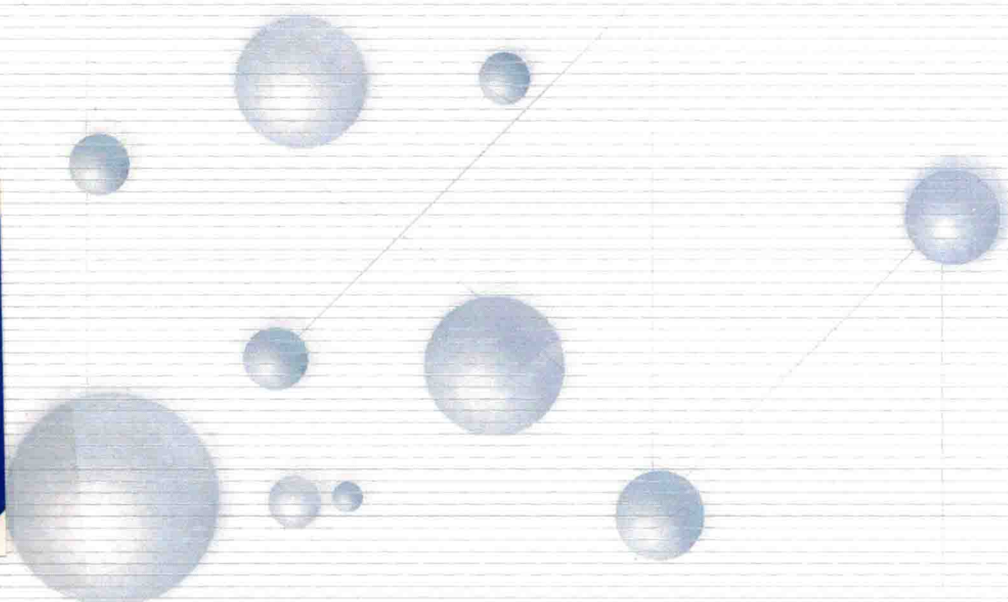
数学物理方法

姜 颖 编著



科 学 出 版 社

数学物理方法

姜 颖 编著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是编者根据多年来在上海大学物理类专业讲授数学物理方法课程的讲义编纂而成的. 全书分为 6 章, 内容涵盖复变函数论、积分变换、数学物理方程、二阶线性常微分方程、三维曲线坐标系下分离变量法与特殊函数、格林函数法等. 在保证内容结构完整的前提下, 本书尽量删繁就简, 力求突出主线. 在内容编排上, 特别是在数学物理方程及其求解的部分, 有别于多数现行教材先集中统一给出三类数理方程定解问题再讲解各定解问题的求解方法的编排顺序, 本书首先集中精力讲解波动方程从定解问题的提出到各种情况下的求解, 通过对此相对单纯的问题的连贯细致的讨论, 力求使读者能在短时间内理解和掌握求解数学物理方程的思想精髓, 之后再分别就输运问题和稳定场问题进行讨论.

本书可作为物理类专业数学物理方法课程的教材, 也可作为其他理工科专业的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/姜颖编著. —北京: 科学出版社, 2018. 6
ISBN 978-7-03-057435-0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①姜… Ⅲ.①数学物理方法-高等学校-教材 Ⅳ. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 101420 号

责任编辑: 王胡权 焦惠丛 / 责任校对: 彭珍珍
责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 6 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2018 年 6 月第一次印刷 印张: 16 3/4
字数: 343 000

定价: 45.00 元

前　言

作为研究物理、工程甚至化学、生物等领域诸多问题的数学手段和工具, 数学物理方法的重要性是不言而喻的, 因此, 这门课程已成为大多数高等学校物理类、电子类、工程类以及其他理工科专业的本科生必修课程.

