



世界数学元典丛书

“十二五”国家重点图书

Function Theory

函数论

[日]竹内端三 著 胡浚济 译



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



世界数学元典丛书

“十二五”国家重点图书

函数论

• [日]竹内端三著 • 胡浚济译



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书以实数和复数的理论知识为基础,系统地介绍了初等函数、微分法、积分法、幂级数,以及奇点等重要理论,包括函数的连续性、可微性、可积性及其定理性质,突出了函数论在数学中的重要地位。内容丰富,叙述详尽。

本书适合高等院校师生及数学爱好者研读。

图书在版编目(CIP)数据

函数论/(日)竹内端三著;胡浚济译. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2018.3

ISBN 978 - 7 - 5603 - 7143 - 6

I . ①函… II . ①竹…②胡… III . ①函数论
IV. ①O174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 308402 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 陈雅君
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451 - 86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨圣铂印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 15.75 字数 283 千字
版 次 2018 年 3 月第 1 版 2018 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 7143 - 6
定 价 78.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎ 原序

本书与著者往日所刊行之高等微分学及高等积分学之程度相衔接,述关于复数函数之普遍理论并述椭圆函数之理论作为其应用.

时至今日,函数之概念于数学中占重要之地位,已不待论. 而于数学中所常用,所谓解析函数者,其深远之本性,经视为复变数之函数而研究之,方得阐明,此亦近代学者所不容疑之点也. 所以不但专习纯粹数学之士,即有志于理化工程学之学者,苟欲用微积分学以上之数理,不得不借复数函数论为阶梯. 一旦领悟复数活用之妙味,不但因此得明了初等函数之真相,更进而欲自由使用椭圆函数,盖亦非难事矣. 本书之目的,实欲使读者得达此境地也.

本书著者,以大正十一年以来,于东京帝国大学所讲之函数论稿为底稿,经几次增删,以明斯学发达之大势,又将数百例题及习题,分载于各节各章之末,以资读者之练习. 书中插入之图皆系著者自绘,而例题和习题之中,属于著者所创造者,亦不少.

最后,书坊裳华房,为斯学计,以始终一贯之热诚,赞助本书之刊行,著者对之,深表谢意. 裳华房虽对于本书之印刷体裁,盖最善之努力,而本书之内容不能相伴,实著者学力浅陋所致,不胜遗憾. 尚望诸大家不吝指正.

