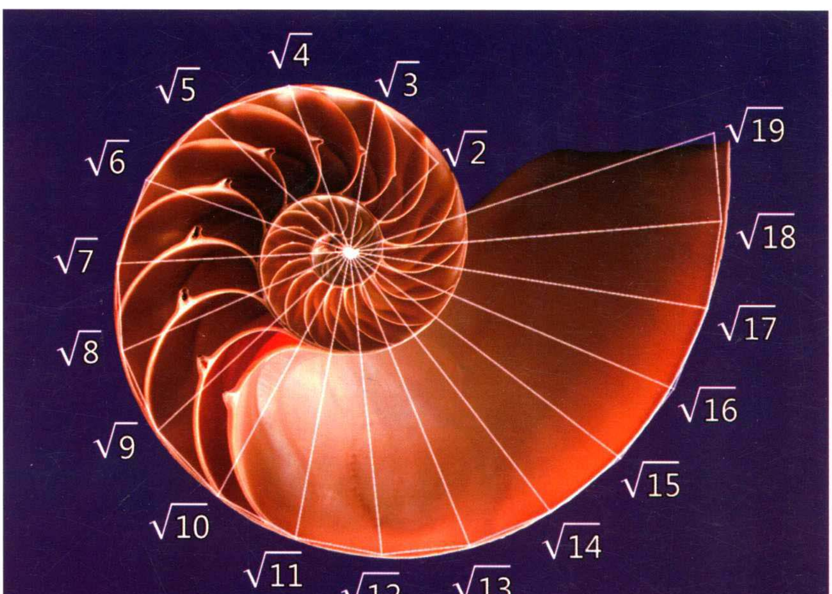
理性派

身边的数学译丛

无理数的那些事儿

[英]朱立安 · 哈维尔（Julian Havil）著

程晓亮　译



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

身边的数学译丛

无理数的那些事儿

The Irrationals：A Story of the Numbers You Can't Count On

[英] 朱立安·哈维尔（Julian Havil） 著

程晓亮 译

机 械 工 业 出 版 社

本书是关于无理数的综合性读物，讲述了从古代到21世纪关于无理数的内容，以及相关数学家们的故事.

本书适合列入数学相关专业学生的书单，也适合数学教师、数学爱好者和相关科研人员阅读.

The Irrationals：A Story of the Numbers You Can't Count On/by Julian Havil/9780691143422

图书在版编目（CIP）数据

无理数的那些事儿/（英）朱立安·哈维尔（Julian Havil）著；程晓亮译. —北京：机械工业出版社，2018.1

（身边的数学译丛）

书名原文：The Irrationals：A Story of the Numbers You Can't Count On

ISBN 978-7-111-58608-1

Ⅰ.①无…　Ⅱ.①朱…②程…　Ⅲ.①无理数　Ⅳ.①O122

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第295446号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　李　乐

责任校对：郑　婕　封面设计：路恩中

责任印制：孙　炜

天津翔远印刷有限公司印刷

2019年1月第1版第1次印刷

169mm×239mm · 16.25印张 · 264千字

标准书号：ISBN 978-7-111-58608-1

定价：49.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务　　　　　　　　网络服务

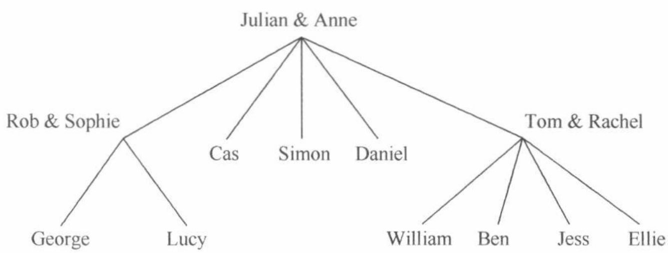
服务咨询热线：010-88361066　机 工 官 网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-68326294　机 工 官 博：weibo.com/cmp1952

　　　　　　　010-88379203　金 书 网：www.golden-book.com

封面无防伪标均为盗版　　教育服务网：www.cmpedu.com

谨以此书献给世界上“最伟大”的家庭



致 谢

非常感谢我的编辑，维奇·卡尼，感谢他无限的耐心和理解；感谢乔恩·温赖特如此熟练和灵巧地排版此书；感谢肖恩·库雷西、安德鲁·莉和乔治·沃特金森给出专业的计算机图形学的意见；感谢古希腊人从音响工程师的角度给出专业的知识. 最后特别提到阿达瓦·阿夫沙尔和阿奇·博特，是我以前的两名学生，感谢他们如此仔细地阅稿并直率地给出评论，他们对这本书的出版有不可估量的帮助.