数学物理方法承上启下, 将大学一年级所学的高等数学和后续的相关专业课程连接在一起, 使之成为一个有机的知识逻辑体系. 通过数学物理方法课程的学习, 不仅可以掌握在具体问题中灵活应用高等数学知识的技巧, 而且能学会处理不同问题的基本手段和思维方式.

本书是编者根据多年来在上海大学物理类专业讲授数学物理方法课程的讲义编纂而成的. 全书共分为 6 章, 内容涵盖复变函数论、积分变换、数学物理方程、二阶线性常微分方程、三维曲线坐标系下分离变量法与特殊函数、格林函数法等.

在当前本科教育教学越来越强调通识教育的大背景下, 考虑到越来越多的高校逐步缩减基础课程教学课时的现实情况, 本书在保证内容结构完整的前提下尽量减小篇幅、删繁就简, 力求突出主线. 在内容编排上, 特别是在数学物理方程及其求解的部分, 有别于多数现行教材先集中统一给出三类数理方程定解问题再讲解各定解问题的求解方法的编排顺序, 本书首先集中精力讲解波动方程从定解问题的提出到各种情况下的求解方法, 通过对此相对单纯的问题的连贯细致的讨论, 力求使读者能在短时间内理解和掌握求解数学物理方程的思想精髓, 之后再分别就输运问题和稳定场问题进行讨论.

在熟练掌握应用数学物理方法研究相关物理问题的能力的同时, 更需要对其背后的数学公理逻辑体系有宏观的把握, 因此, 在突出主线、删繁就简的同时, 编者努力使内容在逻辑上相对完整. 由于本书主要面向物理类和工程应用类专业的学生, 因此本书不追求对于复杂数学定理的严苛证明, 取而代之, 我们努力通过较为形象和易于接受的方式使读者能够对这些定理和概念所蕴含的思想有所把握, 并能够对此加以灵活的应用.

记得第一次接触并细致学习数学物理方法是 1992 年在兰州大学读大学二年级的春季学期, 杨孔庆先生深入浅出形象生动的教学风范深深地触动了我, 并在后续的岁月中潜移默化地对我的教学风格产生影响, 借此机会对杨孔庆先生的教诲表示最真诚的感谢!

在本书的出版过程中, 得到了科学出版社王胡权等编辑的大力支持, 在此对他们的辛勤工作谨致诚挚谢意!

由于编者水平有限, 加之时间仓促, 疏漏和不妥之处在所难免, 敬请读者不吝批评指正.

姜　颖

2018 年 3 月于上海大学

目　　录

第 1 章　复变函数论

人类探索自然的过程总是一个不断将自己放在更广泛的背景下进行研究和求索的过程. 同样, 数学的发展也是这样一个过程: 最初人类只知道自然数, 随着实践和数学研究及应用的向前发展, 逐渐扩展到整数、有理数乃至整个实数域. 我们之前所学的实变函数正是定义在实数域上. 我们经常碰到一个实函数 $y=\sqrt{x}$, 这个函数的定义域是非负实数. 在实变函数论中, 负数方根是没有意义的. 然而, 人们在对一元三次和四次方程的根式进行研究时发现不可避免地会面对负数方根的问题. 这意味着必须对数域进行必要的扩展, 这就得到了复数域.

本章将简要介绍复数及复变函数, 并对复变函数的微分和积分特性及其应用进行讨论.

1.1　复　　数

1.1.1　复数的定义

为了得到复数域, 我们首先必须对负数方根做出定义. 为此, 人们引入了**虚数单位**

$$\mathrm{i} \equiv \sqrt{-1}, \tag{1.1.1}$$

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称作**复数**, 其中 x 和 y 均为实数, 它们分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**, 记作

$$x=\mathrm{Re}\, z, \qquad y=\mathrm{Im}\, z. \tag{1.1.2}$$

所有可能的复数集合在一起就构成了**复数域**.

