章内容有基本要求、主要内容复习、例题分析, 每一个阶段学习后有一个综合练习题并附有答案与提示, 全书的最后是作业题并附有答案与提示. 本书内容充实, 题型丰富, 能够帮助学习该课程的学生全面复习和掌握课程的知识点, 进一步提高解题的能力.

本书可作为学习相关课程的学生的课外辅导书, 也可作为教师的教学参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

向量分析与场论　复变函数与积分变换　复习与提高 / 李景和, 吴梦虹主编. —北京: 科学出版社, 2018.9

普通高等教育“十三五”规划教材　普通高等教育工程数学系列教材

ISBN 978-7-03-058424-3

Ⅰ. ①向…　Ⅱ. ①李…　②吴…　Ⅲ. ①向量分析–高等学校–教材　②场论–高等学校–教材　③复变函数–高等学校–教材　④积分变换–高等学校–教材　Ⅳ. ①O183.1　②O412.3　③O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 175727 号

责任编辑: 滕亚帆　李　萍 / 责任校对: 严　娜
责任印制: 霍　兵 / 封面设计: 华路天然设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
石家庄继文印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2018 年 9 月第　一　版　开本: 787×1092　1/16
2018 年 9 月第一次印刷　印张: 13 1/2
字数: 320 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

《向量分析与场论》和《复变函数与积分变换》是计算机、电气、自动化、信息、机械等工科专业重要的基础课程, 学习好这门课程可以为学生的专业课学习打下坚实的基础, 对于培养学生的专业能力以及未来的业务素质具有重要的意义. 为了帮助学生更好地理解课程中的基本概念和基本理论, 掌握基本的方法, 进一步提高分析问题和解决问题的能力, 笔者根据课程大纲的要求, 综合考虑该门课程教学的实际情况和学生在学习中遇到的困难, 编写了这本《向量分析与场论　复变函数与积分变换　复习与提高》, 作为学生学习的指导用书, 本书与李景和、赵娇云主编的《向量分析与场论》, 徐勇、李景和、张相梅主编的《复变函数与积分变换》两本教材相配套.

全书分为“向量分析与场论”和“复变函数与积分变换”两部分, 其中向量分析与场论部分共 4 章, 复变函数与积分变换部分共 8 章, 全书总共 12 章. 书中带“*”所对应的内容是教师在实际教学中根据具体教学时数等情况加以取舍的内容, 可供对这些内容有兴趣的学生和学有余力的学生进一步学习参考.

本书内容充实, 其中“基本要求”具体指出了各章应掌握的内容和程度; “主要内容复习”概括了各章的基本概念、重要定理、重要结论和公式, 帮助学生从整体上把握每一章的脉络; “例题分析”精选各种题型, 由浅入深, 由易到难, 全面覆盖各章的知识点, 分析和解题过程非常详尽; “综合练习题”和“作业”着重检测学生对基本内容的掌握情况, 促使学生通过练习进一步消化课堂上所讲的知识内容.

李景和编写和整理全书各章中的基本要求、主要内容复习、综合练习题和作业题, 赵娇云编写向量分析与场论部分中的例题分析, 马秀娟、张相梅、吴梦虹、孙光坤编写复变函数与积分变换部分中的例题分析, 其中马秀娟编写第一、三章的例题分析, 张相梅编写第二、六章的例题分析, 吴梦虹编写第四、五章的例题分析, 孙光坤编写第七、八章的例题分析. 全书由李景和统稿.

本书编写过程中得到何华教授和徐勇教授的支持与鼓励, 徐勇教授对本书的编写给出了很多很好的建议, 科学出版社的编辑对本书的出版倾注了大量的心血, 作者在此一并表示衷心的感谢!

由于编者水平有限和时间匆忙, 书中难免有不妥之处, 敬请使用本书的读者批评指正, 也殷切希望读者对本书的修改提出建议, 以促使本书的不断完善.

编　者

2018 年 7 月

目　　录

向量分析与场论部分

第一章　向 量 分 析

基 本 要 求

1. 理解向径向量、向量的模、单位向量和向量的方向余弦等相关概念，掌握向量的加法、数乘、数量积、向量积等运算，知道向量的混合积与三重向量积.

2. 理解向量函数、矢端曲线、向量函数的极限和连续的概念，掌握曲线的向量方程和参数方程的关系，会求向量函数的极限.

