

INVERSE THEORY AND APPLICATIONS  
IN GEOPHYSICS

# 地球物理 反演理论与应用

[美] MICHAEL S. ZHDANOV 著  
底青云 薛国强 李貅 等 译

$$Am=d, m \in M, d \in D$$



科学出版社

# 地球物理反演理论与应用

[美] Michael S. Zhdanov 著

底青云 薛国强 李 貅 等 译

科学出版社

北 京

图字号: 01-2018-3942

## 内 容 简 介

本书详细介绍地球物理反演的正则化求解方法及该方法在线性和非线性地球物理反演中不同形式的应用,是原著作者在地球物理反演及应用方面的研究成果,反映了当今国际上地球物理反演的前沿问题。

本书可供大中专院校地球物理相关专业师生以及科研、生产单位工程技术人员参考使用。

### 图书在版编目(CIP)数据

地球物理反演理论与应用 / (美) 日丹诺夫 (Michael S. Zhdanov) 著; 底青云等译. —北京: 科学出版社, 2018.6

书名原文: Inverse Theory and Applications in Geophysics

ISBN 978-7-03-058104-4

I. ①地… II. ①日… ②底… III. ①地球物理反演—研究 IV. ①P31

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 134166 号

责任编辑: 张井飞 焦惠丛 / 责任校对: 张小霞

责任印制: 张 伟 / 封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京九州迅驰传媒文化有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2018 年 6 月第 一 版 开本: 787 × 1092 1/16

2018 年 6 月第一次印刷 印张: 33 3/4

字数: 760 000

定价: 268.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)



## 译者序

美国犹他大学的日丹诺夫教授是国际上著名的电磁学家，由他主编的 *Geophysical Electromagnetic Theory and Method* 被认为是目前世界上比较全面介绍电磁法勘探原理方法技术的专著之一。为了使科研人员、研究生、广大野外工作人员及初学者较方便地了解和学习这一专著的成果，译者有幸获准翻译了这部专著，并于 2015 年在科学出版社出版。日丹诺夫教授本人对译著的出版非常高兴，当面向译者提出继续翻译他的另一专著 *Inverse Theory and Applications in Geophysics* 的合作愿望。经过众多同行的努力，在以往翻译经验的基础上，这本译著终于出版了。译者相信，这一译著必将对我国电磁法在资源、环境和工程等领域中的应用起到指导作用，也必将有益地推动我国电磁法理论与应用研究的发展。

本书再版前言和前言由中国科学院地质与地球物理研究所薛国强研究员翻译，中国科学院地质与地球物理研究所底青云研究员校对；第 1 章和第 2 章由江苏大学曹清华博士翻译，中国科学院地质与地球物理研究所陈卫营博士后校对；第 3 章到第 7 章由底青云研究员翻译，美国犹他大学的蔡红柱博士校对；第 8 章到第 10 章由陈卫营博士后和西安西北有色物探总队有限公司郭文波教授级高工翻译，蔡红柱博士校对；第 11 章、12 章和 13 章分别由东华理工大学李锋平硕士研究生、中国科学院地质与地球物理研究所陈稳硕士研究生、张林波博士研究生翻译，由薛国强研究员和陈卫营博士后校对；第 14 章由薛国强研究员翻译，蔡红柱博士校对；第 15 章由中国科学院地质与地球物理研究所周楠楠副研究员翻译，陈卫营博士后校对；第 16 章和第 17 章由薛国强研究员翻译，蔡红柱博士校对；第 18 章、19 章和 20 章分别由李锋平硕士研究生、薛国强研究员、陈稳硕士研究生翻译，中国科学院地质与地球物理研究所孔祥儒研究员校对。全书由薛国强和底青云统稿。

本书得到国家重大科研装备研制项目“深部资源探测核心装备研发”（ZDYZZ2012-1-05）以及国家自然科学基金（41474095）的资助。本书还得到何继善院士和吉林大学殷长春教授的书面特别推荐以及科学出版社的大力支持，谨在此表示衷心感谢。