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 只有当它们的实部和虚部分别相等时, 我们才可说这两个复数是相等的, 即

$$\left\{\begin{aligned} x_1&=x_2 \\ y_1&=y_2 \end{aligned}\right. \quad\Longrightarrow\quad z_1=z_2. \tag{1.1.3}$$

如果两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的实部相等 $x_1=x_2$, 而虚部相差一个负号 $y_1=-y_2$, 则称这两个复数互为**共轭复数**, 记为 $z_1^*=z_2$ 或 $z_1=z_2^*$. 换言之, 对于复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 来说, 它的共轭复数为

$$z^*=(x+\mathrm{i}y)^*=x-\mathrm{i}y. \tag{1.1.4}$$

1.1.2　复数的运算

当给出了复数的定义后, 我们接下来就要给出复数之间相应的运算法则.

(1) **加法**　两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 和 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的加法为

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2), \tag{1.1.5}$$

即两个复数实部的和为新的复数的实部, 两个复数虚部的和为新的复数的虚部. 复数的减法计算亦如此. 由上式不难看出复数的加法满足交换律和结合律.

(2) **乘法**　两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 和 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的乘法可如下计算:

$$\begin{aligned} z = z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) \\ &= x_1x_2 + \mathrm{i}x_1y_2 + \mathrm{i}y_1x_2 - y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

从这里也不难看出复数的乘法同样满足交换律、分配律和结合律.

复数乘法中一个有趣的例子是一个复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与它自身的共轭复数相乘

$$z \cdot z^* = x^2 + y^2, \tag{1.1.7}$$

我们看到它是一个实数! 它的几何意义我们会在稍后介绍, 而它的实数性对于我们接下来计算复数的除法有很大的帮助.

乘方运算只是乘法的一个简单推广, 譬如, z^n 就是将 n 个 z 相乘. 这里我们就不再赘述.

(3) **除法**　两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 和 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, 如果 $z_2 \neq 0$, 则可以计算下列除法:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2}. \tag{1.1.8}$$

为了得到这个运算的结果, 即为了写出所得复数的实部和虚部, 我们就需要通过某种方法将分母实数化. 对上式的分子和分母同乘以分母的共轭复数就可达此目的

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{i}(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}, \tag{1.1.9}$$

于是我们就可看出此复数的实部和虚部分别是

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad \mathrm{Im}\, z = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{1.1.10}$$

例 1.1.1　指出下列复数的实部和虚部

$$z = \frac{3 + \mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}. \tag{1.1.11}$$

解　对此问题, 我们首先要将分母实数化, 这需要找到分母中复数的复共轭, 然后上下同乘之, 即

$$z=\frac{3+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\frac{(3+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}=\frac{1+7\mathrm{i}}{5}=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}, \tag{1.1.12}$$

因此我们就得出 $\mathrm{Re}\, z=1/5$, $\mathrm{Im}\, z=7/5$.

1.1.3　复数的几何表示

1. 复平面

从上面所讲复数的定义中可以看到, 一个复数可以用两个实参量来确定, 即它的实部和虚部. 据此, 我们可以用一个二维平面来表示复数域, 这个平面就称为**复平面**, 面上的每个点代表一个复数. 该复平面上直角坐标系的横轴表示复数的实部, 称为**实轴**; 纵轴表示复数的虚部, 称为**虚轴**. 见图 1.1.

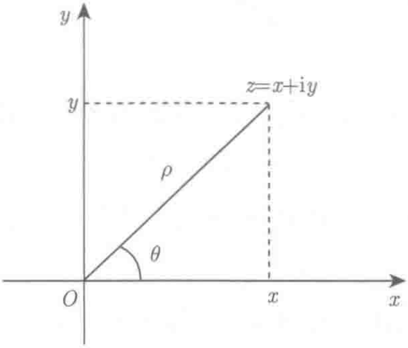


图 1.1　复平面

例 1.1.2　有两个复数 z_1 和 z_2, 证明

$$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \tag{1.1.13}$$

解　对这个问题的证明有两种方法: 一种是几何的方法, 而且也是最简单的方法. 当我们在复平面上将 z_1、z_2 和 z_1+z_2 这三个复数画出来后, 由图 1.2 我们不难看到这三个复数通过平移可构成一个三角形或是排在同一直线上, 因此利用三角形两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边就可轻易证得.

