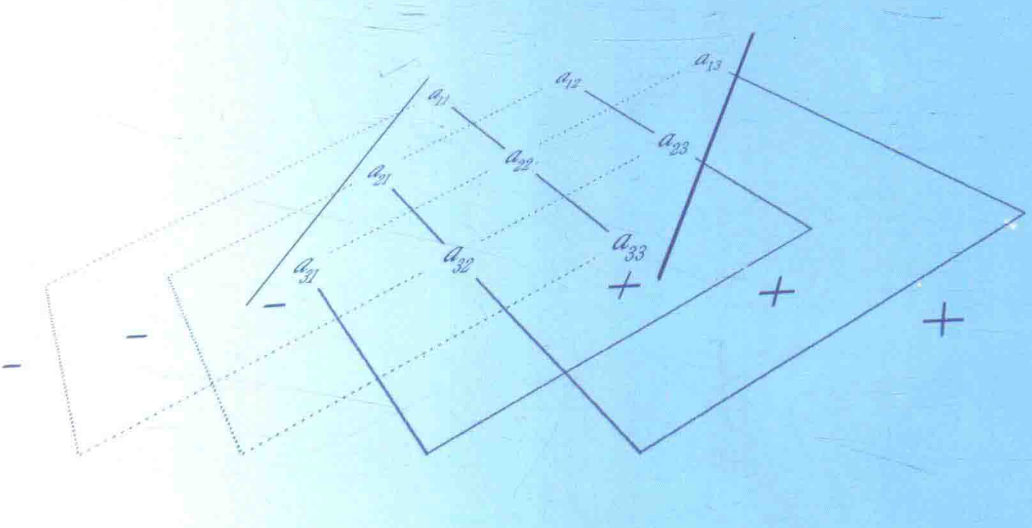
线性代数
学习指导与习题精解

肖马成 孙慧 郭强辉 主编



南開大學出版社

线性代数

学习指导与习题精解

肖马成　孙　慧　郭强辉　主编

南開大學出版社
天　津

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与习题精解 / 肖马成，孙慧，郭强辉主编. —天津 ：南开大学出版社，2018.9
ISBN 978-7-310-05660-6

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①肖… ②孙… ③郭… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 195554 号

南开大学出版社出版发行
出版人：刘运峰
地址：天津市南开区卫津路 94 号　邮政编码：300071
营销部电话：(022)23508339　23500755
营销部传真：(022)23508542　邮购部电话：(022)23502200
*
天津午阳印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
2018 年 9 月第 1 版　2018 年 9 月第 1 次印刷
185×260 毫米　16 开本　12.25 印张　2 插页　265 千字
定价：38.00 元

前　言

本书是为培养应用型人才的独立学院编写的辅助教材，适用于理工类、经济类、管理类等各专业. 大学本科阶段各专业的基础数学一般包括微积分、线性代数、概率论与数理统计三部分内容。它们之间有许多共同之处，但是又有各自的一些特点. 线性代数和微积分相比：线性代数所研究的量主要是有限的、离散的，这就决定了所用的方法是归纳的方法；微积分所研究的量主要是无穷的、连续的，所采用的方法是极限的方法. 线性代数和概率论与数理统计相比：线性代数所讨论的问题是确定型的，概率论与数理统计所讨论的问题是随机型的. 把握住这一点对学好线性代数是至关重要的.

线性代数的基本概念、性质、定理既多又抽象，加之大量的数学符号、字母和"公式语言"的使用及运算，往往使初学者困难重重，总是不得要领. 为了帮助学生学好线性代数，结合我们多年来在独立学院的教学经验，将本书定位在使其成为学生学习线性代数的"导学"，以引导学生逐步深入学习. 为此，本书每章结构都是"三段式"：基本知识点概要及学习要求与重点，典型例题解析，自测题. 即先对基本概念、性质、定理进行概括，指出构成它们的要素、前提条件、特点以及容易出现的问题，指明学习该部分内容应达到的基本要求与需要重点掌握的内容；然后再通过典型例题的讲解，使学生进一步加深对概念、性质、定理的理解，同时领会解题的方法和技巧；最后，在掌握基本方法和具备一定能力的基础上进一步通过演练一些题目，发现问题，检测自己掌握的程度，以达到改进和提高的目的.