考虑到中文语言的通顺性，同时兼顾原著的本意，本书采取了逐句翻译和意译相

结合的方式,但由于译者水平有限,对原作者的思想理解不一定全面、正确,书中疏漏和不妥之处在所难免,恳请读者提出宝贵意见和建议。

译者

2017年7月20日于北京

译者序

Introduction to Chinese Edition

再版前言

前言

## 第一部分 反演理论介绍

第 1 章 科学与工程领域中的正反演问题	3
1.1 不同地球物理场的正反演问题公式化	3
1.1.1 重力场	6
1.1.2 磁场	7
1.1.3 电磁场	8
1.1.4 地震波场	11
1.2 反演解的存在性与唯一性	13
1.2.1 解的存在性	13
1.2.2 解的唯一性	13
1.2.3 实际唯一性	17
1.3 反演解的不稳定性	18
参考文献	20
第 2 章 不适定问题及相关解法	22
2.1 地球物理学研究方法中的灵敏度与分辨率	22
2.1.1 反演问题中一般数学空间的公式	22
2.1.2 灵敏度	23
2.1.3 分辨率	23
2.2 适定与不适定问题的公式化	24
2.2.1 适定问题	24
2.2.2 有条件的适定问题	25
2.2.3 不适定问题的拟解	26
2.3 反演解正则化方法的基础	27
2.3.1 比较运算符	27

2.3.2	稳定泛函	29
2.3.3	吉洪诺夫参数泛函	31
2.4	稳定泛函族	33
2.4.1	回顾稳定泛函	33
2.4.2	伪二次函数形式下稳定泛函的表现形式	37
2.5	正则化参数的定义	39
2.5.1	最优正则化参数选择	39
2.5.2	正则化参数选取的 $L$ 曲线法	41
	参考文献	41

## 第二部分 反演问题的求解方法

第3章	离散线性反问题	45
3.1	线性最小二乘反问题	45
3.1.1	离散线性反问题	45
3.1.2	线性系统及其通解	46
3.1.3	数据分辨矩阵	47
3.2	纯欠定问题的解	48
3.2.1	欠定线性方程组	48
3.2.2	模型分辨矩阵	49
3.3	加权最小二乘法	50
3.4	概率论在线性反问题中的应用	51
3.4.1	概率论基础	51
3.4.2	最大似然估计法	52
3.4.3	$\chi^2$ 拟合	54
3.5	正则化方法	55
3.5.1	吉洪诺夫正则化	55
3.5.2	兰乔斯谱分解方法在求解正则化线性反问题中的应用	56
3.5.3	综合灵敏度	57
3.5.4	模型参数和数据的权矩阵	58
3.5.5	可控灵敏度	59
3.5.6	线性反问题的正则化逼近解	60
3.5.7	利文贝格-马奎特法	61
3.5.8	后验估计极大值方法(贝叶斯估计)	62
3.6	贝克斯-吉尔伯特方法	64
3.6.1	数据分辨矩阵	64
3.6.2	扩散函数	66

3.6.3 贝克斯-吉尔伯特方法的正则化解	67
参考文献	68
<b>第 4 章 线性反问题的迭代解法</b>	<b>70</b>
4.1 线性算子方程组及其迭代解法	70
4.1.1 线性反问题和欧拉方程	70
4.1.2 最小残差法	71
4.1.3 线性反问题的最小残差解	76
4.2 广义最小残差法	78
4.2.1 克雷洛夫子空间算法	78
4.2.2 兰乔斯最小残差方法	79
4.2.3 广义最小残差法	83
4.2.4 用广义最小残差方法解线性反问题	86
4.3 线性反问题中的正则化方法	87
4.3.1 吉洪诺夫参数化泛函的欧拉方程	87
4.3.2 欧拉方程的最小残差解	88
4.3.3 参数化泛函欧拉方程的广义最小残差解法	90
参考文献	92
<b>第 5 章 非线性反演技术</b>	<b>93</b>
5.1 梯度法	93
5.1.1 最速下降法	93
5.1.2 牛顿法	100
5.1.3 共轭梯度法	104
5.2 非线性反演问题中的正则化梯度法	108
5.2.1 正则化的最速下降法	108
5.2.2 正则化牛顿法	110
5.2.3 非线性反演问题的近似正则化解	111
5.2.4 正则化预条件最速下降法	112
5.2.5 正则化的共轭梯度法	112
5.3 非线性离散反演问题的正则化解	113
5.3.1 非线性最小二乘反演	113
5.3.2 非线性正则化最小二乘反演的最速下降法	114
5.3.3 非线性正则化最小二乘反演的牛顿法	115
5.3.4 非线性正则化最小二乘反演的牛顿法的数值算法	115
5.3.5 非线性正则化最小二乘反演的共轭梯度法	116
5.3.6 非线性最小二乘反演共轭梯度法的数值算法	117
5.3.7 复数欧几里得空间中的非线性最小二乘反演	118