竹内端三
1926年3月

◎ 目录

第1章 绪论 //1	1.1. 数学的起源 //1	1.2. 数学的分类 //2	1.3. 数学的性质 //3
§ 1 有理数 //1	1.1. 有理数的定义 //1	1.2. 有理数的性质 //2	1.3. 有理数的表示 //3
§ 2 有理数之稠密性 //3	1.1. 稠密性的定义 //3	1.2. 稠密性的性质 //4	1.3. 稠密性的应用 //5
§ 3 无理数 //4	1.1. 无理数的定义 //4	1.2. 无理数的性质 //5	1.3. 无理数的表示 //6
§ 4 实数之连续性 //8	1.1. 连续性的定义 //8	1.2. 连续性的性质 //9	1.3. 连续性的应用 //10
§ 5 集合 //10	1.1. 集合的定义 //10	1.2. 集合的性质 //11	1.3. 集合的应用 //12
§ 6 一直线上之点集合 //13	1.1. 一直线上之点集合 //13	1.2. 一直线上之点集合的性质 //14	1.3. 一直线上之点集合的应用 //15
§ 7 一平面上之点集合 //16	1.1. 一平面上之点集合 //16	1.2. 一平面上之点集合的性质 //17	1.3. 一平面上之点集合的应用 //18
习题1 //22	1.1. 习题1 //22	1.2. 习题1的解答 //23	1.3. 习题1的思考题 //24
第2章 复数 //26	2.1. 复数的引入 //26	2.2. 复数的性质 //27	2.3. 复数的应用 //28
§ 1 复数 //26	2.1.1. 复数的引入 //26	2.1.2. 复数的性质 //27	2.1.3. 复数的应用 //28
§ 2 数平面 //30	2.2.1. 数平面的定义 //30	2.2.2. 数平面的性质 //31	2.2.3. 数平面的应用 //32
§ 3 变数及函数 //33	2.3.1. 变数及函数的定义 //33	2.3.2. 变数及函数的性质 //34	2.3.3. 变数及函数的应用 //35
§ 4 一次函数 //37	3.1. 一次函数的定义 //37	3.2. 一次函数的性质 //38	3.3. 一次函数的应用 //39
§ 5 无限远点 //46	3.4. 无限远点的定义 //46	3.5. 无限远点的性质 //47	3.6. 无限远点的应用 //48
§ 6 数球面 //48	3.7. 数球面的定义 //48	3.8. 数球面的性质 //49	3.9. 数球面的应用 //50
§ 7 数平面上之点集合 //51	3.10. 数平面上之点集合的定义 //51	3.11. 数平面上之点集合的性质 //52	3.12. 数平面上之点集合的应用 //53
习题2 //53	3.13. 习题2 //53	3.14. 习题2的解答 //54	3.15. 习题2的思考题 //55
第3章 初等函数 //57	4.1. 初等函数的定义 //57	4.2. 初等函数的性质 //58	4.3. 初等函数的应用 //59
§ 1 代数函数 //57	4.1.1. 代数函数的定义 //57	4.1.2. 代数函数的性质 //58	4.1.3. 代数函数的应用 //59
§ 2 指数函数 //58	4.2.1. 指数函数的定义 //58	4.2.2. 指数函数的性质 //59	4.2.3. 指数函数的应用 //60
§ 3 三角函数 //60	4.3.1. 三角函数的定义 //60	4.3.2. 三角函数的性质 //61	4.3.3. 三角函数的应用 //62
§ 4 对数函数 //63	5.1. 对数函数的定义 //63	5.2. 对数函数的性质 //64	5.3. 对数函数的应用 //65
§ 5 幂 //65	5.4. 幂的定义 //65	5.5. 幂的性质 //66	5.6. 幂的应用 //67
§ 6 反三角函数 //67	5.7. 反三角函数的定义 //67	5.8. 反三角函数的性质 //68	5.9. 反三角函数的应用 //69
§ 7 初等函数 //68	6.1. 初等函数的定义 //68	6.2. 初等函数的性质 //69	6.3. 初等函数的应用 //70
习题3 //70	6.4. 习题3 //70	6.5. 习题3的解答 //71	6.6. 习题3的思考题 //72

第4章 微分法 //73

- § 1 极限值 //73
- § 2 函数之连续性 //75
- § 3 微系数 //78
- § 4 函数之正则性 //81
- § 5 关于正则函数之定理 //85
- § 6 正则函数之特征 //90

习题4 //94

第5章 积分法 //97

- § 1 定积分 //97
- § 2 关于定积分之定理 //101
- § 3 线积分 //105
- § 4 Cauchy 氏之定理 //113
- § 5 实数积分之计算 //122
- § 6 正则函数之积分表示 //128
- § 7 不定积分 //132
- § 8 正则函数之导函数 //134

习题5 //136

第6章 幂级数 //141

- § 1 复数级数 //141
- § 2 函数项之级数 //143
- § 3 均匀收敛级数 //146
- § 4 幂级数 //148
- § 5 Taylor 氏之展开 //153
- § 6 一致之定理 //156
- § 7 解析函数 //160
- § 8 存在定理 //163
- § 9 广义之解析接续 //169
- § 10 Vitali 氏之定理 //170

习题6 //174

第7章 奇点 //179

- § 1 一价函数之奇点 //179
- § 2 Laurent 氏之展开 //184

§ 3	关于无限远点之规约	//188
§ 4	关于极之定理	//191
§ 5	有理函数	//198
§ 6	Mittag-Leffler 氏之定理	//202
§ 7	超越整函数	//207
§ 8	补遗	//210
§ 9	Runge 氏之定理	//213
习题 7		//217
编辑手记		//221

第 八 章 整 函 数

在前一章中，我们研究了复数平面上的单连通区域。在本章中，我们将主要研究那些在复数平面上具有某些特殊性质的单连通区域。首先，我们来讨论那些在复数平面上具有“有限个奇点”的单连通区域。对于这样的区域，我们可以利用复变函数论中的基本定理，如留数定理、柯西积分公式等，来解决许多问题。例如，在复数平面上，我们可以利用留数定理来计算某些积分，或者利用柯西积分公式来求解某些微分方程。此外，我们还可以利用复变函数论中的其他一些方法，如复变函数的级数表示法、复变函数的积分表示法等，来解决更多的问题。