本书作者依照教学大纲及教学经验在展开上述内容的过程中，特别指出了一些概念及方法之间的区别和联系，以使学生能够真正理解这些概念、性质的本质，掌握这些方法的关键所在. 书中引入了多种类型的例题，以期开阔学生思路，使学生学到分析问题和解决问题的方法. 有些题目是针对平时学习中常见的、多发的问题而设置的，还有些题目难度较大，需要有一定的解题技巧. 本书在每章末有一份自测题及答案，全书的最后部分附有3份期末考试试题及参考答案. 书中，有一部分题目选自历年的全国硕士研究生入学统一考试试题，其难度系数基本保持在$0.4 \sim 0.8$之间，既能让学生开阔视野，扩展深入学习的空间，也使本书能较好的适应多元化教学的要求.

本书可作为大学生学习线性代数课程的辅导书，可作为学生课后同步练习和期末考试的复习用书，可作为学生考研复习的学习资料，也可作为教师授课用的参考书.

本书的出版得到了南开大学出版社的大力支持，在此由衷感谢莫建来主任和李立夫编辑为本书的出版所做的大量工作.

由于作者水平有限，书中难免会有疏漏与不妥之处，望读者不吝指正.

编者

2017年7月

于南开大学

目 录

第一章　行列式

§1.1　知识点概要

1.1.1　二阶、三阶行列式

一、二阶行列式

称

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

为**二阶行列式**, 其中字母或数字a_1, a_2, b_1, b_2称为行列式的**元素**. 等式左端横者称为**行**, 竖者称为**列**.

二、三阶行列式

称

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

为**三阶行列式**, 其中字母或数字$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$称为行列式的**元素**. 三阶行列式含有三行三列, 是六项的代数和: 每一项为分别属于不同行和列的三个元素的积, 其中三项前置正号, 另三项前置负号. 三阶行列式表示的代数和, 也可以用图1.1所示的图形来记忆, 其中由实线连接的每三个元素之积带正号, 由虚线连接的每三个元素之积带负号.

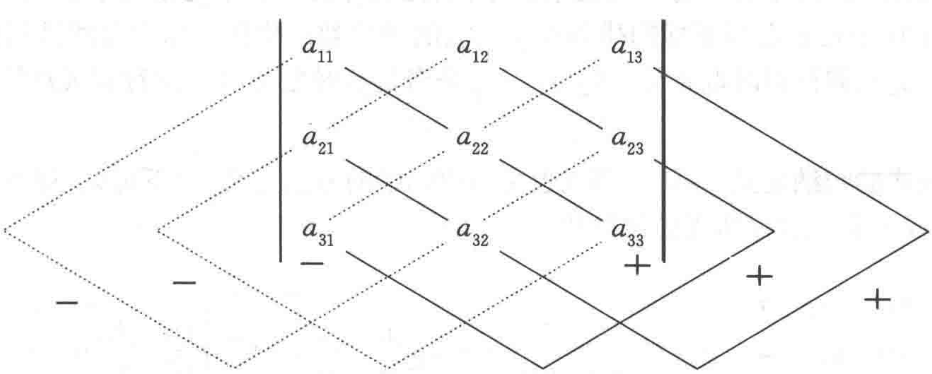


图 1.1

1.1.2　n阶行列式

一、n阶行列式概念

1. 排列和逆序

排列 由n个自然数$1, 2, \ldots, n$组成的每一个有序数组$i_1 i_2 \ldots i_n$, 称为一个n级排列. 各种不同n 级排列的总数为$n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$.

逆序和逆序数 在n级排列中, 较大的数如果排在较小的数前面, 那么它们构成一个**逆序**. 排列$i_1 i_2 \ldots i_n$的逆序总数称为**逆序数**, 记作$\tau(i_1 i_2 \ldots i_n)$.

奇排列和偶排列 如果排列$i_1 i_2 \ldots i_n$的逆序数$\tau(i_1 i_2 \ldots i_n)$为奇数, 则称排列$i_1 i_2 \ldots i_n$为**奇排列**. 如果排列$i_1 i_2 \ldots i_n$的逆序数$\tau(i_1 i_2 \ldots i_n)$为偶数, 则称排列$i_1 i_2 \ldots i_n$为**偶排列**.