5.4	共轭梯度再加权法最优化	119
5.4.1	含伪二次函数稳定器的吉洪诺夫参数泛函	119
5.4.2	再加权共轭梯度法	121
5.4.3	加权模型空间的最小化	123
5.4.4	加权模型空间中的 RRCG 方法	124
5.4.5	对数模型空间反演	128
	参考文献	129
<b>第 6 章</b>	<b>多元反演</b>	<b>131</b>
6.1	水平集方法	131
6.1.1	形状重建反演问题	131
6.1.2	演化方程	133
6.1.3	水平集反演的正则化	135
6.2	多元反演	136
6.2.1	利用多元函数表示模型参数	136
6.2.2	多元反演的连续参数化	137
6.2.3	转换模型参数空间的正则化共轭梯度反演	139
	参考文献	141
<b>第 7 章</b>	<b>正则化地球物理反演的分辨率分析</b>	<b>142</b>
7.1	线性反演问题的分辨率	142
7.2	分辨率密度	143
7.3	非线性反演的分辨率	145
7.4	利用 SLDM 方法求取分辨率密度	146
	参考文献	147
<b>第 8 章</b>	<b>蒙特卡罗法</b>	<b>149</b>
8.1	随机搜索方法	150
8.1.1	抽样法	150
8.1.2	Metropolis 算法	150
8.2	模拟退火法	151
8.2.1	退火过程	151
8.2.2	模拟退火法	152
8.3	遗传算法	153
8.3.1	搜索子空间的选择以及初始种群与个体的创建	153
8.3.2	选择中间种群	153
8.3.3	交换和变异	154
8.3.4	收敛和终止条件	155
	参考文献	155

第 9 章 多元数据的广义联合反演 .....	158
9.1 基于不同模型参数间泛函关系的联合反演 .....	158
9.2 交叉梯度法 .....	162
9.3 基于格拉姆约束的联合反演 .....	163
9.3.1 模型参数的格拉姆空间 .....	163
9.3.2 模型参数梯度的格拉姆空间 .....	164
9.3.3 模型参数不同变换形式的格拉姆空间 .....	165
9.3.4 带有格拉姆稳定因子的多数据集的联合正则化反演 .....	166
9.3.5 模型研究 .....	168
参考文献 .....	171

### 第三部分 势场反演

第 10 章 二维重力场和磁场的积分表示 .....	177
10.1 重力场和磁场的基本方程 .....	177
10.1.1 三维空间中的重力场和磁场 .....	177
10.1.2 重力场和磁场的二维模型 .....	178
10.2 基于复变函数理论的势场积分表示 .....	180
10.2.1 平面势场的复强度 .....	180
10.2.2 重力场的复强度 .....	182
10.2.3 磁场的复强度和势 .....	182
10.3 二维重力场反演的梯度法 .....	183
10.3.1 重力反演中误差泛函最小化的最速下降法 .....	183
10.3.2 重加权共轭梯度法的应用 .....	185
10.4 二维重力场的偏移 .....	187
10.4.1 重力场伴随矩阵的物理意义 .....	187
10.4.2 反演问题中的重力场偏移 .....	190
10.4.3 重力场偏移的迭代 .....	191
10.5 二维磁异常反演的梯度法 .....	193
10.5.1 磁势反演 .....	193
10.5.2 磁势偏移 .....	194
参考文献 .....	195
第 11 章 三维重力、重力张量和总磁场强度数据的偏移成像 .....	196
11.1 重力梯度测量数据 .....	196
11.2 三维重力及重力梯度测量数据的偏移成像 .....	198
11.2.1 重力和重力梯度反演的伴随算子 .....	198
11.2.2 三维重力场的伴随算子 .....	199