3. 理解向量函数的导数和微分的概念及其几何意义，理解向量函数的导数的物理意义，掌握向量函数的导数公式和求曲线的切线向量的方法，会求向量函数的导数和微分.

4. 理解向量函数的不定积分和定积分的概念，会求向量函数的不定积分和定积分.

主要内容复习

一、向量的基本知识

对 $\mathbf{R}^3$ 中的任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, 记 $a_x=x_2-x_1, a_y=y_2-y_1, a_z=z_2-z_1$, 则 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=[a_x,a_y,a_z]^{\mathrm{T}}$, 称 a_x,a_y,a_z 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标. 对 $\mathbf{R}^3$ 中的任意点 M, 称以原点 O 为起点, M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 为点 M 的向径向量(或位置向量), 记作 $\boldsymbol{r}$. 若 M 的坐标为 (x,y,z), 则 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=[x,y,z]^{\mathrm{T}}$.

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的模, $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$, 其中 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 Ox 轴, Oy 轴, Oz 轴的夹角分别为 α,β,γ, 则称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦, 有

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}=[\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma]^{\mathrm{T}},$$

即 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦是其单位向量 $\boldsymbol{a}^0$ 的三个坐标, 可以用来表示 $\boldsymbol{a}^0$.

当两个向量的模和方向都相同时, 认为这两个向量是相等的.

二、向量的运算

设向量 $\boldsymbol{a}=[a_x,a_y,a_z]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}=[b_x,b_y,b_z]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{c}=[c_x,c_y,c_z]^{\mathrm{T}},k$ 为常数, 有以下运算:

(1) 加法 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=[a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z]^{\mathrm{T}}$.

(2) 数乘 $k\boldsymbol{a}=[ka_x, ka_y, ka_z]^{\mathrm{T}}$.

(3) 数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$, θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角. 称 $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{a}}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影.

① $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$;

② $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交.

(4) 向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$.

① $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$, θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角;

② $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行 $\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;

③ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

三、向量函数的基本概念

设有实变量 t 和变向量 $\boldsymbol{F}$, 如果对于 t 在某个范围 G 内的每一个数值, $\boldsymbol{F}$ 都有一个确定的向量与之对应, 则称 $\boldsymbol{F}$ 为实变量 t 的向量函数, 记为 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t)$.

向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 的坐标表示式为

$$\boldsymbol{F}(t)=F_x(t)\boldsymbol{i}+F_y(t)\boldsymbol{j}+F_z(t)\boldsymbol{k}=[F_x(t), F_y(t), F_z(t)]^{\mathrm{T}}. \tag{1.1}$$

把 $\boldsymbol{F}(t)$ 的起点放在坐标原点, 这样当 t 变化时, $\boldsymbol{F}(t)$ 的终点 M 描绘出的曲线 l 称为 $\boldsymbol{F}(t)$ 的矢端曲线, 同时称 (1.1) 式为此曲线的向量方程, 而

$$x=F_x(t),\quad y=F_y(t),\quad z=F_z(t)$$

是曲线 l 以 t 为参数的参数方程. 曲线 l 的向量方程与曲线 l 的参数方程有着一一对应的关系.

四、向量函数的极限和连续

设向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 t_0 的某个去心邻域内有定义, $\boldsymbol{F}_0$ 是一个常向量, 若对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|t-t_0|<\delta$ 时, 有 $|\boldsymbol{F}(t)-\boldsymbol{F}_0|<\varepsilon$, 则称 $\boldsymbol{F}_0$ 是向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{F}_0$.

向量函数也有类似于数量函数中的一些极限运算法则(见教材).

若 $\boldsymbol{F}(t)=F_x(t)\boldsymbol{i}+F_y(t)\boldsymbol{j}+F_z(t)\boldsymbol{k}$, 则有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{F}(t)=\lim_{t\to t_0}F_x(t)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to t_0}F_y(t)\boldsymbol{j}+\lim_{t\to t_0}F_z(t)\boldsymbol{k}.$$

设向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 t_0 的某个邻域内有定义, 若 $\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{F}(t_0)$, 则称 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 t_0 处连续.

$\boldsymbol{F}(t)$ 在 t_0 处连续的充分必要条件是其三个坐标函数 $F_x(t), F_y(t), F_z(t)$ 在 t_0 处连续.