做一名数学家并非易事；这是一门令人生畏的学科，即使是受过教育的人对此也是知之甚少，甚至不知道它究竟是什么，而对此他们可能还会堂而皇之地吹嘘自己的无知.

——安德鲁·霍奇斯(《艾伦·图灵传》)

一个数学家的命运是对无穷多的事情知道得无穷少；而一个哲学家的命运则是对无穷少的事情知道得无穷多.

——佚名

1[⊖] 引　言

空气实验无根据的平息（10）

1,《每日电讯报》字谜 26488 号，2011 年 3 月 1 日

无理数被认识大约有 2500 年了，但只是在过去的近 150 年里才被人们真正地理解. 本书将指引你了解无理数在长期历史进程中的一些重要的理论思想、人物以及相关事件的发生地点.

无理数的"大事记"起源于大约公元前 450 年的希腊，当时的希腊是纯粹数学的发源地，大部分理论的基石已经奠定，但其中的一块注定要过早地瓦解. 第一位代表人物是萨摩斯岛的毕达哥拉斯，神秘主义使得他被人们确切所知的东西很少，但他的确是最早建立纯粹数学的人. 常数$\sqrt{2}$有时候被作为无理数的代名词，一般地（尽管不是普遍地）认为它是一个基本无理数，正如一致认为正是$\sqrt{2}$动摇了古希腊数学信仰中至关重要的基本哲学原理：万物皆为有理数. 人们认识到正整数不能统治整个宇宙. 然而，正如我们所知道的那样，古希腊人并没有发现无理数，更不用说$\sqrt{2}$（直到 1525 年才出现）这个符号了；他们已经论证了，一个正方形的边长和对角线不能用同一个单位来测量，或者换句话说，测量边长的任何单位与对角线都是不可公度的. 我们的一个早期的任务就是解决无理数的不可公度这一问题.

关于无理数的故事就这样开始了，有时可以预见它的进展方向，但是通常它都是沿着人迹罕至的道路，并长期被遗弃或隐藏在数学专著的浓密的灌木丛中. 正如之前所提到的，我们已经知道了关于无理数的一些结论，这些各种各样的结论已经形成了无理数的历史. 无论是伟大的，还是渺小的；无论是著名的，

⊖ 此为原版书页码，书中引用和书后索引页码为此页码.

还是无名的；也无论是现代的，还是古典的——最后我们都赋予它们接近原始
的形式，尽管这样做代价有点高. 对于数学，再没有比 G. H. Hardy（哈代）更 *1*
会审美的了，他有一句最为广泛流传的语录是[1]： *2*

世上永没有丑陋数学的立身之地.

也许不是这样，但是最早获得的关于事物本质的证明往往是看似幼稚、令人害羞的[2]，然而这些证明不应该被遗忘，而且这个过程是积累的绝好机会，对它们稍加改动，便可以获得更好的方法，能够被用于后期获得的数学思想方法中.

在阅读这本书的旅途到达终点时，希望读者能够洞察到无理数在纯数学发展中的重要性[3]及其对数学发展提出的巨大挑战. 事实上，有些挑战已经出现了，其他的挑战也将慢慢地显现.

那么，所谓的无理数是什么呢？的确，回答是显而易见的：

无理数就是不能表示为两个整数的比的数.

或者，等价地说，

就是无限不循环小数.

然而，从上面的两个定义可以看出，定义无理数不能像定义奇数那样，说它不是偶数. 问题所在的严重性是，这些答案仍有诸多局限性：例如，我们怎么去定义两个无理数是否相等，或者，它们之间的算术运算又是怎样的呢？尽管这些定义是熟悉的、可理解的、无异议的，但它们在实践中也毫无作用. 由此，无理数就被定义成它们中的一个，而不再是独立存在的了. 谁说它们是存在的呢？为了创新，我们采用第三种鲜为人知的方法：

因为每个有理数 r 都可以写成 $r=\dfrac{(r-1)+(r+1)}{2}$ 的形式，即每个有理数都是 *2*
其他两个有理数（在这里，就是 $r-1$ 和 $r+1$）的平均数，因此，不存在有理数会 *3*
与所有其他有理数不同的情况.

鉴于此，将无理数定义为：

所有实数中不是有理数的数的集合.