11.2.3	三维重力张量场伴随算子	200
11.3	基于偏移的快速密度成像	201
11.3.1	快速反演成像的原理	201
11.3.2	重力和重力张量场偏移以及三维密度成像	202
11.3.3	三维重力场的综合灵敏度	203
11.3.4	三维重力张量场的综合灵敏度	205
11.4	总磁场强度数据的偏移	207
11.4.1	总磁场强度的伴随算子	208
11.4.2	总磁场强度的偏移	209
11.4.3	总磁场强度的综合灵敏度	210
11.4.4	模型研究	211
	参考文献	212
<b>第 12 章</b>	<b>位势场正、反演的数值方法</b>	<b>214</b>
12.1	正演和反演中的数值方法	214
12.1.1	三维重力和重力张量数据正演算子的离散形式	214
12.1.2	三维磁场正演模拟算子的离散形式	215
12.1.3	二维正演模拟算子的离散形式	216
12.2	重力和重力张量数据的正则化反演	217
12.2.1	二维重力反演数值例子	217
12.2.2	合成重力梯度数据的三维反演	220
	参考文献	222

## 第四部分 电磁反演

<b>第 13 章</b>	<b>电磁学理论基础</b>	<b>225</b>
13.1	电磁场方程组	225
13.1.1	麦克斯韦方程组	225
13.1.2	均匀介质的场	226
13.1.3	边界条件	227
13.1.4	频率域场方程	227
13.1.5	似稳电磁场	231
13.1.6	波动方程	232
13.1.7	磁流和电流的场方程	232
13.1.8	静态电磁场	233
13.1.9	二维非均匀介质内的场和 $E$ 与 $H$ 极化	234
13.2	电磁场能流	236
13.2.1	辐射条件	236

13.2.2	时间域坡印亭定理	237
13.2.3	时间域能量不等式	238
13.2.4	频率域坡印亭定理	239
13.3	电磁场方程解的唯一性定理	241
13.3.1	边界值问题	241
13.3.2	无界域的唯一性定理	241
13.4	电磁场的格林张量	242
13.4.1	频率域格林张量	242
13.4.2	洛伦兹引理与互易关系	243
13.4.3	时域格林张量	245
	参考文献	246
第 14 章	电磁正演模拟中的积分表示	247
14.1	积分方程法	247
14.1.1	电磁场中的背景场(正常场)和异常场	247
14.1.2	异常场的坡印亭定理和能量不等式	248
14.1.3	二维积分方程法	249
14.1.4	电磁场二维模型的一阶变分(弗雷歇导数)计算	251
14.1.5	三维积分方程法	253
14.1.6	电磁场三维模型的一阶变分(弗雷歇导数)计算	254
14.1.7	计算弗雷歇导数的不同方法	256
14.2	电磁场的线性和非线性积分近似族	257
14.2.1	玻恩和玻恩扩展近似	258
14.2.2	拟线性近似和张量拟线性方程	259
14.2.3	三维电磁场的拟解析解	260
14.2.4	二维电磁场的拟解析解	262
14.2.5	局部非线性近似	263
14.2.6	局部拟线性近似	264
14.3	高阶线性和非线性近似	266
14.3.1	玻恩级数	266
14.3.2	收敛格林算子	267
14.3.3	收敛玻恩级数	269
14.3.4	收敛格林算子的拟线性近似	270
14.3.5	拟线性级数	271
14.3.6	一阶和高阶拟线性近似的精确估计	272
14.3.7	拟解析级数	274
14.4	数值拟合中的积分表示	275