五、向量函数的导数与微分

设向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 t 的某个邻域内有定义, 并设 $t+\Delta t$ 也在这个邻域内, $\boldsymbol{F}(t)$ 对应于 Δt 的增量 $\Delta\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t+\Delta t)-\boldsymbol{F}(t)$, 若极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{F}(t+\Delta t)-\boldsymbol{F}(t)}{\Delta t}$$

存在, 则称此极限为向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 t 处的导数(简称导矢), 记作 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}$ 或 $\boldsymbol{F}'(t)$.

l 是 $\boldsymbol{F}(t)$ 的矢端曲线, $\boldsymbol{F}'(t)$ (当其不为零时) 是曲线 l 在 t 值对应点 M 处的切线向量, 而且指向对应 t 值增大的一方. 向量函数的求导公式见教材.

若 $\boldsymbol{F}(t)=F_x(t)\boldsymbol{i}+F_y(t)\boldsymbol{j}+F_z(t)\boldsymbol{k}$, 则有

$$\boldsymbol{F}'(t)=F_x'(t)\boldsymbol{i}+F_y'(t)\boldsymbol{j}+F_z'(t)\boldsymbol{k}.$$

设向量函数 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t)$, 称 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}'(t)\mathrm{d}t$ $(\mathrm{d}t=\Delta t)$ 为向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 t 处的微分. 微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 是一个向量, 在 t 值对应点 M 处与 $\boldsymbol{F}(t)$ 的矢端曲线 l 相切. 当 $\mathrm{d}t>0$ 时, $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}'(t)$ 的方向一致; 当 $\mathrm{d}t<0$ 时, $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{F}'(t)$ 的方向相反.

若 $\boldsymbol{F}(t)=F_x(t)\boldsymbol{i}+F_y(t)\boldsymbol{j}+F_z(t)\boldsymbol{k}$, 则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}'(t)\mathrm{d}t=F_x'(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{i}+F_y'(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{j}+F_z'(t)\mathrm{d}t\boldsymbol{k}.$$

将向量函数 $\boldsymbol{F}(t)=F_x(t)\boldsymbol{i}+F_y(t)\boldsymbol{j}+F_z(t)\boldsymbol{k}$ 看成其终点 $M(x,y,z)$ 的向径函数, 可推得向量函数微分的模等于其矢端曲线弧微分的绝对值, 有

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right|=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{|\mathrm{d}s|}=1,$$

因此向量函数对(其矢端曲线的)弧长 s 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ 是一个单位切向向量, 指向 s 增大的方向.

若曲线 l 的参数方程为 $x=x(s),y=y(s),z=y(s)$, 即将参数 t 取为弧长 s, 则

$$x'(s)=\cos\alpha,\quad y'(s)=\cos\beta,\quad z'(s)=\cos\gamma,$$

这里 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是曲线 l 切线向量的方向余弦.

向量函数的导数的物理意义: 设质点 M 在空间运动, 其向径 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, 其中 t 是时间变量, 则 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 是质点 M 运动的速度向量 $\boldsymbol{v}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ 是质点 M 运动的加速度向量 $\boldsymbol{a}$.

六、向量函数的积分

若在 t 的某个区间 I 上, 有 $\boldsymbol{G}'(t)=\boldsymbol{F}(t)$, 则称 $\boldsymbol{G}(t)$ 为 $\boldsymbol{F}(t)$ 在此区间上的一个原函数. 在区间 I 上, $\boldsymbol{F}(t)$ 的原函数的全体称为 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 I 上的不定积分, 记作 $\int\boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t$.

若 $\boldsymbol{G}(t)$ 为 $\boldsymbol{F}(t)$ 在区间上 I 的一个原函数, 则 $\int\boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{G}(t)+\boldsymbol{C}$, 其中 $\boldsymbol{C}$ 是任意常向量.

向量函数的不定积分成立与数量函数不定积分完全类似的结论和性质(见教材).

若 $\boldsymbol{F}(t)=F_x(t)\boldsymbol{i}+F_y(t)\boldsymbol{j}+F_z(t)\boldsymbol{k}$, 则

$$\int \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{i}\int F_x(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{j}\int F_y(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{k}\int F_z(t)\mathrm{d}t.$$

设向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $\boldsymbol{F}(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分为

$$\int_a^b \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{F}(\zeta_i)\Delta t_i,$$

其中 $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b,\zeta_i$ 为区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上的任一点, $\Delta t_i=t_i-t_{i-1},\lambda=\max\{\Delta t_i\}$, $i=1,2,\cdots,n$.