---

[1] *A Mathematician's Apology*（Cambridge University Press，1993）.

[2] 正如哈代所言.

[3] 即使没有可以接受的符号用来代表它们.

这种新颖的定义相较以前的定义局限性更小. 然而，有一个令人不安的事实是，如果我们使用整数（也许不用），那么有理数严格有效的定义更为简单直接，但是如何将它从无理数中分离出来确实又是另一重要的问题，有这样一个形象的比喻：有理数集合与整数集合规模一样，但是无理数集合规模更大. 这个问题酝酿了几个世纪，它的解答分析更是花费了较长时间，自从“埃利亚的芝诺”开始，在超过两千年后，19 世纪严格主义者们提出了更多挑战性的问题及更为复杂的悖论. 最后是在德国解决了这一问题，多位德国数学家几乎同时提出了三种答案. 我们在倒数第二章进行讨论，细节上毋庸置疑，尽管烦琐的查证会占据很大的篇幅，但是我们希望给读者足够的信念以便留下一个积极的信号.

那么，这一切的目的是什么呢？无疑是希望读者能够更好地了解实变量及其相关的极限和级数，为了使他们能像阅读历史书那样，依次从开始到结束. 同时也为了那些数学训练较少、但是有极强的好奇心和热情的人：他们可能钻研熟悉或新颖的知识，从而像尝试拼图游戏那样填满缺口. 最后，这个拼图可能不完整，但是它的结构足够使我们能清晰地认识它. 有时为了解释较为复杂的想法，我们付出了很多努力，我们必须承认读者也需要投入很多精力. 借用普林斯
3 顿大学前任校长詹姆斯 · 麦考士的话，叙述如下：

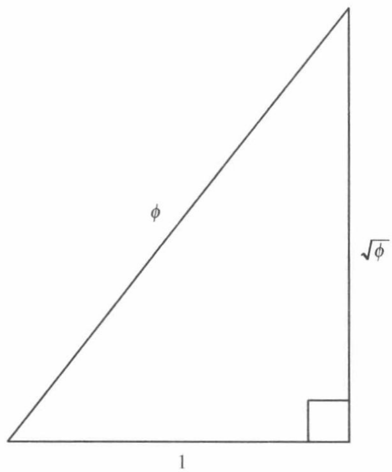
4 读书不是为了你，而是为了让你思考.㊀

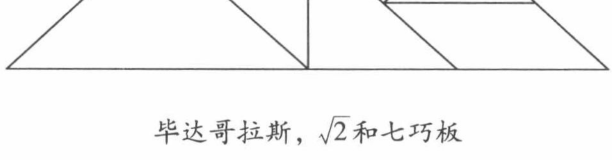
见多识广的读者可能会对一些内容的疏漏感到失望，例如以 φ 为底数的黄金（φ）进制（用于确定黄金比率），又如法雷序列和福特圆. 这些内容和一些其他思想是被有意省略的，当然更多的内容是在无意间被忽略了. 无理数这门学科历史古老，涉及知识范围广，思想内容深，本书仅试图展示其代表内容，高度概括的写作难免会忽略一些内容. 这本书的每一章都可以拓展成另一本书，每本书都可以分成几卷.

在此，我们为本书中所有印刷或其他错误向读者道歉，为了消除这种愧疚，我们用埃里克 · 贝克的评论来博取读者的理解与同情：

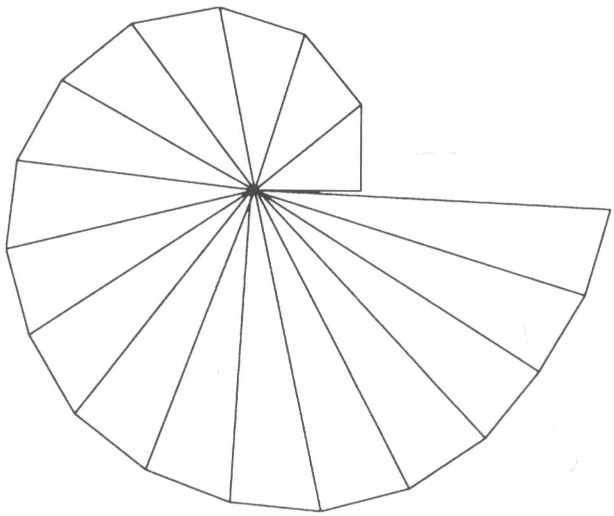
4 出版以后再校对更为有效.