称排列$12\ldots n$为**自然排列**, 并且把它也看作偶排列.

对换 考虑对给定排列$i_1 i_2 \ldots i_n$的变换, 如果它只交换该排列中某两个数的位置, 而其他数的位置不变, 则称之为**对换**. 以(i_1, i_2)表示交换i_1和i_2的位置的对换.

对于任意一个排列, 经过一次对换其奇偶性改变.

经过有限次对换, 任意一个n 级排列$i_1 i_2 \ldots i_n$均可变为自然排列$12\ldots n$, 而且所做对换的次数与排列$i_1 i_2 \ldots i_n$有相同的奇偶性.

2. n阶行列式定义

称

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

为n**阶行列式**, 其中$j_1 j_2 \ldots j_n$表示n级排列, $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是对全部n 级排列求和. 这样, n阶行列式等于$n!$项的代数和, 其中每一项是取自不同行、不同列的n个元素的乘积, 其符号决定于组成它的n个元素之列下标的排列$j_1 j_2 \ldots j_n$的逆序数: 在行下标为自然排列的情况下, 当$j_1 j_2 \ldots j_n$是偶排列时取正号; 当$j_1 j_2 \ldots j_n$是奇排列时取负号. n阶行列式D有时亦记为$\det(a_{ij})$.

n**阶行列式的归纳定义** n阶行列式也可以用归纳的方法定义. 如下可见, 每个三阶行列式可以写成三个二阶行列式的代数和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

实际上它也可以作为三阶行列式的定义. 同样, 可以把四阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{44}\end{vmatrix}-a_{14}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{vmatrix}.$$

利用四阶行列式可以定义五阶行列式. 依此类推, 可以归纳定义任意阶行列式.

3. 余子式和代数余子式

余子式 去掉n阶行列式D中元素a_{ij}所在的第i行和第j列, 剩下的元素按照原来位置排列, 构成的$n-1$阶行列式, 称为元素a_{ij}的**余子式**, 记作M_{ij}, 即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{i-1,1}&\cdots&a_{i-1,j-1}&a_{i-1,j+1}&\cdots&a_{i-1,n}\\a_{i+1,1}&\cdots&a_{i+1,j-1}&a_{i+1,j+1}&\cdots&a_{i+1,n}\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

代数余子式 称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素a_{ij}的**代数余子式**, 记作A_{ij}, 即$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

4. r阶子式和余子式

r阶子式 任取n阶行列式中的r行r列（$1\leqslant r\leqslant n$）, 例如所取r行r列各为

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant n,\quad 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n,$$

由这r行r列上的元素所构成的r阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{i_1j_1}&a_{i_1j_2}&\cdots&a_{i_1j_r}\\a_{i_2j_1}&a_{i_2j_2}&\cdots&a_{i_2j_r}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{i_rj_1}&a_{i_rj_2}&\cdots&a_{i_rj_r}\end{vmatrix}$$

称为该n阶行列式的一个**r阶子式**.

r阶子式的余子式和代数余子式 划去n阶行列式的r阶子式M的元素所在的r行r 列, 剩下的元素按原来位置组成$n-r$阶行列式A称作**r阶子式M的余子式**; 称

$$(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_r)+(j_1+j_2+\cdots+j_r)}A$$

为r **阶子式M的代数余子式**.

二、n阶行列式的性质

1. 经转置（行与列互换）行列式的值不变, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

等式右边的行列式, 称为左边行列式D的**转置行列式**, 记作D^{T}. 这样, $D = D^{\mathrm{T}}$.

2. 行列式中某一行（或列）的各个元素之公因子, 可以提到行列式符号之外. 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

3. 若行列式某一行（或列）的元素全为0, 则行列式等于0.

4. 如果行列式的某一行（或列）中各元素均为两项之和, 则行列式等于两个行列式之和. 例如:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j}+c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j}+c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj}+c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

5. 如果将行列式的任意两行（或列）对调, 则行列式只改变符号, 但绝对值不变. 由此可见:

(1) 如果行列式中有两行（或列）对应元素相同, 则行列式为零;

(2) 如果行列式中有两行（或列）对应元素成比例, 则行列式为零.

