世界数学元典丛书

“十二五”国家重点图书

Function Theory

函数论

[日] 竹内端三 著 胡浚济 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

世界数学元典丛书

“十二五”国家重点图书

函数论

Function Theory

[日]竹内端三 著

胡浚济 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书以实数和复数的理论知识为基础，系统地介绍了初等函数、微分法、积分法、幂级数，以及奇点等重要理论，包括函数的连续性、可微性、可积性及其定理性质，突出了函数论在数学中的重要地位. 内容丰富，叙述详尽.

本书适合高等院校师生及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

函数论/(日)竹内端三著；胡浚济译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.3

ISBN 978-7-5603-7143-6

Ⅰ. ①函…　Ⅱ. ①竹…②胡…　Ⅲ. ①函数论　Ⅳ. ①O174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 308402 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　陈雅君
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨圣铂印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 15.75　字数 283 千字
版　　次　2018 年 3 月第 1 版　2018 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-7143-6
定　　价　78.00 元

◎原序

本书与著者往日所刊行之高等微分学及高等积分学之程度相衔接,述关于复数函数之普遍理论并述椭圆函数之理论作为其应用.

时至今日,函数之概念于数学中占重要之地位,已不待论.而于数学中所常用,所谓解析函数者,其深远之本性,经视为复变数之函数而研究之,方得阐明,此亦近代学者所不容疑之点也.所以不但专习纯粹数学之士,即有志于理化学工程学之学者,苟欲用微积分学以上之数理,不得不借复数函数论为阶梯.一旦领悟复数活用之妙味,不但因此得明了初等函数之真相,更进而欲自由使用椭圆函数,盖亦非难事矣.本书之目的,实欲使读者得达此境地也.

本书著者,以大正十一年以来,于东京帝国大学所讲之函数论稿为底稿,经几次增删,以明斯学发达之大势,又将数百例题及习题,分载于各节各章之末,以资读者之练习.书中插入之图皆系著者自绘,而例题和习题之中,属于著者所创造者,亦不少.

最后,书坊裳华房,为斯学计,以始终一贯之热诚,赞助本书之刊行,著者对之,深表谢意.裳华房虽对于本书之印刷体裁,盖最善之努力,而本书之内容不能相伴,实著者学力浅陋所致,不胜遗憾.尚望诸大家不吝指正.

竹内端三

1926年3月

◎

目录

绪论

第1章

§1 有 理 数

正负整数与分数之全体及零总称之曰有理数.有理数之全体成有大小次序之集合①,各数之间得施用加减乘除四则运算.今设 a,b,c 等表示有理数,其大小及关于四则运算之主要性质,列举如下:

(大小) a 与 b 表示同一之有理数,则以 $a=b$ 记之,故必有 $a=a$.又 $a=b,b=c$,则 $a=c$ 也.

(A)若 $a\neq b$,则必有 $a<b$ 或 $b<a$($a<b$ 或以 $b>a$ 记之,$b<a$ 或以 $a>b$ 记之).

(B)若 $a<b$,则 $a\neq b$.

(C)若 $a<b,b<c$,则 $a<c$.

两个有理数 a,b 之间仅有下列三种关系

$$a>b,a=b,a<b$$

中之一种可成立,观上述性质之结果,容易证明.何则,若 $a\neq b$,则从(A)可知必有 $a<b$ 或 $b<a$.而此中任何一事均不能与 $a=b$ 并存,观(B)可知矣.若 $a<b$ 且 $b<a$,则由(C)可知 $a<a$,由(B)可知 $a\neq a$,其不合理也明甚.故 a,b 两数间,仅限于 $a<b,a=b,a>b$ 之中唯一个关系成立.

以上所用记号"<""=""$>$"表示记号左边之数"小于""等于""大于"记号右边之数.上述三个性质(A)(B)(C)不限于大小关系,例如以"右""同位置""左"代替"大""等""小"亦决无不合.故各有理数以左右方向之一直线上之点代表之,则各数间之大小关系,以各代表点位

① 此处所谓集合仅谓物件之聚集.详细当于§5论之.

置之左右观之,了如指掌矣.