在复数平面上，我们可以利用复变函数论中的各种方法，来解决许多问题。例如，在复数平面上，我们可以利用留数定理来计算某些积分，或者利用柯西积分公式来求解某些微分方程。此外，我们还可以利用复变函数论中的其他一些方法，如复变函数的级数表示法、复变函数的积分表示法等，来解决更多的问题。

绪论

第 一 章

§ 1 有理数

正负整数与分数之全体及零总称之为有理数。有理数之全体成有大小次序之集合^①，各数之间得施用加减乘除四则运算。今设 a, b, c 等表示有理数，其大小及关于四则运算之主要性质，列举如下：

(大小) a 与 b 表示同一之有理数，则以 $a = b$ 记之，故必有 $a = a$ 。又 $a = b, b = c$ ，则 $a = c$ 也。

(A) 若 $a \neq b$ ，则必有 $a < b$ 或 $b < a$ ($a < b$ 或以 $b > a$ 记之， $b < a$ 或以 $a > b$ 记之)。

(B) 若 $a < b$ ，则 $a \neq b$ 。

(C) 若 $a < b, b < c$ ，则 $a < c$ 。

两个有理数 a, b 之间仅有下列三种关系

$$a > b, a = b, a < b$$

中之一种可成立，观上述性质之结果，容易证明。何则，若 $a \neq b$ ，则从(A)可知必有 $a < b$ 或 $b < a$ 。而此中任何一事均不能与 $a = b$ 并存，观(B)可知矣。若 $a < b$ 且 $b < a$ ，则由(C)可知 $a < a$ ，由(B)可知 $a \neq a$ ，其不合理也明甚。故 a, b 两数间，仅限于 $a < b, a = b, a > b$ 之中唯一一个关系成立。

以上所用记号“ $<$ ”“ $=$ ”“ $>$ ”表示记号左边之数“小于”“等于”“大于”记号右边之数。上述三个性质(A)(B)(C)不限于大小关系，例如以“右”“同位置”“左”代替“大”“等”“小”亦决无不合。故各有理数以左右方向之一直线上之点代表之，则各数间之大小关系，以各代表点位

^① 此处所谓集合仅谓物件之聚集。详细当于 § 5 论之。

置之左右观之，了如指掌矣。

(四则)(I)两个有理数 a, b 之间得施用加减乘除

$$a+b, a-b, a \times b, a \div b$$

各得一有理数。但在除法中， b 需不等于零。

换句话说，以零为除数之除法摒弃之后，有理数范围内之四则运算为普遍的。

(II) a 和 b 为已知之数，则

$$a+b, a-b, a \times b, a \div b \quad (b \neq 0)$$

各得唯一之值。

换句话说，有理数范围内四则运算之结果，为唯一的决定也。

(III) 交换律

$$a+b=b+a$$

$$a \times b=b \times a$$

(IV) 结合律

$$a+b+c=a+(b+c)$$

$$a \times b \times c=a \times (b \times c)$$

(V) 分配律

$$a \times (b+c)=(a \times b)+(a \times c)$$

$$(b+c) \times a=(b \times a)+(c \times a)$$

(VI) 加法与减法各为反算法，乘法与除法亦各为反算法，即

$$a+b-b=a, a-b+b=a$$

$$a \times b \div b=a, a \div b \times b=a$$

(VII) 从 $a < b, a = b, a > b$ ，按次得

$$a+c < b+c, a+c = b+c, a+c > b+c$$

若 $c > 0$ ，与前述同样，从 $a < b, a = b, a > b$ ，按次得

$$a \times c < b \times c, a \times c = b \times c, a \times c > b \times c$$

若 $c < 0$ ，则

$$a \times c > b \times c, a \times c = b \times c, a \times c < b \times c$$

若 $c = 0$ ，则

$$a \times c = b \times c = 0$$

从上述诸性质可推得种种恒等式及不等式。吾人于初等代数学中熟知之矣。

吾人当本节结束之际，注意下列一事。

假设 a 与 b 施用四则运算之结果得 c 。反之，若仅知 c ，欲因之唯一的决定 a 及 b ，则不可能。通常 a, b 之中一数与以任意之值，则其余一数亦即决定。唯于

下列之情形, a 与 b 有限制.