6. 如果把行列式的某行（或列）中各元素同乘数k, 然后加到另一行（或列）的对应元素上去, 则行列式的值不变.

三、行列式展开定理

行列式按某行（或列）展开 n阶行列式等于它的任意一行（或列）的各元素与其代数余子式的乘积之和. 如按第i行展开, 其中$1 \leqslant i \leqslant n$, 则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

如按照第j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ 列展开, 则

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

此外, 行列式D中任意一行（或列）的元素与另一行（或列）的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零, 如

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0 \quad (i \neq k),$$
$$a_{1j}A_{1l} + a_{2j}A_{2l} + \cdots + a_{nj}A_{nl} = 0 \quad (j \neq l).$$

拉普拉斯展开定理 考虑n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

在其中任意取定$r(1 \leqslant r \leqslant n-1)$个行, 然后在这$r$行中任选$r$列, 构成一个$r$阶子式. 这样的$r$阶子式共有$t = C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$个, 记为$M_1, M_2, \ldots, M_t$, 而其代数余子式记为$A_1$, A_2, $\ldots$, A_t. 那么

$$D = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_tA_t = \sum_{i=1}^{t} M_iA_i.$$

上述定理是行列式按一行（或列）元素展开定理的推广. 通常也把行列式按拉普拉斯定理展开, 说成是按r行（或r列）展开.

1.1.3 行列式计算

行列式的解题方法往往比较灵活, 形式多种多样, 技巧性较强. 特别是某些高阶行列式的计算, 有相当的难度. 因此, 要学好行列式, 除了掌握它的定义、性质等基本理论, 还必须熟练掌握行列式的解题思路和方法.

常用的行列式计算方法

1. 定义法 按照行列式的定义直接求解.

2. 化为三角形行列式法 应用行列式的某些性质, 将行列式化为上（或下）三角形行列式, 然后直接计算其值.

3. 降阶法 首先利用行列式性质降低行列式的阶数, 然后再计算行列式. 具体做法是, 首先应用行列式性质, 使行列式的某一行（列）仅有一个元素不为0, 而其余元素皆为0. 然后将行列式按行（列）展开, 或者对行列式直接应用拉普拉斯展开定理进行计算.

4. 归纳法 一般在证明一个n阶行列式等于某一结果时使用此方法, 而且往往是对阶数n应用数学归纳法. 所谓数学归纳法就是:

(1) 证明当$n=n_0$时结论成立（n_0由具体问题确定为1, 2或其他自然数）；

(2) 假设在$n \leqslant k$时结论成立, 并由此证明$n=k+1$时结论也成立. 于是, 结论对任何自然数成立.

5. 递推法　从原行列式D_n出发, 利用行列式的性质找出它和一个或几个同结构的较低阶的行列式$D_{n-1}, D_{n-2}, \ldots$ 之间的递推关系式, 然后由这个关系式逐步推出D_n与低阶行列式$D_1, D_2, \ldots$的关系. 行列式$D_1, D_2, \ldots$ 往往可以明显地求出, 故由此可以最终计算出D_n的值或表达式. 这种计算行列式的方法就是**递推法**.

6. 升阶法　为了计算某些行列式, 给原行列式再添上一行一列（称为**加边**）, 使其成为高一阶的行列式. 这种方法称为**升阶法**.

除了上述几种方法外, 还有许多计算行列式的方法, 例如拆项法、反证法等, 在此就不再一一介绍了. 另外, 在实际解题过程中, 往往不只是单独使用某一种或两种方法, 多数情况下是同时使用几种方法.

1.1.4 克莱姆法则

一、非齐次线性方程组

如果非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \ldots,\ x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中D_j $(j=1,2,\ldots,n)$ 是把系数行列式D中的第j列各元素, 相应的换成方程中的常数项$b_1, b_2, \ldots, b_n$ 后所构成的行列式.

二、齐次线性方程组

如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式$D \neq 0$, 则方程组只有零解; 若系数行列式$D = 0$, 则方程组有非零解, 反过来也成立.

