有道考神

权威 · 具体 · 实用 · 高效

考研数学
真题与分类解析

2009—2018

（含数一、数二、数三）

有道考神研发中心 编

刘金峰 主编

每年三套卷，分类大汇编，考试范围内，题目必做全。

数三做一二，数二做一三，数一不挑剔，三卷全做完。

标注难度值，规律自体现，真题不浪费，高分在眼前！

中国石化出版社

HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

教·育·出·版·中·心

有道考神

权威 · 具体 · 实用 · 高效

考研数学真题与分类解析

2009—2018

（含数一、数二、数三）

有道考神研发中心 编

刘金峰 主编

中国石化出版社

HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

教·育·出·版·中·心

图书在版编目（CIP）数据

考研数学真题与分类解析：2009—2018/有道考神研发中心编．—北京：中国石化出版社，2018.6

ISBN 978-7-5114-4896-5

Ⅰ.①考… Ⅱ.①有… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 105761 号

中国石化出版社出版发行

地址：北京市朝阳区吉市口路 9 号

邮编：100020　电话：(010) 59964500

发行部电话：(010) 59964526

http://www.sinopec-press.com

E-mail：press@sinopec.com

北京科信印刷有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

787×1092 毫米 16 开本 25 印张 635 千字

2018 年 6 月第 1 版　2018 年 6 月第 1 次印刷

定价：58.00 元

前言

从2009年考研数学新大纲颁布以来，考研数学考试大纲几乎没有变化，命题风格也基本一致：重视基础、淡化技巧、加强学科内知识的综合考查。近些年积累下来的历年真题也就成为考生在走进考场之前检验自己复习效果的最佳素材。考生在使用这些真题时，要注意以下三点：

第一，这些真题应该在考生复习完全部的考试内容，并感觉自己对知识体系基本上了然于胸之后再使用。考生可以把每一份试卷都当作自己今年即将面对的那份试卷，模拟自己“多次进考场”。每做一份试卷，考生都要进行查缺补漏，总结答题技巧，做好充分准备之后，再做下一份试卷。这样才是对近些年真题的最合理的首次利用，而不是在复习基础知识时就被用作练习题而浪费掉。

第二，市面上的诸多复习资料中，往往会夹杂着近些年的真题，以示这本复习资料的“时效性”和“全面性”。考生在使用这些资料时，如果题目有标注是近年真题的，应该有意识地避开，用其他习题来训练该知识点。否则，考生在用近年真题作为模拟考试的时候，就无法检验到真实水平，甚至得到真题较为容易的假象，从而疏忽了一些应该进一步查缺补漏的知识点，一旦考生真正到了考场上，原形毕露时悔之晚矣。

第三，不同数类（数学一、数学二、数学三，数学农学可参考数学三）的考生，在模拟考场的状态下，按套卷做近年真题时，可以只做自己所考数类的试卷，但是，在做完套卷之后总结梳理时，应该把同年的其他数类的试卷中属于自己所考数类范围内的题目同样做好。这样的话，每年试卷中可以充分利用的题目，数学一的考生可以有50道题左右，数学二的考生可以有40道题左右，数学三的考生可以有45道题目左右，差不多又能多出“一套真题”。这些题目与自己数类所考题目具有同等重要的价值，比市面上的任何模拟卷中的题目都更为重要，考生务必重视这一点。

基于以上三个方面，本书收录了自2009年以来的数学一、数学二、数学三的所有真题，并分两大部分：试题与答案速查，试题分类解析。

“试题与答案速查”部分供考生在模拟考场训练时按套卷来做，并提供了答案速查。

“试题分类解析”部分主要有以下三个方面的内容：

第一，本书将每一年的三份试卷的题目合并去重，并按题型考点进行分类整理。除了最近一年的真题，因教育部尚未公布《考试分析》以至无法获得相关数据以外，其他年份的每个题目均标注上了实际考试中统计出来的“难度值”，方便考生了解该题在实考中的难易度。试题难度是反映试题难易程度的指标，它是考生在该题上的得分率，即

考生在该题上的平均得分与该题满分之比，例如难度为0.666，说明该题目有66.6%的考生得分，或者考生平均获得了66.6%的分数。难度系数与题目难度成反比，同一题目相对于不同的考生群体，其难度值是不同的，题目难度依赖于考生样本。