于式 $a \times b = c$ 中, 有:

$c \neq 0$ 时, $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$;

$c = 0$ 时, $a = 0$ 或 $b = 0$.

于式 $a \div b = c$ 中, 有:

无论 c 为何数 $b \neq 0$;

若 $c = 0$, 则 $a = 0$.

例题 试根据本节列举之诸性质, 证明下列定理:

$$(1) a < b \text{ 时, } a < \frac{a+b}{2} < b;$$

$$(2) a^2 + b^2 = 0 \text{ 时, } a = 0 \text{ 且 } b = 0.$$

§ 2 有理数之稠密性

任意不相同两有理数之间至少有一个有理数. 例如 a, b 为不相同两有理数, 则 $\frac{a+b}{2}$ 为 a 与 b 之间一有理数(§ 1 之例题(1)). 取 a 与 b 之间之一有理数 c , 则 a 与 c 之间及 c 与 b 之间至少各有一个有理数. 依同理反复推论之, 故知结果为两相异有理数之间有无数有理数存在.

此性质约言之, 称有理数之全体成稠密之集合.

今设 a 为一有理数, $x < a$ 之一切有理数 x 之集合名之曰 A_1 , 则 A_1 之中无最大之数. 何则, 设 A_1 之最大之数为 g , 则 g 与 a 之间应有有理数存在, 取其中一数 g' , 则 $g < g' < a$, 即 A_1 之中有大于 g 之有理数 g' 存在, 即 g 不得为 A_1 之最大数也. 故 A_1 为无最大数之集合.

按同理 $a < x$ 之一切有理数 x 之集合名之曰 A_2 , 则 A_2 之中无最小数.

若 A_1 之中加入 a 称为 \bar{A}_1 , 则 \bar{A}_1 以 a 为其最大数. 以同法 A_2 之中加入 a 称为 \bar{A}_2 , 则 \bar{A}_2 以 a 为其最小数.

取 A_1 与 \bar{A}_2 (或 \bar{A}_1 与 A_2) 一对集合考之, 有下列性质.

(1) 此一对集合含有一切有理数, 即任意有理数必含于 A_1 或 \bar{A}_2 (\bar{A}_1 或 A_2) 中之一也.

(2) 此一对集合皆决不为空, 即 A_1 与 \bar{A}_2 (\bar{A}_1 与 A_2) 皆实在含有有理数也.

换句话说, 有理数全体, 非含于 A_1 或 \bar{A}_2 (\bar{A}_1 或 A_2) 之一方, 实为此两集合所分割也.

(3) 属于集合一方 A_1 (或 \bar{A}_1) 之有理数, 皆小于属于另一方 \bar{A}_2 (或 A_2) 之有理数.

有理数全体分为两集合, 兼有上述之性质, 则此一对集合称之曰有理数之切断(或截断). 此切断以 (A_1, \bar{A}_2) 或 (\bar{A}_1, A_2) 之记号表之.

以某种方法有理数之切断 (B_1, B_2) , 就 B_1 之最大数与 B_2 之最小数存在否讨论之, 不出下列三者:

(i) B_1 有最大数而 B_2 无最小数, 或 B_1 无最大数而 B_2 有最小数;

(ii) B_1 有最大数同时 B_2 亦有最小数;

(iii) B_1 无最大数 B_2 亦无最小数.

前举之例 (A_1, \bar{A}_2) 与 (\bar{A}_1, A_2) 皆属于 (i), 故 (i) 得实在存在. (ii) 不能实在存在. 何则, 设 B_1 之最大数为 g , B_2 之最小数为 l , 则从切断之性质 (3) 得 $g < l$. 然有理数全体为稠密之集合, 故 g 与 l 之间, 当有有理数存在, 而此等有理数, 既不属于 B_1 又不属于 B_2 , 即 B_1 与 B_2 不能含有有理数之全体, 此与 (B_1, B_2) 为有理数之切断之假定相反.