有关数量函数定积分的性质和计算方法都适用于向量函数.

若 $\boldsymbol{G}(t)$ 为连续向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数, 则有

$$\int_a^b \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{G}(b)-\boldsymbol{G}(a).$$

若 $\boldsymbol{F}(t)=F_x(t)\boldsymbol{i}+F_y(t)\boldsymbol{j}+F_z(t)\boldsymbol{k}$, 则

$$\int_a^b \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{i}\int_a^b F_x(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{j}\int_a^b F_y(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{k}\int_a^b F_z(t)\mathrm{d}t.$$

例题分析

例 1.1　设向量 $\boldsymbol{a}=[3,3,-2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}=[-1,-4,2]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{c}=[2,2,1]^{\mathrm{T}}$, 试求:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot(3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})$;　(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$;　(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$.

解　(1) 因为

$$3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}=[-7,-16,4]^{\mathrm{T}},$$

故

$$\boldsymbol{a}\cdot(3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c})=3\times(-7)+3\times(-16)+(-2)\times 4=-77;$$

(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}3&3&-2\\-1&-4&2\\2&2&1\end{vmatrix}=-21$;

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}=10\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{a}$

$$=[-10,-40,20]^{\mathrm{T}}+[24,24,-16]^{\mathrm{T}}=[14,-16,4]^{\mathrm{T}}.$$

例 1.2　判断下面结论是否正确, 为什么?

(1) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$;

(2) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, 则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

解　(1) 结论一般不正确.

由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, 故 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$, 即能得出向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 正交. 虽然 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 仍无法得出 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 例如, 取 $\boldsymbol{a}=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}=[3,2,4]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{c}=[2,3,2]^{\mathrm{T}}$, 有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, 但 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$.

(2) 结论一般不正确.

由于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, 故 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$, 即能得出向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 平行. 尽管 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 仍无

法得出 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 例如, 取 $\boldsymbol{a}=[1,0,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}=[3,2,5]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{c}=[4,2,4]^{\mathrm{T}}$, 有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$, 但 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{c}$.

例 1.3　证明下面的结论:

(1) 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线, 且 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, 则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$;

(2) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面;

(3) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$, 则向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线(即平行).

证明　(1) 因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共线, 故向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均不为零向量, 并且

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},$$

记

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{d},$$

可知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 垂直于同一非零向量 $\boldsymbol{d}$, 所以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. 从而有不全为零的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 使

$$\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},$$

用向量 $\boldsymbol{a}$ 与上式两边作向量积, 有

$$\lambda_1(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})+\lambda_2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+\lambda_3(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, 上式化成

$$\lambda_2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})-\lambda_3(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0},$$

由条件 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$, 整理得

$$(\lambda_2-\lambda_3)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0},$$

因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $\lambda_2-\lambda_3=0$, 即 $\lambda_2=\lambda_3$.

同理可证 $\lambda_1=\lambda_2$, 因此有 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, 且均不为零, 即有

$$\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_1\boldsymbol{b}+\lambda_1\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},$$

故

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

(2) 欲证向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面, 只需证向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的混合积为零即可, 即证 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$.

用向量 $\boldsymbol{c}$ 和式 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 的两端作数量积, 有

$$\text{左边}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c},$$

因 $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}=0,(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=0$, 故

$$\text{左边}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c},$$

而

$$\text{右边}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{c}=0,$$

故混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$, 从而向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

(3) 欲证向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线, 只需证 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 的向量积为零即可, 即证 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$. 展开, 得

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c},$$

又由条件 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$, 代入上式得

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c},$$

因为

$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b},$$

故 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$, 从而向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线.

例 1.4 利用教材第 6 页的定理 1.1 证明下面结论:

若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 则 $\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\}=|\boldsymbol{a}|^4\boldsymbol{b}$.