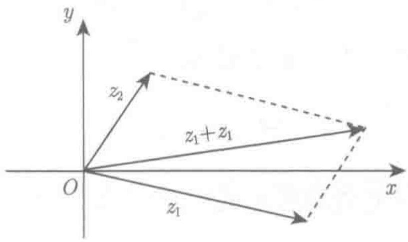


图 1.2　两个复数的和

另一个是用代数的方法. 我们知道

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(z_1+z_2)^*=|z_1|^2+(z_1z_2^*+z_1^*z_2)+|z_2|^2, \tag{1.1.14}$$

由于 $z_1z_2^*$ 和 $z_1^*z_2$ 相互共轭, 有

$$z_1z_2^*+z_1^*z_2=2\,\mathrm{Re}\,(z_1z_2^*), \tag{1.1.15}$$

于是我们有

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+2\,\mathrm{Re}\,(z_1z_2^*)+|z_2|^2, \tag{1.1.16}$$

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-2\,\mathrm{Re}\,(z_1z_2^*)+|z_2|^2. \tag{1.1.17}$$

设

$$z_1z_2^*=a+\mathrm{i}b, \tag{1.1.18}$$

则有

$$|z_1||z_2|=|z_1z_2^*|=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant|a|\geqslant a=\mathrm{Re}\,(z_1z_2^*), \tag{1.1.19}$$

因此, 得

$$(|z_1|-|z_2|)^2\leqslant|z_1+z_2|^2\leqslant(|z_1|+|z_2|)^2, \tag{1.1.20}$$

即

$$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \tag{1.1.21}$$

这个结果可以很轻易地推广为

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|. \tag{1.1.22}$$

2. 复数的模和辐角

一个二维平面不仅可以用直角坐标来描述, 同样也可采用极坐标来表征. 因此, 我们也可用极坐标的两个参量 $(\rho,\ \theta)$ 来标定一个复数, 它们与该复数的实部和虚部 $(x,\ y)$ 的关系如下:

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta. \tag{1.1.23}$$

由此, 我们可以得到复数的三角函数表达形式

$$z=\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta), \tag{1.1.24}$$

ρ 称为该复数的模, 表示该复数距原点的距离或该复数的"绝对值"

$$\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}; \tag{1.1.25}$$

θ 称为该复数的**辐角**

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}, \tag{1.1.26}$$

记作 $\theta \equiv \mathrm{Arg}z, 0 \leqslant \mathrm{Arg}z < 2\pi$ 时, 记为 $\arg z$, 于是

$$\theta = \mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

注意　三角函数的周期性意味着一个复数所对应的辐角不是唯一的, 如果一个复数的辐角为 θ, 则 $2n\pi + \theta$ 也都是它的辐角 (n为整数), 这就是**辐角的多值性**.

借助复数的模和辐角的表达式, 我们来检视一下两个复数乘积的模和辐角与这两个复数的模和辐角的关系. 设 $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$, 则

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1\rho_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\right] \\ &= \rho_1\rho_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\right], \end{aligned} \tag{1.1.27}$$

即两个复数相乘, 所得复数的模为这两个复数的模的乘积, 而其辐角为这两个复数辐角的和. 由此类推, 利用归纳法不难证得, 对于 n 个复数 $\{z_l = \rho_l(\cos\theta_l + \mathrm{i}\sin\theta_l), l = 1, 2, \cdots, n\}$ 的乘积, 我们有

$$z_1 z_2 \cdots z_n = \rho_1\rho_2\cdots\rho_n\left[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\right]. \tag{1.1.28}$$