14.4.1	模型参数的离散化	275
14.4.2	电磁场离散的伽辽金法	277
14.4.3	基于矩形基函数的电磁积分方程离散	278
14.4.4	收敛积分方程 (CIE) 法	281
14.4.5	收敛积分方程作为预条件的传统积分方程法	282
14.4.6	玻恩近似的矩阵形式	283
14.4.7	拟线性近似的矩阵形式	284
14.4.8	拟解析近似的矩阵形式	285
14.4.9	对角化拟解析 (DQA) 近似	286
	参考文献	288
<b>第 15 章</b>	<b>电磁反演的积分表示</b>	<b>291</b>
15.1	线性反演方法	292
15.1.1	过载 (异常) 电流反演	292
15.1.2	伯恩反演	293
15.1.3	玻恩近似实现电导率成像	294
15.1.4	迭代玻恩反演	297
15.2	非线性反演	299
15.2.1	非线性反演公式	299
15.2.2	弗雷歇导数计算	299
15.3	拟线性反演	301
15.3.1	拟线性反演原理	301
15.3.2	拟线性反演的矩阵表示	301
15.4	拟解析反演	305
15.4.1	弗雷歇导数的计算	305
15.4.2	拟解析反演	306
	参考文献	308
<b>第 16 章</b>	<b>电磁偏移成像</b>	<b>310</b>
16.1	频率域电磁偏移	310
16.1.1	基于能流泛函最小化的电磁法反演	310
16.1.2	电磁偏移场的积分表达	313
16.1.3	能流泛函的梯度方向	314
16.1.4	频率域偏移成像	315
16.1.5	迭代偏移	319
16.2	时间域偏移电磁	320
16.2.1	作为求解边值问题解的时间域电磁偏移	320
16.2.2	剩余电磁场能流的极小化	324

16.2.3	时间域能流泛函的梯度方向 .....	325
16.2.4	时间域偏移成像 .....	327
16.2.5	时间域迭代偏移 .....	329
	参考文献 .....	330
<b>第 17 章</b>	<b>电磁法正反演中的微分方程法 .....</b>	<b>332</b>
17.1	边值问题的电磁法正演模拟 .....	332
17.1.1	场方程和边界条件 .....	332
17.1.2	各向异性介质中异常场的公式化 .....	335
17.1.3	电磁势方程和边界条件 .....	336
17.2	边值问题的有限差分近似 .....	337
17.2.1	利用交错网格离散化麦克斯韦方程组 .....	338
17.2.2	利用平衡法离散化二阶微分方程 .....	340
17.2.3	电磁势微分方程的离散化 .....	343
17.2.4	利用频谱兰乔斯分解法求解离散电磁场方程组的线性系统 .....	346
17.3	边值问题的有限元解法 .....	347
17.3.1	伽辽金法 .....	347
17.3.2	精确单元法 .....	350
17.3.3	矢量有限元法 .....	351
17.4	基于微分方程法的反演 .....	354
17.4.1	离散网络上反问题的公式化 .....	354
17.4.2	利用有限差分法计算弗雷歇导数 .....	355
	参考文献 .....	356
<b>第 18 章</b>	<b>波场方程 .....</b>	<b>360</b>
18.1	弹性波的基本方程 .....	360
18.1.1	弹性体的变形、形变和应力张量 .....	360
18.1.2	胡克定律 .....	363
18.1.3	均匀各向同性介质的弹性理论动态方程 .....	363
18.1.4	纵波和横波 .....	365
18.1.5	声波和标量波动方程 .....	367
18.1.6	声波方程解的高频近似 .....	368
18.2	波场方程的格林函数解 .....	369
18.2.1	标量波动方程和相应的亥姆霍兹方程的格林函数解 .....	369
18.2.2	格林函数的高频近似 .....	372
18.2.3	矢量波动方程的格林张量 .....	373
18.2.4	拉梅方程的格林张量 .....	374
18.3	基尔霍夫积分公式及其类似 .....	375

18.3.1	基尔霍夫积分公式	375
18.3.2	拉梅方程的广义基尔霍夫积分公式和矢量波场方程	377
18.4	波场方程解的唯一性	380
18.4.1	初始值问题	380
18.4.2	能量守恒定律	381
18.4.3	初值问题解的唯一性	383
18.4.4	索末菲辐射条件	385
18.4.5	基于辐射条件的波传播问题解的唯一性	387
18.4.6	无界域基尔霍夫公式	390
18.4.7	弹性波的辐射条件	393
	参考文献	395
第 19 章	波场理论的积分表达式	397
19.1	声波场分析中的积分方程法	397
19.1.1	声波场入射和散射(背景和异常)部分的分离	397
19.1.2	声波场的积分方程	399
19.1.3	互易定理	400
19.1.4	声学波场一阶变分(弗雷歇导数)的计算	400
19.2	声波场的积分逼近	402
19.2.1	玻恩近似	402
19.2.2	拟线性近似	402
19.2.3	拟解析近似	403
19.2.4	局部拟线性近似	404
19.2.5	基尔霍夫近似	405
19.3	矢量波场分析的积分方程法	407
19.3.1	矢量场分离	407
19.3.2	矢量波场的积分方程方法	408
19.3.3	矢量波场一阶变分(弗雷歇导数)的计算	409
19.4	矢量波场的积分近似	410
19.4.1	玻恩型近似	410
19.4.2	拟线性近似	410
19.4.3	矢量波场的拟解析解	411
19.4.4	局部拟线性近似	412
	参考文献	413
第 20 章	全波形反演的积分表示	415
20.1	线性反演方法	415
20.1.1	声场和矢量波场的玻恩反演	416