㊀ 他继续说道：“世界上没有任何书能与《圣经》相媲美.” 这就承认了，我们更看重情操的宽广.


ϕ
$\sqrt{\phi}$
1



7



7 西奥多罗斯的螺线

8

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\pi x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

目　录[一]

[一] 本书在页边标注了英文原书页码的起始和终止位置，书中“第 * 页”和书后索引是指原书页码．

第一章 9

希腊起源

考虑要投入多少研究去判定最不重要的事实是一件可怕的事情.

——司汤达

起源与辩解

欧洲数学是无理数的摇篮：诞生于公元前几个世纪的希腊. 为了证明这个事实，我们必须依赖于一些那个时代的莎草纸文献的片段、后期整理完成的手稿以及许多专家的研究工作。有些后期手稿虽然是完整的，但出现时间较晚. 专家的研究之间也存在根本性的分歧，甚至有些专家的学说本身就产生矛盾. 下面是一段非常重要的话：

> 曾前往埃及的泰勒斯[1]，是最早将“几何”这一科学引入希腊的人. 他自己有许多几何学上的发现，并将其发现的几何原理传授给他的门徒，用一般的方式或者更多地以前人的经验解决一些问题. 继他之后，诗人斯特希科鲁的兄弟玛默库斯也被记载曾投入到几何学的研究中；伊利斯的希皮亚斯记录了他在这方面获得的成就. 继这些人之后，毕达哥拉斯将数学哲学转化为一种自由教育的方案，自上而下地研究它的原理，以无形的（抽象的）知识性的方式检验它的原理. 于是他发现了比例学说和宇宙轮廓的结构.[2] 9

现在谈谈《欧德莫斯概要》，它是《欧几里得〈几何原本〉第一卷评注》的一篇序言，它的作者是普罗克鲁斯，全名是普罗克鲁斯·狄奥多库斯，我们 10
很快就能发现普罗克鲁斯成功的原因. 普罗克鲁斯，最后一个伟大的古希腊哲学

---

[1] Thay-leez，但是最初是写成 T-hay-leez.

[2] 由 Glenn R. Morrow 翻译的：*Proclus, A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*（Princeton University Press，1992）.

家，他提到了米利都的泰勒斯（前 624—前 546），泰勒斯可能是第一位纯数学家；他也提到了萨摩斯岛的毕达哥拉斯（前 580—前 520），毕达哥拉斯可能是第二位纯数学家，并且有可靠证据表明无理数的故事可能是由他而开始的. 我们对普罗克鲁斯的认识[1]并非独创，英国著名的博学家艾弗·布尔默-托马斯给予了他客观的历史评价：[2]

> 《欧德莫斯概要》连同帕普斯的《数学汇编》及欧托基奥斯对阿基米德三部著作的注释，是希腊数学早期历史的三个最宝贵的资源. 在结束语中普罗克鲁斯表达了他希望能以相同的方式完成《几何原本》剩余几卷的注释；不过没有证据表明他曾经完成了，但正如第一卷的注释包含了定义、假设和公理，这提醒我们他曾经想说一些非常重要的事情.

我们所拥有的一些资料是在 1000 年后将古代时期主要的可靠信息按照编年史的方式加以记载，这些资源提供了对其他历史内容做评论的更为重要的依据；最有影响、最具研究性、再版最多[3]、阅读最广泛的数学作品是《几何原本》.
10 讽刺的是，这一标志性的作品幸存的手稿少之又少，使得我们对古希腊的数学
11 认识显得那么的贫乏. 希腊是用莎草纸来做书写媒介的，莎草纸是由源自尼罗河三角洲的一种像草一样的植物制作的，受自然的影响常常会快速腐烂，尤其是在希腊相对潮湿的气候里. 在这种气候下，长期保存记录并不容易：它会腐烂. 一些被认为很值得保存的资料将会雇佣抄写员抄写下来，可能作为忠实性副品或者人们希望对其做一些适当的改变来保存；但其他的作品都会因容易腐烂而丢失. 下面再次引述艾弗·布尔默-托马斯的话：

> 《几何原本》如此成功以至于它前面的著作都退出了历史舞台.

一个简单的事实是，正是卓越的《几何原本》削弱了先于它的一些著作中的问题，使得阐述这些问题的一些作品默默无闻，然后被遗忘；在 19 世纪，大卫·希尔伯特的评论确实相当不错地总结了这种情形：

> 通过早期出版的数量来衡量一部科学作品的重要性是没有必要的.