更就 (iii) 考之, 前例之中, 取 A_1, A_2 作 (A_1, A_2) , 则适与 (iii) 相同. 然 A_1, A_2 之中, 均不含 a , 故 (A_1, A_2) 非有理数全体之切断, 以其缺 a 之一数也. 若填补所缺之一数 a , 则实与 (i) 相同矣. 由此观之, 若有理数之切断, 形成 (iii) 之情况, 则其中必有一间隙, 可以插入一新数, 吾人填补此新数之后, 其切断之状态与 (i) 相同, 亦可知矣.

然 (iii) 之切断成立与否, 亦以后必须解决之问题也.

例题 从稠密性证明下列事项:

(1) 与已知有理数任何接近之有理数必存在;

(2) 绝对值任何小之有理数必存在.

§ 3 无 理 数

今设 $x^2 < 2$ 之一切有理数 x 之集合为 B_1 , $x^2 > 2$ 之一切有理数 x 之集合设为 B_2 (适合 $x^2 = 2$ 之有理数 x 不存在, 为吾人已知之事实), 则 (B_1, B_2) 作有理数之切断, 而 § 2 之条件 (1) (2) (3) 皆得适合, 容易证明.

然 B_1 不得有最大数之集合也. 何则, 设 B_1 之中, 取任意有理数 m , 则 $2 - m^2 > 0$, 故适合下列不等式之正有理数 h 必存在 ($\S 2$ 例题 (2))

$$h < m, h < \frac{2 - m^2}{3m}$$

然

$$(m+h)^2 = m^2 + (2m+h)h < m^2 + 3mh < 2$$

即 B_1 之中有较 m 更大之有理数 $m+h$ 存在也, 故 B_1 不得有最大数.

用同法, 可证 B_2 不得有最小数. 由此观之, 切断 (B_1, B_2) 与 §2 所举之 (iii) 相当, 此例表示稠密之有理数之间, 尚有可以插入一新数之间隙也.

此种新数称之曰无理数.

凡有理数之切断 (B_1, B_2) 之中, B_1 无最大数, B_2 无最小数时, 吾人常于其中得插入一无理数. 换句话说, 无理数者, 充填有理数与有理数之间所存在之空隙之数也. 故欲表示一无理数, 即以引起此无理数的有理数之切断表之, 例如切断 (B_1, B_2) 之间可插入无理数设为 β , 则以

$$\beta = (B_1, B_2)$$

记之.

若有理数做彼此记法而应用 §2 之记号, 则可写为

$$a = (A_1, \bar{A}_2) \text{ 或 } a = (\bar{A}_1, A_2)$$

两者均可用. 然通常有理数之任意切断常指一有理数或无理数而言, 其数称之曰该切断所定之数.

有理数与无理数总称之为实数. 有理数之切断, 定一实数, 反之, 一实数常得以有理数切断定之.

今述关于无理数之大小及四则运算之定义于下.

(大小) 无理数 β 从有理数之切断 (B_1, B_2) 决定之际, 一有理数 a 因属于 B_1 或 B_2 , 得决定

$$\beta > a \text{ 或 } \beta < a$$

无理数与有理数之间之大小因之决定.

今定无理数彼此之大小, 设

$$\beta = (B_1, B_2), \gamma = (C_1, C_2)$$

为两无理数, B_1 与 C_1 完全一致, 则 $\beta = \gamma$. 若 B_1 与 C_1 非完全一致, 属于 B_1 之有理数, 有不属于 C_1 者, 或属于 C_1 之有理数, 有不属于 B_1 者, 前者为 $\beta > \gamma$, 后者为 $\beta < \gamma$.

注 1 上述之 β, γ 切勿忘其为无理数. 若 β, γ 为有理数, 例如

$$\beta = (\bar{A}_1, A_2), \gamma = (A_1, \bar{A}_2)$$

属于 \bar{A}_1 之有理数有不属于 A_1 者, 然非 $\beta > \gamma$, 实 $\beta = \gamma$ 也.

据此定义, 则 §1 所举关于有理数之大小之性质 (A) (B) (C) 适用于实数全体矣.

定理 1 不相等两实数之间, 有无数有理数存在.