20.1.2	基于玻恩近似的波场成像	417
20.1.3	波场的迭代玻恩反演	421
20.1.4	布莱斯通反演	421
20.1.5	基尔霍夫近似反演	433
20.1.6	旅行时反演问题	436
20.2	拟线性反演	437
20.2.1	声波场的拟线性反演	437
20.2.2	基于布莱斯通方法的局部拟线性反演	438
20.3	非线性反演	440
20.3.1	非线性全波形反演问题原理	440
20.3.2	全波形反演问题的弗雷歇导数算子	441
20.4	波场偏移原理	443
20.4.1	偏移的几何模型	443
20.4.2	逆时波动方程偏移的基尔霍夫积分公式	444
20.4.3	瑞利积分	446
20.4.4	谱域偏移(斯托尔特法)	449
20.4.5	谱偏移算法和积分偏移算法的等价性	451
20.4.6	反演与偏移对比	452
20.5	弹性场的全波形反演	452
20.5.1	弹性场反演问题的公式化	453
20.5.2	弹性正演模拟算子的弗雷歇导数	454
20.5.3	伴随弗雷歇导数算子与逆时传播弹性场	455
	参考文献	459
附录 A	地球物理模型和数据的函数空间	462
A.1	欧几里得空间	462
A.1.1	欧几里得空间中的向量运算	462
A.1.2	欧几里得空间中的线性变换(算子)	464
A.1.3	算子的范数	464
A.1.4	线性泛函	466
A.1.5	泛函的范数	466
A.2	尺度空间	466
A.2.1	尺度空间的定义	466
A.2.2	收敛,柯西序列和完整性	467
A.3	线性向量空间	468
A.3.1	向量运算	468



A.3.2	范数线性空间 .....	469
A.4	希尔伯特空间 .....	470
A.4.1	内积 .....	470
A.4.2	希尔伯特空间中的近似问题 .....	473
A.5	复数欧几里得空间和希尔伯特空间 .....	474
A.5.1	复数欧几里得空间 .....	474
A.5.2	复数希尔伯特空间 .....	474
A.6	线性矢量空间的实例 .....	475
A.7	格拉姆空间及其属性 .....	477
A.7.1	引入一个格拉姆空间 .....	477
A.7.2	梯度的格拉姆空间 .....	479
A.7.3	函数不同变换的格拉姆空间 .....	480
A.7.4	格拉姆稳定泛函 .....	481
A.7.5	格拉姆稳定器一阶变分的计算 .....	482
A.7.6	计算由模型参数的一组梯度的格拉姆形成的稳定函数的一阶变分 .....	482
A.7.7	计算由变换模型参数格拉姆形成的稳定泛函的一阶变分 .....	483
附录 B	模型和数据空间的算子 .....	485
B.1	泛函空间里的算子 .....	485
B.2	线性算子 .....	486
B.3	逆算子 .....	487
B.4	地球物理数据希尔伯特空间的一些近似问题 .....	487
B.5	格拉姆-施密特规范正交化过程 .....	490
附录 C	地球物理模型中的泛函 .....	491
C.1	泛函及其规范 .....	491
C.2	里斯表示定理 .....	491
C.3	地球物理数据和反演问题的泛函表示 .....	492
附录 D	线性算子和泛函之再探讨 .....	495
D.1	伴随算子 .....	495
D.2	算子与泛函的微分 .....	497
D.3	变分学概念 .....	498
D.3.1	变分算子 .....	498
D.3.2	泛函的极值问题 .....	499
附录 E	矩阵代数中的一些公式和法则 .....	502
E.1	算子和矩阵的一些公式和法则 .....	502
E.2	特征值和特征向量 .....	502
E.3	对称矩阵的谱分解 .....	503