在本章的后面我们将大量地用到《几何原本》，但是读者应该清楚，因为没

---

[1] “普罗克鲁斯之于欧几里得正如博斯韦尔之于约翰逊”，根据 Howard Eves 所说.

[2] Ivor Bulmer-Thomas，1972，Proclus on Euclid Ⅰ，*The Classical Review*（New Series）22：345-47.

[3] 为了新奇，读者可能希望阅读 Oliver Byrne 最为著名的版本，现在的重印版是：Werner Oechslin，2010，*Byrne*，*Six Books of Euclid*，ed. Petra Lamers-Schutze（Harper Paperback）.

有现存的原版，我们又必须依赖二手资料. 实际上，这部著作现存的最早的副本从 9 世纪开始就被保存在牛津大学的梵蒂冈图书馆和博德利图书馆里；这个副本是欧几里得所处时期一千年之后的版本. 据说，一些更早的片段被发现于大约公元前 225 年的埃及的陶片上和公元前 100 年的几页莎草纸上：前者记录了第八卷中两个命题的注释，后者包含了第二卷的上部分.

由于希腊的记录材料和环境有致命的不足，《几何原本》使无数的早期著作变得毫无意义，并且天命般地影响着随后的许多年，我们必须接受随之而来的历史困境：影响并不止于此. 事实上，始于大约公元前 450 年的希腊习俗——口
头传播知识，以及后期的评论者喜欢夸大伟人的贡献，最终一步一步地摧毁了 *11*
亚历山大的学术财富：罗马人（大约在公元前 48 年）将拥有大约 500000 册手 *12*
稿的伟大的亚历山大图书馆夷为平地，基督教徒（在 392 年）掠夺了亚历山大塞拉皮斯圣殿中的大约 300000 册手稿，最后穆斯林烧毁了它成千上万的书籍（大约在 640 年）. 加上毕达哥拉斯学派的习惯是将所有成果归功于创始人，但是这个人从来没书写下来任何记录，这构成了我们数学历史噩梦的要素；由于缺乏可靠证据，对于判断的准确性和客观性而言就只能是一些专家不可推卸的责任了，而我们的论述必须依赖于这些人.

特别地，关于我们对毕达哥拉斯的认识，当代古典学教授卡尔·霍夫曼提供了一个缓冲的观点[1]：

> ……任何由毕达哥拉斯的生活编制成的大事件都如同用最劣质的纤维织成的布料.

毕达哥拉斯可能是泰勒斯的学生，也可能是对普罗克鲁斯产生重要作用的人；例如，柏拉图（前 428—前 347）在《理想国》第十卷中提到他是一位伟大的老师，这可以追溯到大约公元前 380 年. 同时也有三部涉及他的传记：第一部是第欧根尼（200—250）所写的关于希腊哲学家的工作和生活的十卷著作中的一卷，即《毕达哥拉斯的生活》；另外两部分别是卡尔基斯的杨布里科斯（约 245—325）所著的《毕达哥拉斯的生活方式》，以及他的老师波菲利（234—305）所著的《毕达哥拉斯的生活》. 这些都是写于毕达哥拉斯时代之后的大约 800 年，但是至少是现存的. 现代这方面的专著是由德国的古典文学家瓦尔特·

---

[1] Huffman, Carl, 1993, *Philolaus of Croton Pythagorean and Presocratic: A commentary on the Fragments and Testimonia with Interpretive Essays* (Cambridge University Press), pp: 1-16.

伯克特[1]所著的，我们向有兴趣和忠诚的读者推荐它；为适合本书的需要，我们将满足于下面叙述中的毕达哥拉斯学派的影响.

12 万物皆数：这是毕达哥拉斯学派的中心思想. 对他们而言，数字意味着离散
13 的正整数，用单位 1 可以衡量其他的数字. 这意味着所有的数字是单位 1 的倍数；即所有的数字都可以由它来进行度量. 相对地，长度、面积、体积、质量等都是连续的量，古希腊人用这些量来代替实数. 离散的量从概念上来看是有把握的，其他的量也可以设想出来，只要两种相关性的标准是同一类型的. 此外，现代的表述

$$A : B = C : D$$

是有意义的，这里等式的一边是同一类型的量，另一边是另一种同类型的量. 这可以说一边是表示长度的量，另一边是表示面积的量，稍后我们将看到这一点的作用. 此外，音阶的研究揭示了哲学与音乐的和谐的声音，这可用弦的长度比例来衡量，例如，八度音阶相应的长度比例为 2 : 1，纯四度的长度比即是3 : 2 等. 有证据表明，连续的量也可以用离散的量来衡量. 我们考虑亚里士多德[2]总结的情况：

