MATHEMATICS

高等数学

学习与提高

主　编　刘瑞芹　王　清　文小艳

副主编　刘　艳　王　昕　许　璐　韩元良

参　编　苗文静　高艳辉　张晓瑾

主　审　魏丽侠

北京航空航天大学出版社

BEIHANG UNIVERSITY PRESS

高等数学学习与提高

主　编　刘瑞芹　王　清　文小艳

副主编　刘　艳　王　昕　许　璐　韩元良

参　编　苗文静　高艳辉　张晓瑾

主　审　魏丽侠

北京航空航天大学出版社

内容简介

《高等数学学习与提高》在参考本科教学大纲和研究生入学考试大纲，总结一线教师多年教学经验的基础上，按章节以知识点为主线进行编排。全书共12章，内容包括：函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。每章包括知识结构图、疑难问题解答、典型例题分析、应用与提高四个模块的内容，从新的高度对高等数学知识给出了很好的诠释。

本书可作为理工类院校非数学专业学生学习高等数学的辅助教材，也可作为考研复习的指导用书，同时也可供高等院校相关课程的教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习与提高 / 刘瑞芹，王清，文小艳主编
. -- 北京 ：北京航空航天大学出版社，2018.5
ISBN 978-7-5124-2692-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… ②王… ③文… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第057117号

高等数学学习与提高

主　编　刘瑞芹　王　清　文小艳
副主编　刘　艳　王　昕　许　璐　韩元良
参　编　苗文静　高艳辉　张晓瑾
主　审　魏丽侠
责任编辑　赵延永

*

北京航空航天大学出版社出版发行
北京市海淀区学院路37号(邮编100191)　http://www.buaapress.com.cn
发行部电话：(010)82317024　传真：(010)82328026
读者信箱：goodtextbook@126.com　邮购电话：(010)82316936
保定市中画美凯印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本：787×1 092　1/16　印张：17.25　字数：442千字
2018年5月第1版　2018年5月第1次印刷　印数：3 000册
ISBN 978-7-5124-2692-4　定价：45.00元

前　言

高等数学是理工类院校一门重要的通识必修课，不仅是学习后继课程的基础，更是将来从事理论和实际工作的必要基础。目前，数学已渗透到自然科学和社会科学的各个领域中，科学技术的发展对大学生数学能力的深度和广度提出了更高的要求。高等数学学时少内容多，如何帮助学生提高学习效率，进一步提高数学教学质量，培养学生良好的数学素质是摆在我们面前的严峻问题。数学教育工作者深感重任在肩，必须面对现实，采取适当措施，用科学的方法去解决在教学过程中所遇到的各种问题。

本科学生来自全国各省区，学生的数学基础参差不齐，亟需一本能够帮助他们学好高等数学的课后辅导书。社会上各种数学复习资料、辅导材料充斥市场，让学生们眼花缭乱，无所适从。为了正确引导学生学习高等数学，从繁复的深浅不一的复习资料中解放出来，我们几位长年在数学教学一线的教师认真地总结了多年的教学经验，汲取众多参考资料的营养，共同编撰了这本《高等数学学习与提高》，编写过程中力图做到"由浅入深、循序渐进"，注意突出重点、难点。

本书的结构是每章分四个模块帮助学生一步步学好高等数学。

① 知识结构图：每章的知识用结构图的形式给出了清晰的总结，起到提纲挈领的作用。

② 疑难问题解答：对学习过程中遇到的常见问题和疑难问题给出了解答，帮助同学深刻理解教材中的概念、理论和思想方法。

③ 典型例题分析：例题内容丰富、典型性强、覆盖面广，既有基础题，也有综合提高题。许多题目都有适当的分析过程，有些还给出了一题多解，可最大限度地满足各层次同学的需求。