设不等之两实数为 α, β , 而 $\alpha < \beta$.

若 α, β 均为有理数, 则从有理数之稠密性, 本定理之成立, 无待证明.

若 α 为有理数, β 为无理数, 设定 β 之有理数之切断为 (B_1, B_2) , 则 α 当属于 B_1 , 然 B_1 无最大之数, 故 B_1 之中, 必有有理数大于 α . 设 b 为其中之一数, 两有理数 α, b 之间有无数有理数, 故 α, β 之间有无数有理数. α 为无理数, β 为有理数时, 亦得用同法证之.

再设 α, β 均为无理数, 则自上述关于大小之定义, 必有

$$\alpha < a < \beta$$

之有理数 a 存在. 然据上述证明 α, a 之间及 a, β 之间有无数有理数存在, 故 α, β 之间有无数有理数存在.

定理 2 对于任意实数 a , 必有

$$a_1 < a < a_2, a_2 - a_1 < \varepsilon$$

之有理数 a_1, a_2 存在, 式中 ε 为正有理数.

何则, 取小于 $\frac{\varepsilon}{2}$ 之正有理数 ε' , 作无穷数列

$$\cdots, -3\varepsilon', -2\varepsilon', -\varepsilon', 0, \varepsilon', 2\varepsilon', 3\varepsilon', \dots$$

则数 a 或与其中之一数合一, 或在相邻两数之间. 例如

$$n\varepsilon' \leq a < (n+1)\varepsilon'$$

则假设

$$\begin{cases} a_1 = (n-1)\varepsilon' \\ a_2 = (n+1)\varepsilon' \end{cases}$$

可也.

定理 3 仅由有理数所成之两集合 A_1, A_2 (未必含有理数之全部), 假定适合下列两条件:

(i) 取属于 A_1 之一有理数 a_1 , 属于 A_2 之一有理数 a_2 , 则必 $a_1 < a_2$;

(ii) 对于任意正数 ε , 取 a_1, a_2 适合 $a_2 - a_1 < \varepsilon$.

则必有实数存在不小于 A_1 之任何数, 亦不大于 A_2 之任何数, 而此等实数仅有一个.

今于一切有理数之中, 大于 A_1 之任何有理数之和(例如属于 A_2 之有理数)之集合为 B_2 , 与此相反之数之集合为 B_1 , 则 B_1 与 B_2 显然作一有理数之切断. 设 β 为此切断所定之实数, 则 β 不小于 A_1 之任何数亦不大于 A_2 之任何数. 何则, A_1, A_2 按次含于 B_1, B_2 之中, 而 β 不小于 B_1 之任何数, 亦不大于 B_2 之任何数故也.

假设此等数除 β 外尚有他数 β' , 假定 $\beta < \beta'$, 则适合

$$\beta < b_1 < b_2 < \beta'$$

之两有理数 b_1, b_2 必存在(定理 1), 则 A_1, A_2 之中所取之任意数 a_1, a_2 必适合

$$a_1 < b_1 < b_2 < a_2$$

即

$$b_2 - b_1 < a_2 - a_1$$

此与假定(ii)相反.

若 $\beta > \beta'$, 亦得同样之结论. 故 β 不存在.

注 2 β 有属于 A_1 或 A_2 者, 有不属于 A_1, A_2 者. 若属于 A_1 , 则为 A_1 之最大数, 若属于 A_2 , 则为 A_2 之最小数.

A_1 与 A_2 未必含有有理数之全体, 故不能适合 §1 所述切断之条件(1). 然因假定有(ii)之条件, 故得决定一实数 β . 因此, 以后此等两集合, 称为广义的有理数切断, 以 (A_1, A_2) 之记号表之.

(四则) 假设两实数 α, β 从下列有理数之切断决定者

$$\alpha = (A_1, A_2), \beta = (B_1, B_2)$$

则其加法之定义如下

$$\alpha + \beta = (A_1 + B_1, A_2 + B_2)$$

式中 $A_1 + B_1$ 者, 属于 A_1 之数与属于 B_1 之数所成一切之和之集合; $A_2 + B_2$ 准此. $(A_1 + B_1, A_2 + B_2)$ 作广义的有理数之切断, 可以定理 2 与定理 3 容易证明, 故 $\alpha + \beta$ 为唯一的决定之实数也.