利用**欧拉公式**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \tag{1.1.29}$$

由复数的三角函数形式我们就进一步得到了**复数的指数函数形式**

$$z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.1.30}$$

⋆ **欧拉公式的两种简单证明**

证明一　我们知道, 指数函数 e^{ax} 的泰勒级数展开是

$$\mathrm{e}^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n x^n}{n!}, \tag{1.1.31}$$

当把 $a = \mathrm{i}$ 以及 $x = \theta$ 代入上述展开式并对实部和虚部进行归并后, 我们有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \left[1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right] + \mathrm{i}\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right]. \tag{1.1.32}$$

从这个式子, 我们不难发现, 方程右边的实部正是三角函数 $\cos\theta$ 的泰勒级数展开式, 而虚部正是 $\sin\theta$ 的泰勒级数展开式, 于是我们就得到了

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \tag{1.1.33}$$

这正是我们上面给出的欧拉公式.

证明二　首先, 由于 $\dfrac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax})}{\mathrm{d}x} = a\mathrm{e}^{ax}$, 所以有 $\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{d}\theta} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 其次, 我们知道, 作为复数, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 一定可以一般性地表示成

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \rho\left(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\right). \tag{1.1.34}$$

这个表达式中的模 ρ 和辐角 α 都是 θ 的函数. 这个方程的两边同时对 θ 求导, 得

$$\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \left(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\right)\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} + \mathrm{i}\rho\left(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\right)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta}, \tag{1.1.35}$$

它可进一步写为

$$\mathrm{i}\rho\left(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\right) = \left(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\right)\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} + \mathrm{i}\rho\left(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha\right)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta}. \tag{1.1.36}$$

方程两边实部和虚部分别相等就给出了关于 $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta}$ 的一个二元一次方程组, 不难求得 $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta} = 0$ 而 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta} = 1$, 也即 $\rho = C$ 而 $\alpha = \theta + C_0$, 其中 C 和 C_0 为两个待定的常数. 当 $\theta = 0$ 时我们有 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$, 由此我们就可确定出 $C = 1$ 而 $C_0 = 0$, 于是就再一次得到了上面提到的欧拉公式.

复数的指数函数形式使得关于复数的运算变得相对简单, 例如, 对于复数的乘法, 有

$$z = z_1 \cdot z_2 = \rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot \rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = (\rho_1\rho_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}, \tag{1.1.37}$$

$$z = z_1 z_2 \cdots z_n = (\rho_1\rho_2\cdots\rho_n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}, \tag{1.1.38}$$

这与我们之前的结果一致, 而计算过程则大大简化. 对于一个复数 z 的 n 次方, 类似地, 我们有

$$z^n = \rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \tag{1.1.39}$$

这就是**棣莫弗** (de Moivre) **定理** .

灵活运用棣莫弗定理可以帮助我们通过复数的运算来简化很多实数计算, 如下面这个例子.

例 1.1.3　计算 $\cos(5\varphi)$.

这个问题当然可以利用以前所学的三角函数的和角公式加以计算, 但这样计算显然是比较麻烦的. 现在可以利用棣莫弗定理来十分简便地求解这一问题.

解　我们可以将 $\cos(5\varphi)$ 看成一个辐角为 5φ、模为 1 的复数的实部, 于是利用棣莫弗定理, 我们就有

$$\cos(5\varphi)+\mathrm{i}\sin(5\varphi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\varphi}=\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^5=(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^5. \tag{1.1.40}$$

至此, 我们可以利用杨辉三角法很轻易地算出这个两项和式的五次方, 得

$$\begin{aligned}\cos(5\varphi)+\mathrm{i}\sin(5\varphi)=&\cos^5\varphi+\mathrm{i}5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi\\&-\mathrm{i}10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi+\mathrm{i}\sin^5\varphi,\end{aligned} \tag{1.1.41}$$