④ 应用与提高：突出高等数学的应用性，渗透数学建模的思想和方法，是教材内容的延伸。提高部分选取了近年来的考研真题，为学生进一步深造打开一个新的窗口。

本书是教研项目"华北科技学院应用型人才培养模式下数学教育的改革与实践（HKJY201439）"的研究成果。第 1 章由苗文静编写；第 2 章由高艳辉编写；第 3 章由刘瑞芹编写；第 4 章由刘艳编写；第 5、6 章由许璐编写；第 7、8 章由文小艳编写；第 9 章由王昕编写；第 10 章由王清编写；第 11 章由韩元良编写；第 12 章由张晓瑾编写。全书由魏丽侠教授主审。

本书是大学生学习高等数学的一本理想参考资料，也是高校数学教师的趁手参考书。对于书中可能出现的纰漏与不足，恳请广大读者提出宝贵意见。

编　者

2018 年 1 月

目　录

第1章　函数与极限

1.1　知识结构图

- 函数与极限
  - 数列
    - $\varepsilon-N$ 定义
    - 极限的计算
    - 极限的性质：唯一性，有界性，保号性
  - 函数
    - 函数的极限
      - $\varepsilon-\delta$ 定义，$\varepsilon-X$ 定义
      - 四则运算，两个重要极限
      - 无穷大，无穷小
      - 极限存在准则
      - 唯一性，有界性，保号性
    - 函数的性质
      - 奇偶性，单调性，周期性，有界性
      - 连续性
        - 函数的间断点及其类型
        - 初等函数的连续性
        - 闭区间上连续函数的性质

1.2　疑难问题解答

1. 若数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都发散，则数列 $\{x_n+y_n\}$，$\{x_ny_n\}$ 也发散，对吗？

不对，例如 $x_n=n$，$y_n=-n$，则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都发散，但 $\{x_n+y_n\}$ 收敛.

$x_n=\begin{cases}n, & n\text{ 为奇数}\\ 0, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$，$y_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数}\\ n, & n\text{ 为偶数}\end{cases}$，那么数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都发散，但 $\{x_ny_n\}$ 收敛.

2. 为什么在极限的定义中，ε 要任意给定？

下面以当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是 A 来说明这个问题. 因为 ε 是描述函数 $f(x)$ 与常数 A 的接近程度的量，只有 ε 的任意性（无论它多么小），才能表明 $f(x)$ 与 A 的无限接近，又"给定"是指在通过 ε 找到 δ 的过程中，ε 是不变的常数. 因为只有 ε 暂时不变，才能通过分析 $|f(x)-A|<\varepsilon$，找到正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

3. 在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的定义中，δ 与 ε 是什么关系？

因为 $f(x)$ 是 x 的函数，当 x 与 x_0 无限接近时，$f(x)$ 才能与 A 无限接近，只有 x 与 x_0 接近到一定的程度，才能得证 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，而 δ 正是表述 x 与 x_0 接近程度的量. 一般来说，当 ε 变化时，δ 也变化；ε 愈小，δ 也愈小，但 δ 不是由 ε 唯一确定的. 因为若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，找到一个 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么对于所有小于 δ 的正数 δ_1，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，仍能证得 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，所以说 δ 不是唯一的，也

不必找到一个最大的 δ. 因此，在利用定义证明极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 时，常常将 $|f(x)-A|$ 适当放大，以便于通过 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 较容易找到 δ，这也是证明极限时常用的技巧.

4. 如何掌握不同极限过程中极限的定义?

一般课本中讲了 7 种极限过程：$n\to\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$，$x\to\infty$. 所谓极限过程，也就是自变量的变化趋势，如 $n\to\infty$ 是指自变量取正整数而无限增大的情况；$x\to-\infty$ 是指自变量取负实数而绝对值无限增大的情况；$x\to x_0$ 是指自变量取实数而无限接近 x_0 的情况；其余类似. 虽然自变量的变化过程不同，极限定义的表述略有差别，但它们的本质是相同的，那就是：设 $f(x)$ 是处在自变量 x 的某个变化过程中的函数，A 是一个常数，若对于任意给定的正数 ε，总存在一个时刻，使得这个时刻以后，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 在这个变化过程中的极限. 如：对于任意给定的正数 ε，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的时刻是指存在整数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$；极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的时刻是指存在正数 X，当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的时刻是指存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 掌握了不同极限过程的极限定义的实质，再表述各种极限过程中的极限定义就不难了.