欲定义减法, 先考 $(-B_2, -B_1)$ 之切断, 其所定义之数, 名之曰 β 之反号数, 以 $-\beta$ 表之, $\alpha - \beta$ 定义为 α 与 $-\beta$ 之和. 故

$$\alpha - \beta = (A_1 - B_2, A_2 - B_1)$$

欲定义乘法, 先取 $\alpha > 0, \beta > 0$ 时考之, A_1, A_2, B_1, B_2 皆为正有理数所成之集合, 吾人定义

$$\alpha\beta = (A_1 B_1, A_2 B_2)$$

此式之右边作广义的切断, 容易证明^①.

若 α 与 β 之一方或双方小于 0, 设其反号数为 α' 与 β' , 则

$$\alpha = (-\alpha') \quad (\alpha' > 0)$$

$$\beta = (-\beta') \quad (\beta' > 0)$$

吾人定义

$$(-\alpha')\beta = -\alpha'\beta$$

$$\alpha(-\beta') = -\alpha\beta'$$

$$(-\alpha')(-\beta') = \alpha'\beta'$$

又 α 与 β 之一方或双方为 0, 则必有 $\alpha\beta = 0$.

① $A_2 B_2 - A_1 B_1 = (A_2 - A_1) B_2 + A_1 (B_2 - B_1)$.

最后欲定义除法,先设 $\alpha > 0, \beta > 0$, 则 A_1, A_2, B_1, B_2 皆由正有理数所组成.

切断 $\left(\frac{1}{B_2}, \frac{1}{B_1}\right)$ 称为 B 之反数, 而 $\frac{\alpha}{\beta}$ 定义为 α 与 β 之反数之积, 即

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{A_1}{B_2}, \frac{A_2}{B_1}\right)$$

$\alpha < 0$ 或 $\beta < 0$ 时, 用乘法同样之意义

$$\frac{-\alpha'}{\beta} = -\frac{\alpha'}{\beta}, \quad \frac{\alpha}{-\beta'} = -\frac{\alpha}{\beta'}, \quad \frac{-\alpha'}{-\beta'} = \frac{\alpha'}{\beta'}$$

又 $\beta \neq 0$ 时, 定义

$$\frac{0}{\beta} = 0$$

$\beta = 0$ 时 $\frac{\alpha}{\beta}$ 为无意义之式.

注 3 以上所定义四则运算之结果, α, β 皆为有理数时, 亦包含在内, 关于有理数之四则 § 1(I) 至(VII) 所举之诸性质对于实数全体亦得成立, 此为学者之最佳演习问题也.

注 4 如下列想法即生误谬

$$\alpha - \beta = (A_1 - B_1, A_2 - B_2)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}\right)$$

因此两式之右边不能形成切断也.

例题 1 试证不相等两实数之间, 有无数有理数存在.

例题 2 试证本节中所定义之 β 之反号数等于自 0 减 β 之差, β 之反数等于 β 除 1 之商.

§ 4 实数之连续性

吾人前述, 因有理数之切断, 知其间尚有空隙存在, 而以无理数充填之. 然则有理数与无理数所合成实数全体之间, 是否尚有空隙存在. 换句话说, 实数全体分为 A_1, A_2 两集合, 属于 A_1 之一切数小于 A_2 之数时, A_1 无最大数, A_2 无最小数乎否乎? 今讨论如下.

今设 A_1 之中所含有理数之全体为 B_1 , A_2 之中所含有理数之全体为 B_2 , 则 (B_1, B_2) 成一有理数之切断, 而此切断定一实数 β , β 必含于 A_1 或 A_2 之中. 若 β 属于 A_1 , 则为 A_1 最大数. 何则, 若 A_1 之中有大于 β 之数, 设此数为 a , 则 β 与 a 之间当有无数有理数. 而此等有理数因小于 a , 故必属于 A_1 , 同时此等有理数因

大于 β , 故必属于 B_2 , 成矛盾矣. 故 A_1 之中不得有大于 β 之数. 依同理, 若 β 属于 A_2 , 则必为其最小数, 亦得证明.

因得下列定理.