这些哲学家以及之前的人们，也就是所谓的毕达哥拉斯学派，是第一个接受数学的，不仅仅是最先研究它，而且提出了数学中的原理也是一切事物的原理这一思想. 这些原理数字是由自然孕育的，他们似乎意识到用这些数字可以代表许多存在或未知的事物——不仅仅是火、土、水（数的某种改进意义是合理的，一些可以表示判断，一些表示灵魂、理性和机遇等，数字化的方式可以表达近乎一切相似事物）；然后，再一次，他们认为这些改进和音阶比率都可以用数字表达，数
13 字看起来是一切自然事物的根源，数字是整个自然界的第一件大事，他们猜想数
14 字元素是构成一切事物的元素. 整个世界都是音阶和数. 他们认为整个世界中所有的事物，按照某种特质，都可以收集填充到这个体系中；如果哪个地方有分歧，他们总是做出补充使得他们的理论更为完善，就如数字 10 被认为是完美的，它包括了整个自然界中的所有事物. 他们说移动于世间的物体都是 10，但是可见的物体只是 9，为了满足这个，他们创造了 10——“对应整个地球”.

---

[1] *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*，由 Edwin Minar 翻译（Harvard University Press，1972）.

[2] 亚里士多德，形而上学，卷 1（1），由 W. D. Ross 翻译，可用网址是 http://ebooks. adelaide. edu. au/a/aristotle/metaphysics/complete. html（访问于 2011 年 9 月 19 日）.

由于毕达哥拉斯学派的教条主义，希腊数学随着“一个名副其实的逻辑丑闻”㊀而在这一阶段出现了危机，这可能是第一个长期存在，并一直持续至今的危机.

有了可靠的资源，学者们从关于遥远时期的可靠的证据中挖掘信息. 然而，直到现在，我们还是希望读者有一个客观的认识历史的内在价值的能力，在众多同时期的评论中，以智慧的方式接受所谓的权威论述.

作为最后一个重点，我们将泰勒斯、毕达哥拉斯和普罗克鲁斯联系起来获得一些想法，这得益于 20 世纪早期荷兰数学研究者范佩西的学术工作㊁，他详细研究了普罗克鲁斯接触过或直接使用过的作品，不论它们是否被明确引用. 图 1. 1显示的是人物时间表，由熟悉的或者不太熟悉的人名和大概的时间构成. 最特别的是，罗兹岛的欧德莫斯（前 350—前 290），是一位历史学家，主要贡献在于写了一部遗失了很长时间、涵盖了公元前 335 年之前的希腊几何学的历史著作；尤其是，范佩西（和其他人）确信普罗克鲁斯是在参考这部著作的基础上完成了《欧德莫斯概要》. 14

15

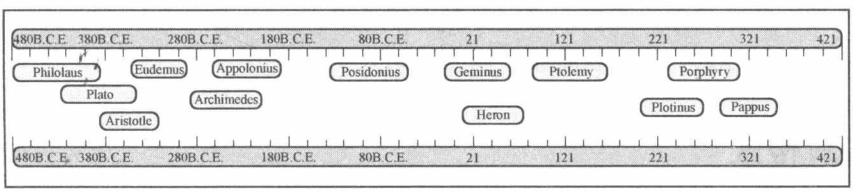


图　1. 1

然而，范佩西的列表中缺少两个名字，因为这两个人具体生活的时期不为人知. 第一位是安提阿的卡布斯，或者是“工程师卡布斯”，因为他，普罗克鲁斯明确了一个角是一个数量的定义，特别是线或面之间的距离的定义；他也是被卡尔基斯的杨布里科斯认可的毕达哥拉斯学派中解决了古代三大难题之一的人：化圆为方是不可能的. 他生活的时期可能在公元前 200 年到公元 200 年之间的某个时间段.

第二位是亚历山大的叙利亚诺斯，他是柏拉图和亚里士多德的注解员，通

㊀ Paul Tannery, 1887, *La Géométrie Grecque* (Paris), pp. 141-161.

㊁ *De Procli fontibus*, Dissertatio ad historiam mathemsecs Graecae pertinens (Lugduni-Batavorum, Apud L. Van Nifterik, 1990).