5. 如何掌握用定义证明极限的方法?

在理解了极限定义的基础上，用极限定义验证极限时，要注意推理中的逻辑关系. 证明时一般用“正推”过程，即“如果……则……”，验证极限时用的是“反推”过程，即“要使……，只要……”. 下面以极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 为例说明证明步骤：

(1) 给定 $\varepsilon>0$.

(2) 写出 $|f(x)-A|$ 并整理化简，有时要适当放大，如 $|f(x)-A|\leqslant g(x)$. 所谓“适当”是指放大后当 $x\to x_0$ 时，$g(x)$ 仍能趋于零，也就是放大时 $g(x)$ 中要保留含有 $(x-x_0)$ 的固式，把其余的与 x 有关的固式适当放大. 为此，常常需要先假设 $0<|x-x_0|<\delta_1$，在此条件下，得到 $g(x)$；要使 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，只要 $g(x)<\varepsilon$，从中找出 $\delta_2>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，恒有 $g(x)<\varepsilon$ 成立，取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3) 结论：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

6. 函数极限与函数值有关系吗?

没关系. 极限是一种自变量变化时函数值的变化趋势，如 $x\to1$ 时，$\dfrac{x^2-1}{x-1}\to2$，但 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处是无意义的.

7. 关于函数的单侧极限、极限及极限不存在的几种情况.

利用极限的定义很容易证明：极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\to x_0}}f(x)$ 存在的充分必要条件是单侧极限 $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ x\to x_0^-}}f(x)$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\to x_0^+}}f(x)$ 都存在且相等. 在求函数的极限时，什么情况下需要求单侧极限呢?

(1) 若 x_0 是分段函数的分界点，且在 x_0 的左右两侧函数的表达式不一样，则求分界点

x_0 的极限时一定要先考察点 x_0 的左右极限是否存在，再确定极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在. 例：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\geqslant 1\\ 2-x, x<1\end{cases}$，若求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$，则需要先求左极限 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ 及右极限 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. 但是，并不是所有分段函数在分界点的极限都要求左右极限. 如，若 x_0 是分段函数的分界点，但在 x_0 的左右两侧表达式相同，且 $x\to x_0$ 时，x_0 的左右两侧 $f(x)$ 的变化趋势也一样，则不必求左右极限，可直接求极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. 例如，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$，若求 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$，则不必求 $x=0$ 处的左右极限，而直接求极限 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ 即可.

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 的左右两侧表达式相同，但当 $x\to x_0^-$ 及 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)$ 的变化趋势不同，则求极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 时需要考察左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 及右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，再确定极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在. 例如，$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 处，由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$，而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$，于是 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty$，所以需先考察 $x=0$ 处的左右极限. 本例中显然极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在，又如 $f(x)=\arctan x$，当 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 时，函数的变化趋势不同，即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$. 所以极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在. 类似的例子，如 $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccos} x$，$\lim\limits_{x\to\infty} e^x$ 也都不存在.

(3) 关于函数极限不存在的例子，常见的大致有以下几种情况：

① 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\to x_0}} f(x)$ 不存在是因为单侧极限 $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ x\to x_0^-}} f(x)$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\to x_0^+}} f(x)$ 至少有一个不存在或者都存在但不相等. 例子同以上(1)(2)中所述.

② 若在自变量的某个变化过程中，$f(x)$ 是无穷大量，则在该过程中极限 $\lim f(x)$ 不存在. 如极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$ 不存在.