上式左右两边相等, 必须实部和虚部分别相等, 于是将上式右边按实部虚部合并后, 我们就得

$$\cos(5\varphi)=\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi. \tag{1.1.42}$$

3. 复球与无穷远点

复数的另一个有趣的几何表示是通过复球面来完成的. 首先, 我们建立一个球面, 然后让此球面与复平面在复平面的原点处相切, 即球面的南极与复平面的原点重合, 如图 1.3 所示. 之后, 将球面的北极与复平面上的任意一点直线相连, 该直线必与球面相交于一点. 这说明我们可以将球面上的点与复平面上的点也即整个复数域作一一对应. 因此, 这个球面就称为**复球面**. 从图上不难看出, 复平面上所有距原点无穷远的点都对应于复球面上的北极点, 从这个意义上讲, 我们就把复平面上无穷远处的点看作一个点, 称为**无穷远点**.

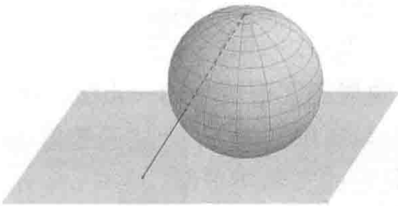


图 1.3　复球面

习　题　1.1

1. 计算并给出下列复数的实部和虚部.

(1) $z=\dfrac{4+\mathrm{i}}{2-5\mathrm{i}}$;　　(2) $z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}+\dfrac{2+3\mathrm{i}}{5\mathrm{i}}$;

(3) $z=\dfrac{5}{(1-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}$;　　　　(4) $z=(1-\mathrm{i})^4$.

2. 确定下列复数的模和辐角.

(1) $z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2-2\sqrt{3}\mathrm{i}}$;　　　　(2) $z=(1-\mathrm{i})^3$;

(3) $z=\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\mathrm{i}\right)(3-\mathrm{i})$;　　　　(4) $z=(\sqrt{3}-\mathrm{i})^4$.

3. 确定满足下式的所有的复数 z 在复平面上所构成的形状.

(1) $|z-3\mathrm{i}|+|z+3\mathrm{i}|=9$;　　　　(2) $|z-2+\mathrm{i}|\leqslant 3$;

(3) $0<\arg\dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\dfrac{\pi}{4}$.

4. 计算下列数值.

(1) i^{i};　　　　(2) $\sin\phi+\sin 2\phi+\cdots+\sin n\phi$.

5. 求解方程 $z^2+z+1=0$.

1.2　复变函数的概念

我们知道, 一个实变函数 $f(x)$ 就是一个从实数区间 A 到另一个实数区间 B 的映射. 换句话说, A 中的任意一个数 a 都可以通过对应关系 $f(x)$ 在 B 中找到**唯一**的一个数 b 与之对应, 这个对应关系 $f(x)$ 就称为函数, A 称为该函数的定义域, 而 B 称为该函数的值域.

实际上, 复变函数和实变函数的定义从文字叙述上并无多大的不同, 只不过是将函数的概念由实数域推广到了复数域, 也即复变函数是从一个复数区域 (定义域) 到一个复数区域 (值域) 上的映射. **复变函数**

$$w=f(z)$$

表示将定义域中的一点 z 映射到了值域中的一点 w.

我们知道, 复数可以分为实部和虚部, 上述函数值 w 也不例外, 它也可以对应于两个实数 u 和 v, 分别是它的实部和虚部: $w=u+\mathrm{i}v$. 当然, 由于 $w=f(z)$, 因此 u 和 v 的值将随着自变量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的变化而变化, 即复变函数 $w=f(z)$ 可以写为

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y), \tag{1.2.1}$$

这两个二元实函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 分别称为复变函数 $f(z)$ 的**实部**和**虚部**.

在上面这个复变函数的定义中, 有两个要素需要强调, 一个是区域的概念, 另一个是映射.