第二，每个题目均标注了该题对不同数类的考生来说是否要求掌握，方便考生在做完套卷之后进行总结梳理时，把其他数类试题中属于自己考点的题目也一并做好，充分利用宝贵的真题资源，省去了考生自己筛选真题的麻烦。

第三，每个题目都给出了一些通用的思路解法，淡化技巧，考生更容易掌握，并用于实际考试中去。每年的真题试卷中都有120分左右的基础题和中档题，这些题目涉及的考点相对较为常规，利用这些通用思路方法很容易快速解决。试卷中其余的30分左右的难题，更需要利用这些通用思路方法去有效地分析求解，这也符合考研数学重视基础的命题风格。

考生可关注新浪微博@有道考神金峰老师，由于时间有限，关于本书中的疏漏之处，欢迎大家随时指正，在此表示感谢。

最后，祝所有考生学习顺利，考研成功！

刘金峰

2018年5月20于北京

目 录

〖试题与答案速查〗

〖试题分类解析〗

2009 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题

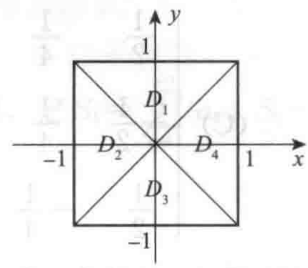
一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求．

(1) 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小量，则(　　)

(A) $a=1$，$b=-\dfrac{1}{6}$.　　(B) $a=1$，$b=\dfrac{1}{6}$.

(C) $a=-1$，$b=-\dfrac{1}{6}$.　　(D) $a=-1$，$b=\dfrac{1}{6}$.

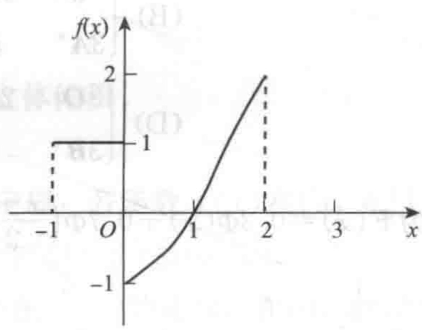
(2) 如右图，正方形 $\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$，$I_k=\iint\limits_{D_k} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=$ (　　)

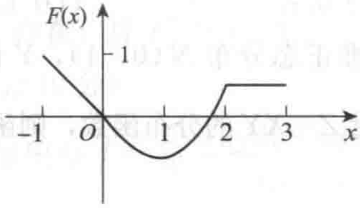


(A) I_1.　　(B) I_2.

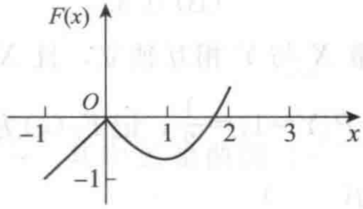
(C) I_3.　　(D) I_4.

(3) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如图所示，则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为 (　　)

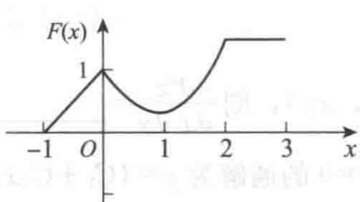




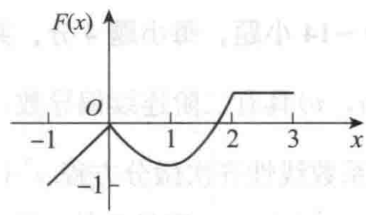
(A).



(B).



(C).



(D).

(4) 设有两个数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则(　　)

(A) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 收敛．　(B) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 发散．

(C) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2$ 收敛．　(D) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2b_n^2$ 发散．

(5) 设$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基，则由基$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$，$\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$.

(6) 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，若$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$的伴随矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{B}^*\\2\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{B}^*\\3\boldsymbol{A}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&3\boldsymbol{A}^*\\2\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&2\boldsymbol{A}^*\\3\boldsymbol{B}^*&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

(7) 设随机变量 X 的分布函数为$F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布的分布函数，则$EX=$(　　)

(A) 0.　(B) 0.3.　(C) 0.7.　(D) 1.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$，Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，记$F_Z(z)$为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数$F_Z(z)$的间断点个数为(　　)

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．

(9) 设函数 $f(u,v)$具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$________.

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$，则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2$，$y'(0)=0$ 的解为 $y=$________.

(11) 已知曲线 L：$y=x^2(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$，则 $\int_L x\mathrm{d}s=$ ________.