③ 若自变量的某个变化过程中，函数的变化趋势是振荡不定导致函数与任何常数 A 都不能永远保持无限接近状态，则函数的极限不存在. 如极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin x$，$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x^2}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 其中 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2n}, n\text{ 为偶数}\\ \dfrac{1}{n}, n\text{ 为奇数}\end{cases}$，极限不存在，都属于这种情况.

8. 函数极限与数列极限的关系的应用举例.

函数极限与数列极限的关系是：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$（或$\infty$）的充分必要条件是对于任何以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$ $(x\neq x_0)$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$（或$\infty$）. 这里进一步举例说明它的应用.

(1) 利用函数极限求数列的极限. 如，已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{1}{n}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=1$. 以后讲了求极限的洛必达法则后，会有更多的应用.

(2) 证明函数的极限不存在. 如证明极限$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在，取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$y_n=\dfrac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，显然当 $n\to\infty$时，$x_n\to 0$，$y_n\to 0$. 而$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\cos 2n\pi=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{x_n}\neq\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{y_n}$，所以极限$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在.

(3) 证明 $f(x)$在区间 I 上无界. 常用的方法是：找出数列$\{x_n\}\subset I$，而$\{f(x_n)\}$为无穷大数列. 如证明在$(0,1]$上，$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$无界. 取数列 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，显然 $x_n\subset(0,1]$，而$f(x_n)=\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\to\infty(n\to\infty)$. 所以在$(0,1]$上，$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$无界.

(4) 证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq\infty$. 常用的方法是：找出一个数列 $x_n\to x_0(x_n\neq x_0)$，而$\{f(x_n)\}$ 收敛. 例如，证明当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$不是无穷大. 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，显然当 $n\to\infty$时，$x_n\to 0^+$，$x_n\neq 0$，而 $f(x_n)=2n\pi\sin 2n\pi=0$. 显然数列$\{f(x_n)\}$收敛于零，故当 $x\to 0^+$ 时 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$不是无穷大.

9. 无穷大与无界量有什么区别和联系?

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则根据无穷大的定义，对于任意给定的正数 M，有 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有$|f(x)|>M$，这表明对于 x_0 的去心 δ 邻域的一切点 x，都有$|f(x)|>M$. 设 $f(x)$在 x_0 的去心 δ 邻域无界，是指对于无论多么大的正数 M，都存在点 x_1 属于该邻域；而$|f(x_1)|>M$，这表明在 x_0 的去心 δ 邻域里可能出现$|f(x_1)|\leqslant M$ 的点 x_1. 对比上述定义可知，在自变量的同一个变化过程中，无穷大量一定是无界量，但无界量不一定是无穷大量. 例如，在$(0,1]$上，$\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$不是无穷大量.

10. 求和与差的极限时，为什么一般不能用等价无穷小代换?

当求两个无穷小之比的极限时，分子分母可以分别用与其等价的无穷小代换. 也就是说在代换时，必须将分子和分母的整体分别换成与它们各自等价的无穷小；但若分子(或分母)中的和(或差)中的某几项用与它们分别等价的无穷小做代换，则不能保证代换后的新的分子(或分母)与原来的分子(或分母)是等价无穷小. 例如，求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$时，若将 $\tan x$，$\sin x$ 均换成 x，则分子为零，显然与 $\tan x-\sin x$ 不等价，所以代换后得极限为零，结果是错误的. 正确的方法是：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\ \frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

这说明当 $x \to 0$ 时，$\tan x - \sin x$ 与 $\frac{1}{2}x^3$ 是等价的.

在求极限的过程中，乘除中的无穷小因子是可以用与其等价的无穷小代换的，读者可以练习利用极限的运算法则来证明.

11. 关于幂指数函数极限的求法.