利用克莱姆法则求线性方程组的解, 关键是计算行列式, 然后容易写出方程组的解.

§1.2 基本要求与学习重点

一、基本要求

1. 理解二、三阶行列式定义, 熟练计算二、三阶行列式.

2. 了解n级排列、逆序及逆序数、奇排列与偶排列、对换; 理解n阶行列式定义, 会用行列式定义计算某些特殊的行列式, 如三角行列式.

3. 理解行列式的性质、行列式按行（列）展开定理、行列式的拉普拉斯展开定理.

4. 熟练运用行列式性质、展开定理计算行列式, 证明一些简单问题.

5. 了解克莱姆法则的条件、结论, 会用克莱姆法则解含n个未知量n个方程的线性方程组.

二、学习重点

本章学习重点是熟练掌握行列式的计算, 对于各种形式的行列式, 能够正确计算出它的值. 尽管行列式多种多样, 但总可以根据行列式的某些特点, 利用行列式的性质及行列式的展开定理将其化简计算. 为此要求学生不仅要深刻理解行列式性质, 还要熟记这些性质, 并在完成一定数量的行列式计算过程中, 逐步达到上述要求.

§1.3 典型例题解析

题型一　三阶行列式的计算

例1.1　求行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

的值.

解法1 用“划线”的方法（如图1.1）.

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=6+6+6-27-8-1=-18.$$

解法2 将第1行乘以-2和-3分别加到第2行和第3行, 最后将行列式按第1列展开, 得

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}\xlongequal[-2r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-5\\0&-5&-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-5\\-5&-7\end{vmatrix}=-18.$$

解法3 将第2, 3列加到第1列, 然后由第1列提出公因数6, 得

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6&2&3\\6&3&1\\6&1&2\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&1\\1&1&2\end{vmatrix},$$

再将第1行的-1倍分别加到第2, 3行, 再将行列式按第1列展开, 得

$$D=6\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&-2\\0&-1&-1\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&-2\\-1&-1\end{vmatrix}=-18.$$

例1.2 求行列式

$$D=\begin{vmatrix}3&-2&5\\4&-1&-3\\-5&4&6\end{vmatrix}.$$

解法1 将第2行乘以-2和4分别加到第1行和第3行; 再将行列式按第2列展开, 有

$$D=\begin{vmatrix}3&-2&5\\4&-1&-3\\-5&4&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&0&11\\4&-1&-3\\11&0&-6\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}-5&11\\11&-6\end{vmatrix}=91.$$

解法2 按第1行展开, 有

$$D=3\begin{vmatrix}-1&-3\\4&6\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}4&-3\\-5&6\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}4&-1\\-5&4\end{vmatrix}=91.$$

例1.3 求行列式

$$D=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1 & 1+a\end{vmatrix}.$$

解法1 将第2, 3列加到第1列, 然后由第1列提取公因子$(3+a)$, 有

$$D=\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1 & 1+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3+a & 1 & 1\\ 3+a & 1+a & 1\\ 3+a & 1 & 1+a\end{vmatrix}=(3+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1+a & 1\\ 1 & 1 & 1+a\end{vmatrix},$$

第1行乘以-1, 分别加到第2, 3行, 可得

$$D=(3+a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}=a^2(3+a).$$

解法2 先将行列式的每个元素都变成两项和:

$$D=\begin{vmatrix}1+a & 1+0 & 1+0\\ 1+0 & 1+a & 1+0\\ 1+0 & 1+0 & 1+a\end{vmatrix},$$

再利用性质5, 将D拆项写成八个行列式之和, 其中四个有两列相同, 故这些行列式等于零. 于是, 有

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a & 0\\ 1 & 0 & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}=3a^2+a^3=a^2(3+a).$$

例1.4 已知行列式$D=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 2b_1-a_1 & 2b_2-a_2 & 2b_3-a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=6$, 求行列式$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$.

解法1 将行列式D按第2行展开成两个行列式, 有

$$D=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ -a_1 & -a_2 & -a_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=6,$$

所以, $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=3$.