定理 1 实数全体分为 A_1 及 A_2 两集合, 令属于 A_1 之一切数小于属于 A_2 之数, 则必 A_1 有最大数而 A_2 无最小数, 或 A_1 无最大数而 A_2 有最小数.

因此可知实数全体之间, 吾人所谓疑问之空隙, 不得存在. 此性质称之曰实数连续性.

今后吾人对于切断一语将以广义的用之, A_1 之最大数或 A_2 之最小数称之为实数全体之切断(A_1, A_2)所决定之数.

微积分学中所常用下列之定理, 可自实数连续性, 直接求出之结果也.

定理 2 变数 x 单调地增大(或减少)而不能超过某定数 M , 则必有一定数 l 存在, 如下述:

(i) x 决不大于(或小于) l ;

(ii) 设 ε 为任何小正数, x 大于(或小于) $l - \varepsilon$ (或 $(l + \varepsilon)$).

今就 x 单调地增大时证明之(单调地减少时可用同样论法).

分实数全体为 A_1, A_2 两集合, 比变数 x 所取之任何值更大之一切数(例如大于 M 之数)今属于 A_2 , 反是之数, 今属于 A_1 . 则从实数之连续性, 或 A_1 有最大数, 或 A_2 有最小数. 设此数为 α , 则 α 即本定理所说之 l 也. 何则, 若 x 取大于 α 之值, 则此值与 α 之间一切实数皆小于 x 所取之某数而皆属于 A_2 , 故不合理; 又设 x 不取大于 $\alpha - \varepsilon$ 之值, 则 $\alpha - \varepsilon$ 与 α 之间之一切实数皆属于 A_2 而皆小于 α , 亦不合理. 因此 α 必适合(i)(ii)两条件, 故 α 即 l 也.

定数 l 仅限于一个, 可如下法证之. 假定如 l 之数有两个, 其小者为 l_1 , 大者为 l_2 , 则从关于 l_1 之条件(i)论之, l_1 与 l_2 之间不得有 x 之值. 然后关于 l_2 条件(ii)论之, l_1 与 l_2 之间不得不有 x 之值. 此显然自相矛盾.

系 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 之各项顺次单调地增大(减少)而不超过某定数, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

有有限确定之极限值存在.

此外关于实数解析之种种事项, 非本书之目的, 故不详论. 属于微积分学之普通知识本书中作为读者之所已知者, 常常引用之(其二三重要结果揭于本章之习题中).

例题 交换项无穷级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$$

之中

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \cdots \geq u_n \geq \cdots > 0$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

则此级数为收敛,试证明之.

§ 5 集 合

数学中之所谓集合云者,若干个物件之团体,而有判定任意一物件属于此团体与否(至少理论上)之定义,存在者也.而集合中所属之各个物件,称集合之元素.

例如一切有理数,绝对值不超过 10 之一切整数,已知直线上之所有点等,各成一集合.反之,一切简单分数,不甚长之一切线段等其标准不明,故不能作一集合观之.

有甲乙两集合,用某种方法得使甲之一元素与乙之一元素对应,反之,乙之一元素亦得与甲之一元素对应时,称甲与乙成一一对应之集合,或简称甲与乙对等.

例 1 六角形之一切对角线与

$$1, 2, 3, \dots, 8, 9$$

自然数之集合对等.

六角形对角线之数有 9, 即表此事实也.

例 2 有两线段 AB, CD . 今设直线 AC, BD 相交于 E . 过 E 之任意直线与 AB, CD 之交点以 P, Q 表之(图 1), 则对于 AB 上之一点 P , 必有 CD 上之一点 Q 与之相应; 反之, 对于 CD 上之一点 Q , 必有 AB 上之一点 P 与之相应.

故线段 AB 上一切点与线段 CD 上一切点成对等集合.

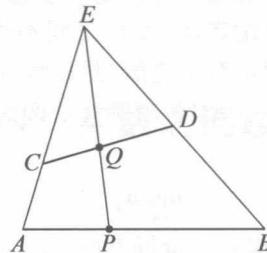


图 1

例 3 一切自然数之集合与一切正偶数之集合,如下表,成一一对应,故此两集合成对等.

自然数	1	2	3	4	...	n	...
正偶数	2	4	6	8	...	$2n$...