所谓幂指数函数是指形如 $f(x)^{g(x)}$（$f(x)>0$）的函数，它的极限一般不能直接用极限的运算法则求出. 如重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ 就是幂指数函数的极限，但是能利用该重要极限来求的幂指数函数的极限是有一定的条件的，它应该是“1^∞”型的且容易化为 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left[1+\frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}$，即利用该重要极限 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left[1+\frac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)} = \lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = \mathrm{e}$. 对于更一般的幂指数函数的极限，常常利用指数对数恒等式将幂指数函数改写成指数函数的复合函数，即 $f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\ln f(x)^{g(x)}} = \mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$，再利用有关极限的运算法则求极限. 一般结论：若 $\lim f(x) = A > 0$，$\lim g(x) = B$，则 $\lim f(x)^{g(x)} = A^B$.

12. 刚开始学习极限运算时，易出现哪些错误？

以下几题的做法是否正确？对于错误的请指出错误的原因并改正.

(1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right) = \lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1-x} - \lim\limits_{x\to1}\frac{3}{1-x^3} = \infty - \infty = 0$.

解法错误. 原因是：错误运用了差的极限运算法则.

因为根据差的运算法则，必须两个函数的极限都存在才能运用. 而这里极限 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{1-x} = \infty$ 及 $\lim\limits_{x\to1}\frac{3}{1-x^3} = \infty$ 都不存在，所以不能用差的极限运算法则，况且 ∞ 不是具体的数，也不能当数来运算. 正确的解法是：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right) &= \lim_{x\to1}\frac{(1+x+x^2)-3}{1-x^3}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = -1\end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2} + \cdots + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2} = 0+0+\cdots+0 = 0$.

解法错误. 原因是：错误运用了加法的极限运算法则.

因为加法的运算法则只适用于有限个具有极限的函数之和的情况，而这里当 $n\to\infty$ 时，不是有限项之和，因此不能应用加法的极限运算法则.

正确的解法：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(3) $\lim\limits_{x\to0} x\cos\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to0} x \lim\limits_{x\to0}\cos\frac{1}{x} = 0$.

解法错误. 原因是：错误运用了乘积的极限运算法则. 因为乘积的极限运算法则中，要求每个因子的极限都存在，而这里极限$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在，所以不能用乘积的极限运算法则. 正确的解法如下：

因为$\lim\limits_{x\to 0}x=0$，即 x 为 $x\to 0$ 时的无穷小，且$\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，即 $\cos\dfrac{1}{x}$有界. 根据有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小的性质知：$\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=0$.

解法错误. 原因是：错误运用了重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 注意：当 $x\to 0$ 时$\dfrac{1}{x}\to\infty$，这里$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}\neq 1$. 由此可见，当利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$求极限时，不能以形式看函数式，只要化为$\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}$就认为它的极限一定是 1. 要注意在该极限过程中 $\varphi(x)$的变化趋势. 若 $\varphi(x)\to 0$ 不成立，则不能用该重要极限. 从本质上来说，重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 是“$\dfrac{0}{0}$”型的，若不是“$\dfrac{0}{0}$”型的极限，一定不能用该重要极限求解. 该题正确的解法是：利用有界函数与无穷小之积仍是无穷小的性质求解. 即因为 $x\to 0$ 时，x^2 是无穷小，而 $\sin\dfrac{1}{x}$有界. 于是$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$.

13. 任何两个无穷小都可以比吗?

不能. 例如：当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 都是无穷小量；但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在且不为无穷大，故当 $x\to+\infty$时，$f(x)$和 $g(x)$不能比较.

14. 关于无穷大有哪些运算法则?

利用无穷大的定义，不难证明无穷大有以下运算法则：

① 两个同号无穷大的和还是同号无穷大；

② 无穷大与有界变量的和还是无穷大；

③ 无穷大与有非零极限的变量之积还是无穷大.

15. 连续函数与有间断点的函数复合，是否还有间断点?