证明 由定理 1.1, 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个向量, 则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}.$$

因而有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})&=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=-[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}]\\&=-(|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}-0\boldsymbol{a})=-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b},\end{aligned}$$

又

$$\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]=\boldsymbol{a}\times(-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b})=-|\boldsymbol{a}|^2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\}&=\boldsymbol{a}\times[-|\boldsymbol{a}|^2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]=-|\boldsymbol{a}|^2[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\\&=-|\boldsymbol{a}|^2(-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^4\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

例 1.5 已知圆函数 $\boldsymbol{e}(\varphi)=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j},\boldsymbol{e}_1(\varphi)=-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j}$, 试证明:

(1) $\boldsymbol{e}(\varphi)\times\boldsymbol{e}_1(\varphi)=\boldsymbol{k}$; (2) $\boldsymbol{e}(\varphi+\alpha)=\boldsymbol{e}(\varphi)\cos\alpha+\boldsymbol{e}_1(\varphi)\sin\alpha$.

证明 (1) $\boldsymbol{e}(\varphi)\times\boldsymbol{e}_1(\varphi)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\cos\varphi&\sin\varphi&0\\-\sin\varphi&\cos\varphi&0\end{vmatrix}=(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}$;

(2) $$\begin{aligned}\boldsymbol{e}(\varphi+\alpha)&=\cos(\varphi+\alpha)\boldsymbol{i}+\sin(\varphi+\alpha)\boldsymbol{j}\\&=(\cos\varphi\cos\alpha-\sin\varphi\sin\alpha)\boldsymbol{i}+(\sin\varphi\cos\alpha+\cos\varphi\sin\alpha)\boldsymbol{j}\\&=\cos\alpha(\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j})+\sin\alpha(-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j})\\&=\boldsymbol{e}(\varphi)\cos\alpha+\boldsymbol{e}_1(\varphi)\sin\alpha.\end{aligned}$$

例 1.6 已知曲线 C 的参数方程为

$$C: x=3-t,\quad y=5-t,\quad z=-2+3t,$$

写出曲线 C 的向量方程, 并说明 C 是何种曲线.

解 曲线 C 的向量方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)&=(3-t)\boldsymbol{i}+(5-t)\boldsymbol{j}+(-2+3t)\boldsymbol{k}\\&=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}+t(-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}),\end{aligned}$$

C 是过点 $M(3,5,-2)$, 以向量 $\boldsymbol{a}=[-1,-1,3]^{\mathrm{T}}$ 为方向向量的直线.

例 1.7 已知曲线 C 的向量方程为

$$C: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\theta)=\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

写出曲线 C 的参数方程, 并说明 C 是何种曲线.

解 曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta, \\ z = 1. \end{cases}$$

消去参数θ后即得$x^2 + y^2 = 1, z = 1$, 故C是圆柱面$x^2 + y^2 = 1$与平面$z = 1$的交线, 是一圆周.

例 1.8 求下面向量函数的极限$\lim\limits_{t\to 0}\boldsymbol{F}(t)$, 其中

(1) $\boldsymbol{F}(t) = \mathrm{e}^t\boldsymbol{i} + \dfrac{\sin t}{t}\boldsymbol{j} + \dfrac{\cos t - 1}{2t}\boldsymbol{k}$; (2) $\boldsymbol{F}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t-1}\boldsymbol{i} + \dfrac{1}{1-t}\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

分析 利用向量函数的坐标表示, $\boldsymbol{F}(t) = F_x(t)\boldsymbol{i} + F_y(t)\boldsymbol{j} + F_z(t)\boldsymbol{k}$, 向量函数在一点$t_0$的极限可以转化为三个数量函数的极限, 即$\lim\limits_{t\to t_0}\boldsymbol{F}(t) = \lim\limits_{t\to t_0}F_x(t)\boldsymbol{i} + \lim\limits_{t\to t_0}F_y(t)\boldsymbol{j} + \lim\limits_{t\to t_0}F_z(t)\boldsymbol{k}$.

解 根据分析, 有

(1) $\lim\limits_{t\to 0}\boldsymbol{F}(t) = \lim\limits_{t\to 0}\mathrm{e}^t\boldsymbol{i} + \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}\boldsymbol{j} + \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos t - 1}{2t}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$;

(2) $\lim\limits_{t\to 0}\boldsymbol{F}(t) = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^t}{t-1}\boldsymbol{i} + \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{1-t}\boldsymbol{j} + \lim\limits_{t\to 0}2\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

例 1.9 设一质点M在空间运动, 其向径向量为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = 10t\boldsymbol{i} + 15t^2\boldsymbol{j} + 41\boldsymbol{k} \quad (t\text{ 为时间参数}),$$

求: (1) 质点在任意时刻的速度向量$\boldsymbol{v}$和加速度向量$\boldsymbol{a}$;

(2) $t = 0$时质点的速度$\boldsymbol{v}$和加速度$\boldsymbol{a}$.