解法2 将行列式D的第1行加到第2行, 则有

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=6,$$

所以, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=3.$

例1.5 证明

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

解法1 将左边行列式的第二列和第三列加到第一列上, 然后提出第一列的公因数2, 再将第一列乘以-1分别加到第2列、第3列上, 得

$$2\begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b \\ a_1+b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a+b+c & -b & -c \\ a_1+b_1+c_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -b_2 & -c_2 \end{vmatrix},$$

然后将第2, 3列加到第1列, 得

$$\text{左边}=2\begin{vmatrix} a & -b & -c \\ a_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2 & -b_2 & -c_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

解法2 将等式左边的行列式每列都看作两项的和, 由行列式性质5知其拆项可写成八个三阶行列式之和, 即

$$\begin{aligned}\text{左边}=&\begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & c & b \\ b_1 & c_1 & b_1 \\ b_2 & c_2 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & c & a \\ c_1 & c_1 & a_1 \\ c_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & c & b \\ c_1 & c_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 & b_2 \end{vmatrix}\\ &+\begin{vmatrix} b & a & a \\ b_1 & a_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 & a_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b & a & b \\ b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & a & a \\ c_1 & a_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 & a_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}\\ =&\begin{vmatrix} b & c & a \\ b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c & a & b \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

题型二　行列式定义和行列式展开定理

例1.6　求排列$n(n-1)\cdots 21$的逆序数, 并讨论它的奇偶性.

解　从左到右依次考察排列的每个数, 第一个数n的后面有$n-1$个比它小的, 故构成$n-1$个逆序; 第二个数$n-1$后面有$n-2$个比它小的, 故构成$n-2$个逆序; 依次下去则有一般数m, 其后面有$m-1$ 个比它小的, 故构成$m-1$个逆序. 所以, 该排列的逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

因此, 当$n=4k$或$4k+1$时, τ为偶数, 此时排列为偶排列; 当$n=4k+2$或$4k+3$时, τ为奇数, 此时排列为奇排列.

例1.7　问在五阶行列式中, 含乘积$a_{12}a_{24}a_{33}a_{45}a_{51}$的项的符号如何? 含乘积$a_{23}a_{42}a_{15}a_{31}a_{54}$的项符号如何?

解　乘积$a_{12}a_{24}a_{33}a_{45}a_{51}$的行下标已经按自然顺序12345排列, 而列下标的排列$j_1j_2j_3j_4j_5=24351$ 之逆序数为$\tau(24351)=5$. 由于$(-1)^{\tau}=(-1)^5=-1$, 故乘积项$a_{12}a_{24}a_{33}a_{45}a_{51}$应带负号.

再考查乘积$a_{23}a_{42}a_{15}a_{31}a_{54}$项, 为按定义确定其符号, 把该项中5个元素的位置重新排列, 使得它们的行下标排列为自然顺序, 即

$$a_{23}a_{42}a_{15}a_{31}a_{54}=a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{54},$$

此时列下标的排列$j_1j_2j_3j_4j_5=53124$的逆序数为$\tau(53124)=6$. 由于$(-1)^{\tau}=(-1)^6=1$. 故这一项前面应带正号.

例1.8　按定义计算五阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55}\end{vmatrix}\qquad (a_{ii}\neq 0;\ i=1,2,\ldots,5).$$

解　按定义, 五阶行列式应该有$5!=120$项. 由于这个行列式中有许多元素是零, 故行列式必有许多项为零. 我们只要把这些不为零的项找出来, 然后求出它们的和, 就是行列式的值.

先考查一般项中的乘积$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{5j_5}$, 其中$a_{5j_5}$是第5行中的元素, 由于第5行只有一个元素$a_{55}$可能不为零, 所以取$j_5=5$, 即$a_{5j_5}=a_{55}$; 再考虑第4行的元素$a_{4j_4}$, 第4行中只有两个元素$a_{44},a_{45}$不为零, 由于元素$a_{55}$取自第5列, 所以第4行中的元素不能取$a_{45}$, 只能取$a_{44}$, 即$a_{4j_4}=a_{44}$, 依次类推, 得$j_3=3,j_2=2,j_1=1$, 故行列式中, 只有含$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$的