不一定. 如设 $f(x)=|x|$，$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$f(g(x))=1$，$g(f(x))=1$，$g^2(x)=1$，可见，连续函数与有间断点的函数复合时，间断点是可以消除的. 就是有间断点的函数复合时，也可以变连续，如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0\\ 2, & x<0\end{cases}$，$f(f(x))=1$.

16. 课本中关于初等函数的连续性，为什么不说"初等函数在其定义域内都是连续的"而说"初等函数在其定义区间内都是连续的"？

因为初等函数的定义域可能包含孤立点. 如初等函数 $f(x)=\sqrt{\sin x-1}$，它的定义域 $D=\left\{x \,\middle|\, x=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数}\right\}$ 中每一个点都是孤立点，函数在每个孤立点的邻域内不是处处有定义的. 但是函数在一点连续的定义中要求函数在该点的某一邻域有定义，因此不能说"初等函数在其定义域内连续"，而应该正确地叙述为"初等函数在其定义区间内都是连续的".

1.3　典型例题分析

一、映射与函数

例 1　已知：$A=\left\{0,1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$，$B=\left\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$，求：$A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$，$B-A$.

解　$A\cup B=A$，$A\cap B=B$，$A-B=\{0\}$，$B-A=\phi$.

例 2　求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(2) $y=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

【分析】　上述两个函数均为初等函数，初等函数的定义域是使函数有意义的自变量的变化范围。

解　(1)定义域为 $[-1,0)\cup(0,1]$；(2)定义域为 $R=(-\infty,+\infty)$.

例 3　设 $y=f(x)$的定义域为 $[1,2]$，求 $f(1-\ln x)$的定义域.

解　因为 $f(x)$的定义域为$[1,2]$，所以 $1\leqslant 1-\ln x\leqslant 2$，即$\frac{1}{\mathrm{e}}\leqslant x\leqslant 1$，可得 $f(1-\ln x)$的定义域为 $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},1\right]$.

例 4　设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)$，$x>0$，求 $f(x)$.

解　令 $x=\frac{1}{x}$，则 $f(t)=\frac{1}{x}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)=\frac{1}{x}\left(1+\frac{\sqrt{1+t^2}}{x}\right)$，所以 $f(x)=\frac{1}{x}\left(1+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$，$x>0$.

例 5　设 $f(x)=\begin{cases}1, |x|<1\\ 0, |x|=1\\ -1, |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解　$f[g(x)]=\begin{cases}1, x<0\\ 0, x=0\\ -1, x>0\end{cases}$，$g[f(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}, |x|<1\\ 1, |x|=1\\ \frac{1}{\mathrm{e}}, |x|>1\end{cases}$.

例 6 判断函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, x\leqslant 0\\ 1+x, x>0\end{cases}$ 的奇偶性.

解 由于 $f(x)=1+|x|$，所以是偶函数.

例 7 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, -1<x<0\\ 2, 0\leqslant x<1\\ x-1, 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，求 $f(3), f(0), f(-0.5)$.

解 $f(3)=2, f(0)=2, f(-0.5)=2^{-0.5}=2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

例 8 设 $f(x)$ 为定义在 $(-L,L)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,L)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-L,0)$ 内也单调增加.

证 设 x_1,x_2 为满足 $-L<x_1\leqslant x_2<0$ 的两个实数，则 $L>-x_1\geqslant -x_2>0$，因 $f(x)$ 在 $(0,L)$ 内单调增加，故 $f(-x_2)\leqslant f(-x_1)$，又因 $f(x)$ 是 $(-L,L)$ 内的奇函数从而 $-f(x_2)\leqslant -f(x_1)$，即 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，因此 $f(x)$ 在 $(-L,0)$ 内也单调增加.

例 9 指出下列初等函数由哪些基本初等函数复合而成：

(1) $y=e^{\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2}$； (2) $y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$.

解 (1)由 $y=e^u, u=t^2, t=\sin v, v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成；

(2) 由 $y=\arccos u, u=\sqrt{t}, t=\ln v, v=x^2-1$ 复合而成.