(12) 设 $\Omega=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ________.

(13) 若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为 ________.

(14) 设 X_1，X_2，…，X_m 为来自二项分布总体 $B(n,\ p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，则 $k=$ ________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 9 分）

求二元函数 $f(x,\ y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值。

(16)（本题满分 9 分）

设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 所围成区域的面积，记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$，求 S_1 与 S_2 的值。

(17)（本题满分 11 分）

椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成，圆锥面 S_2 是过点 $(4,\ 0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成。

（Ⅰ）求 S_1 及 S_2 的方程；

（Ⅱ）求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

(18)（本题满分 11 分）

（Ⅰ）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 可导，则存在 $\xi\in(a,\ b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

（Ⅱ）证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\ \delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

(19)（本题满分 10 分）

计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

(20)（本题满分 11 分）

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

(Ⅰ)求满足 $A\xi_2=\xi_1$，$A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2，ξ_3；

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 ξ_2，ξ_3，证明 ξ_1，ξ_2，ξ_3 线性无关．

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值．

(22)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红色球，2 个黑色球与 3 个白球，现有回放地从袋中取两次，每次取一球，以 X，Y，Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数．

(Ⅰ)求 $P\{X=1|Z=0\}$；

(Ⅱ)求二维随机变量(X, Y)概率分布．

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中参数 $\lambda(\lambda>0)$未知，X_1，X_2，…，X_n 是来自总体 X 的简单随机样本．

(Ⅰ)求参数 λ 的矩估计量；

(Ⅱ)求参数 λ 的最大似然估计量．

答案速查

一、选择题

(1) A　(2) A　(3) D　(4) C　(5) A　(6) B　(7) C　(8) B

二、填空题

(9) $xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$　(10) $x(1-e^x)+2$　(11) $\frac{13}{6}$　(12) $\frac{4}{15}\pi$　(13) 2　(14) -1

三、解答题

(15) $f(x,\ y)$的极小值为$f\left(0,\ \frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

(16) $S_1=\frac{1}{2}$；$S_2=1-\ln 2$.

(17) (Ⅰ)S_1 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{3}=1$；$S_2$ 的方程为$(x-4)^2-4y^2-4z^2=0$.　(Ⅱ)π.

(18) (Ⅰ)略；(Ⅱ)略.

(19) 4π.

(20) (Ⅰ)$\xi_2=k_1(-1,\ 1,\ -2)^T+(0,\ 0,\ 1)^T$，其中 k_1 为任意常数；

$\xi_3=k_2(-1,\ 1,\ 0)^T+k_3(0,\ 0,\ 1)^T+\left(-\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right)^T$，其中 k_2，k_3 为任意常数；

(Ⅱ)略.

(21) (Ⅰ)$\lambda_1=a-2$，$\lambda_2=a$，$\lambda_3=a+1$；(Ⅱ)$a=2$.

(22) (Ⅰ)$\frac{4}{9}$；(Ⅱ)

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

(23) (Ⅰ)$\hat{\lambda}_M=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$；(Ⅱ)$\hat{\lambda}_L=\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}$.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试
数学二试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求．

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 无穷多个．

(2) 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则(　　)

(A) $a=1$，$b=-\dfrac{1}{6}$.　　(B) $a=1$，$b=\dfrac{1}{6}$.

(C) $a=-1$，$b=-\dfrac{1}{6}$.　　(D) $a=-1$，$b=\dfrac{1}{6}$.

(3) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，则点 $(0,0)$(　　)

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点．　　(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点．

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点．　　(D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点．

(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{4-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$ (　　)

(A) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_1^{4-x}f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_1^2\mathrm{d}x\int_x^{4-x}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_1^{4-y}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^2 f(x,y)\mathrm{d}x$.

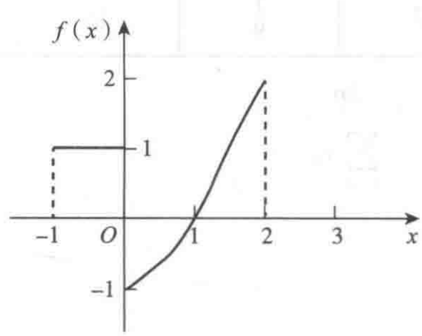
(5) 若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 上的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内(　　)