解 (1) 在任意时刻, 质点M的速度向量为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 10\boldsymbol{i} + 30t\boldsymbol{j};$$

加速度向量为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 30\boldsymbol{j}.$$

(2) 当$t = 0$时, $\boldsymbol{v} = 10\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a} = 30\boldsymbol{j}$.

例 1.10 证明圆柱螺旋线$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\theta) = a\cos\theta\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j} + b\theta\boldsymbol{k}$的切线向量与$Oz$轴之间成定角.

分析 由向量函数的导数的几何意义知向量函数的导数(当其不为零时)是曲线在相应点处的切线向量, 故只需证明$\boldsymbol{r}'(\theta)$与Oz轴的夹角是常数即可.

证明 由$\boldsymbol{r}'(\theta) = -a\sin\theta\boldsymbol{i} + a\cos\theta\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}$, 知

$$|\boldsymbol{r}'(\theta)| = \sqrt{(-a\sin\theta)^2 + (a\cos\theta)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

以φ表示$\boldsymbol{r}'(\theta)$与Oz轴之间的夹角, 即切线与Oz轴之间的夹角, 则有

$$\cos\varphi = \frac{b}{|\boldsymbol{r}'(\theta)|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

所以

$$\varphi = \arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = 常数.$$

例 1.11 求等速圆周运动 $\boldsymbol{r} = R\cos\omega t\boldsymbol{i} + R\sin\omega t\boldsymbol{j}$ 的速度向量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度向量 $\boldsymbol{a}$, 并讨论它们与 $\boldsymbol{r}$ 的关系.

解

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -R\omega\sin\omega t\boldsymbol{i} + R\omega\cos\omega t\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i} - R\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j},$$

由于

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = (R\cos\omega t)(-R\omega\sin\omega t) + (R\sin\omega t)(R\omega\cos\omega t) = 0,$$

所以 $\boldsymbol{r}$ 与速度向量 $\boldsymbol{v}$ 垂直. 又

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= -R\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i} - R\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j}\\ &= -\omega^2(R\cos\omega t\boldsymbol{i} + R\sin\omega t\boldsymbol{j}) = -\omega^2\boldsymbol{r},\end{aligned}$$

说明加速度向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 平行, 但方向相反.

例 1.12 求下列向量函数的不定积分 $\int \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t$:

(1) $\boldsymbol{F}(t) = \sin t\boldsymbol{i} + \mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$; (2) $\boldsymbol{F}(t) = t\mathrm{e}^t\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}t^2\boldsymbol{j} + \frac{1}{1+t^2}\boldsymbol{k}$.

解 将向量函数的不定积分转化为三个数量函数的不定积分, 有

(1) $\int \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{i}\int\sin t\mathrm{d}t + \boldsymbol{j}\int\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \boldsymbol{k}\int\mathrm{d}t = -\cos t\boldsymbol{i} - \mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C}$;

(2) $\int \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{i}\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t + \boldsymbol{j}\int\frac{1}{2}t^2\mathrm{d}t + \boldsymbol{k}\int\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = (t-1)\mathrm{e}^t\boldsymbol{i} + \frac{1}{6}t^3\boldsymbol{j} + \arctan t\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C}$,

其中的 $\boldsymbol{C}$ 均为任意常向量.

例 1.13 求下列向量函数的定积分:

(1) $\boldsymbol{F}(t) = \sin^2 t\boldsymbol{i} - \cos t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t$;

(2) $\boldsymbol{F}(t) = -a\sin t\boldsymbol{i} + a\cos t\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}$, 求 $\int_0^{2\pi}[\boldsymbol{F}(t)\times\boldsymbol{F}'(t)]\mathrm{d}t$.

解 将向量函数的定积分转化为三个数量函数的定积分, 有

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t = \boldsymbol{i}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t - \boldsymbol{j}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t + \boldsymbol{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \frac{\pi}{2}\boldsymbol{k}$;

(2) 因 $\boldsymbol{F}'(t) = -a\cos t\boldsymbol{i} - a\sin t\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$, 故

$$\boldsymbol{F}(t)\times\boldsymbol{F}'(t) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix} = ab\sin t\boldsymbol{i} - ab\cos t\boldsymbol{j} + a^2\boldsymbol{k},$$