例 10 设映射 $f:A\to B$ 是可逆的，证明：它的逆映射是唯一的.

证 设 g_1,g_2 都是 f 的逆映射，且 $g_1\neq g_2$，则 $\exists y\in B$，使 $g_1(y)\neq g_2(y)$.

由 $f^{-1}[g_2(y)]=y$ 得，$g_1\{f^{-1}[g_2(y)]\}=g_1(y)$，又因 f 与 g_1 互为逆映射，所以 $g_1\{f^{-1}[g_2(y)]\}=g_2(y)$，故 $g_1(y)=g_2(y)$，与假设矛盾，命题得证.

例 11 下列函数是否相等，为什么？

(1) $y=\dfrac{x^2}{x}$ 与 $y=x$； (2) $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$；

(3) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$；(4) $y=x^2+1$ 与 $u=t^2+1$

解 (1)、(2)不等，因定义域不同；(3)、(4)相等，因定义域相同.

例 12 下列哪些函数是初等函数，哪些不是？

(1) $y=2^{-x^2}$；(2) $y=\sqrt{x}+\lg(\sin x)$；(3) $y=[x]$；(4) $y=\begin{cases}0, x\geqslant 0\\ 1, x<0\end{cases}$.

解 (1)、(2)是；(3)、(4)不是.

二、数列的极限

例 1 用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n}=1$.

【分析】 因对 $\forall\varepsilon>0$，若要 $\left|\dfrac{n-1}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 成立，只要 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可.

证 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{n-1}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n}=1$ 成立.

例 2　求下列数列的极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$；　(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k}\right)$（$k$ 为常数）；　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}+\cdots+\dfrac{1}{9n^2-3n-2}\right)$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$；(7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2})^n$；(8) 设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n-1}\right)$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=1.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\times 2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}$ $=2.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{1}{3}}{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1}$，因 $\left|-\dfrac{2}{3}\right|<1\Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}=0$，　所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}.$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n^{k-1}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^{k-2}}+\dfrac{1}{n^{k-1}}\right)$

$$=\begin{cases}0, & k>2\\ \dfrac{1}{2}, & k=2.\\ \infty, & k<2\end{cases}$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}+\cdots+\dfrac{1}{9n^2-3n-2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\times4}+\dfrac{1}{4\times7}+\dfrac{1}{7\times10}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$

$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)=\dfrac{1}{3}.$

(6) 因为 $1\leqslant\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\leqslant1+\dfrac{1}{n}$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=1$，故由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1.$

(7) 因为 $\sin\pi\sqrt{1+4n^2}=\sin(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi)=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}$，原式 $=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)^n=e^{\left[\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]}$，又因为 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\to 0$，所以

$$\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\sim\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\sim\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}(n\to\infty)$$

因此，原式 $=e^{\left(\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)}=e^{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)}=e^{\frac{\pi}{4}}$.

(8) $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})=(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})/(1-a)$

$=(1-a^2)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})/(1-a)=\cdots=(1-a^{2^{n+1}})/(1-a)$，$\because |a|<1$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a^{2^{n+1}}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-a^{2^{n+1}})/(1-a)=1/(1-a)$.

(9) 对于数列的前 n 项和的极限，常常可以采用夹逼原理、求和或表示成定积分来求极限. 在此题中容易发现：$\dfrac{k+1}{n^2+n-1}<\dfrac{k+1}{n^2+k}<\dfrac{k+1}{n^2}(k=0,1,2,\cdots,n-1)$，所以 $\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n-1)}=\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n-1}\leqslant\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n-1}\leqslant\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\dfrac{n(n+1)}{2n^2}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$，所以由夹逼原理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n-1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

例 3 设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$，$n=1,2,\cdots$，证明：数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并求此极限.