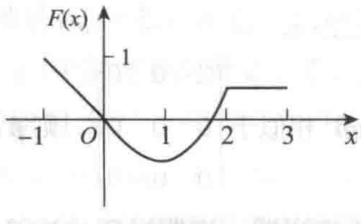
(A) 有极值点，无零点．　　(B) 无极值点，有零点．

(C) 有极值点，有零点．　　(D) 无极值点，无零点．

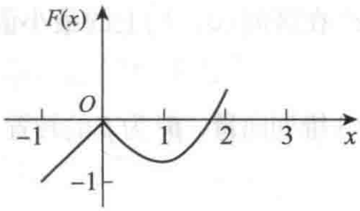
(6) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如图所示，则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为

(　　)

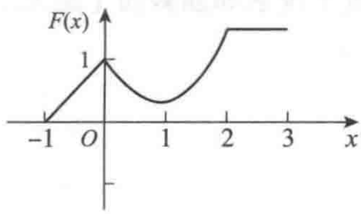




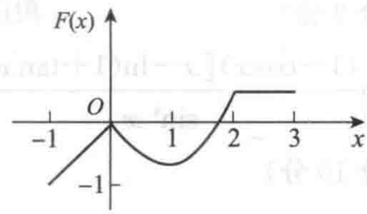
(A).



(B).



(C).



(D).

(7) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 A，B 的伴随矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为(　　)

(A) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.

(8) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{P}$ 均为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{P}$ 的转置矩阵，且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. 若 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，$Q=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}$ 为(　　)

(A) $\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．

(9) 曲线 $\begin{cases}x=\int_0^{1-t} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\\ y=t^2\ln(2-t^2)\end{cases}$ 在(0，0)处的切线方程为________.

(10) 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{k|x|}\,\mathrm{d}x=1$，则 $k=$________.

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\sin nx\,\mathrm{d}x=$________.

(12) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+\mathrm{e}^y=x+1$ 确定的隐函数，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$________.

(13) 函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为________.

(14) 设 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为3维列向量，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置．若矩阵 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$________.

三、解答题：15～23小题，共94分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分9分）

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

(16)（本题满分10分）

计算不定积分 $\int\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\ (x>0)$.

(17)（本题满分10分）

设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(18)（本题满分10分）

设非负函数 $y=y(x)(x\geqslant0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$，当曲线 $y=y(x)$ 过原点时，其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域 D 的面积为2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积．

(19)（本题满分10分）

计算二重积分 $\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant2,\ y\geqslant x\}$.

(20)（本题满分12分）

设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过 $\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt2},\dfrac{\pi}{\sqrt2}\right)$ 的光滑曲线．当 $-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的法线都过原点；当 $0\leqslant x<\pi$ 时，函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$. 求 $y(x)$ 的表达式．

(21)（本题满分11分）

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(Ⅱ)证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f'_+(0)$ 存在，且 $f'_+(0)=A$.

(22)（本题满分11分）

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

(Ⅰ)求满足 $\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$；

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$，证明 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 线性无关.

(23) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

(Ⅰ)求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

(Ⅱ)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

答案速查

一、选择题

(1) C　(2) A　(3) D　(4) C　(5) B　(6) D　(7) B　(8) A

二、填空题

(9) $y=2x$　(10) -2　(11) 0　(12) -3　(13) $e^{-\frac{2}{e}}$　(14) 2

三、解答题

(15) $\frac{1}{4}$.

(16) $x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})-\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}+C.$

(17) $dz=(f'_1+f'_2+yf'_3)dx+(f'_1-f'_2+xf'_3)dy$;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_3+f''_{11}-f''_{22}+xyf''_{33}+(x+y)f''_{13}+(x-y)f''_{23}.$

(18) $\frac{17}{6}\pi$.

(19) $-\frac{8}{3}$.

(20) $y(x)=\begin{cases}\sqrt{\pi^2-x^2}, & -\pi<x<0,\\ \pi\cos x+\sin x-x, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

(21) (Ⅰ)略；(Ⅱ)略．

(22) (Ⅰ)$\xi_2=k_1(-1,1,-2)^T+(0,0,1)^T$，其中 k_1 为任意常数；

$\xi_3=k_2(-1,1,0)^T+k_3(0,0,1)^T+\left(-\frac{1}{2},0,0\right)^T$，其中 k_2，k_3 为任意常数；

(Ⅱ)略．

(23) (Ⅰ)$\lambda_1=a-2$，$\lambda_2=a$，$\lambda_3=a+1$；(Ⅱ)$a=2$.