证 由 $0<x_1<3$ 知，x_1，$\sqrt{3-x_1}$ 均为正数，故 $0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}=\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{3-x_1}\leqslant\dfrac{1}{2}[(\sqrt{x_1})^2+(\sqrt{3-x_1})^2]=\dfrac{3}{2}$. 猜想 $x_n\leqslant\dfrac{3}{2}$，下面用数学归纳法证明. 假设 $0<x_k\leqslant\dfrac{3}{2}(k>1)$，则 $0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}=\sqrt{x_k}\cdot\sqrt{3-x_k}\leqslant\dfrac{1}{2}[(\sqrt{x_k})^2+(\sqrt{3-x_k})^2]=\dfrac{3}{2}$，所以 $0<x_n\leqslant\dfrac{3}{2}(n>1)$，即数列 $\{x_n\}$ 有界，要证数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，只需证明该数列单调. 当 $n>1$ 时，有

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\frac{(\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n)(\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}$$
$$=\frac{x_n(3-2x_n)}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}\geqslant 0$$

所以，数列 $\{x_n\}$ 单调递增且有上界. 由单调有界定理可知，该数列的极限存在. 为求此极限，不妨设 $\lim\limits_{x\to 0}x_n=a$，由 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 得 $x_{n+1}^2=x_n(3-x_n)$. 当 $n\to\infty$ 时，$a^2=a(3-a)$，解方程可得，$a=\dfrac{3}{2}$，$a=0$（舍去）（因为 $x_n>0$，且 $\{x_n\}$ 单调递增），所以 $\lim\limits_{x\to 0}x_n=\dfrac{3}{2}$.

三、极限与连续

1. 求极限的常用方法：

(1) 用定义;

(2) 代入法(对连续函数,可用因式分解或有理化消除零因子);

(3) 变量替换法;

(4) 两个重要极限法;

(5) 用夹逼准则和单调有界准则;

(6) 等价无穷小量代换.

常用的等价无穷小有:当 $x\to0$ 时,$\sin x\sim x$;$\tan x\sim x$;$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$;$\ln(1+x)\sim x$;$\arcsin x\sim x$;$\arctan x\sim x$;$e^x-1\sim x$;$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$;$(1+\beta x)^\alpha\sim\alpha\beta x$.

2. 函数的连续性主要用连续函数的定义来确定某个点是否为间断点,用函数的左右极限确定间断点的类型.

例1 用定义证明:当 $a>0$ 时,$\lim\limits_{x\to0}a^x=1$.

证 ① 当 $a>1$ 时,对任给 $\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),为使 $|a^x-1|<\varepsilon$,即 $1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon$,只要 $\log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon)<-\log_a(1-\varepsilon)$,即 $|x-0|<-\log_a(1-\varepsilon)$.

对任给 $\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),取 $\delta=-\log_a(1-\varepsilon)$,则当 $|x-0|<\delta$ 时,有 $|a^x-1|<\varepsilon$,因此 $\lim\limits_{x\to0}a^x=1$.

② 当 $0<a<1$ 时,对任给 $\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),为使 $|a^x-1|<\varepsilon$,即 $1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon$,只要 $-\log_a(1-\varepsilon)<\log_a(1+\varepsilon)<x<\log_a(1-\varepsilon)$,即 $|x-0|<\log_a(1-\varepsilon)$.

对任给 $\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$),取 $\delta=\log_a(1-\varepsilon)$,则当 $|x-0|<\delta$ 时,有 $|a^x-1|<\varepsilon$,因此 $\lim\limits_{x\to0}a^x=1$.

综合①、②当 $a>0$ 时,$\lim\limits_{x\to0}a^x=1$.

同理可证:当 $a>1$ 时, ① $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$;② $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$.

例2 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$; (3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$; (5) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)$;

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$; (7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x(x+1)(x+2)}{(x-3)(x+2)}=\lim\limits_{x\to-2}\frac{x(x+1)}{x-3}$

$$=\frac{-2\times(-2+1)}{-2-3}=-\frac{2}{5}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$$