(四则)(Ⅰ)两个有理数 a,b 之间得施用加减乘除

$$a+b,a-b,a\times b,a\div b$$

各得一有理数. 但在除法中,b 需不等于零.

换句话说,以零为除数之除法摒弃之后,有理数范围内之四则运算为普遍的.

(Ⅱ)a 和 b 为已知之数,则

$$a+b,a-b,a\times b,a\div b\quad(b\neq 0)$$

各得唯一之值.

换句话说,有理数范围内四则运算之结果,为唯一的决定也.

(Ⅲ)交换律

$$a+b=b+a$$

$$a\times b=b\times a$$

(Ⅳ)结合律

$$a+b+c=a+(b+c)$$

$$a\times b\times c=a\times(b\times c)$$

(Ⅴ)分配律

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$$

$$(b+c)\times a=(b\times a)+(c\times a)$$

(Ⅵ)加法与减法各为反算法,乘法与除法亦各为反算法,即

$$a+b-b=a,a-b+b=a$$

$$a\times b\div b=a,a\div b\times b=a$$

(Ⅶ)从 $a<b,a=b,a>b$,按次得

$$a+c<b+c,a+c=b+c,a+c>b+c$$

若 $c>0$,与前述同样,从 $a<b,a=b,a>b$,按次得

$$a\times c<b\times c,a\times c=b\times c,a\times c>b\times c$$

若 $c<0$,则

$$a\times c>b\times c,a\times c=b\times c,a\times c<b\times c$$

若 $c=0$,则

$$a\times c=b\times c=0$$

从上述诸性质可推得种种恒等式及不等式. 吾人于初等代数学中熟知之矣.

吾人当本节结束之际,注意下列一事.

假设 a 与 b 施用四则运算之结果得 c. 反之,若仅知 c,欲因之唯一的决定 a 及 b,则不可能. 通常 a,b 之中一数与以任意之值,则其余一数亦即决定. 唯于

下列之情形,a 与 b 有限制.

于式 $a\times b=c$ 中,有:

$c\neq0$ 时,$a\neq0$ 且 $b\neq0$;

$c=0$ 时,$a=0$ 或 $b=0$.

于式 $a\div b=c$ 中,有:

无论 c 为何数 $b\neq0$;

若 $c=0$,则 $a=0$.

例题 试根据本节列举之诸性质,证明下列定理:

(1)$a<b$ 时,$a<\dfrac{a+b}{2}<b$;

(2)$a^2+b^2=0$ 时,$a=0$ 且 $b=0$.

§2 有理数之稠密性

任意不相同两有理数之间至少有一个有理数. 例如 a,b 为不相同两有理数,则$\dfrac{a+b}{2}$为 a 与 b 之间一有理数(§1 之例题(1)). 取 a 与 b 之间之一有理数 c,则 a 与 c 之间及 c 与 b 之间至少各有一个有理数. 依同理反复推论之,故知结局为两相异有理数之间有无数有理数存在.

此性质约言之,称有理数之全体成稠密之集合.

今设 a 为一有理数,$x<a$ 之一切有理数 x 之集合名之曰 A_1,则 A_1 之中无最大之数. 何则,设 A_1 之最大之数为 g,则 g 与 a 之间应有有理数存在,取其中一数 g',则 $g<g'<a$,即 A_1 之中有大于 g 之有理数 g'存在,即 g 不得为 A_1 之最大数也. 故 A_1 为无最大数之集合.

按同理 $a<x$ 之一切有理数 x 之集合名之曰 A_2,则 A_2 之中无最小数.

若 A_1 之中加入 a 称为 $\overline{A}_1$,则 $\overline{A}_1$ 以 a 为其最大数. 以同法 A_2 之中加入 a 称为 $\overline{A}_2$,则 $\overline{A}_2$ 以 a 为其最小数.

取 A_1 与 $\overline{A}_2$(或 $\overline{A}_1$ 与 A_2)一对集合考之,有下列性质.

(1)此一对集合含有一切有理数,即任意有理数必含于 A_1 或 $\overline{A}_2$($\overline{A}_1$ 或 A_2)中之一也.

(2)此一对集合皆决不为空,即 A_1 与 $\overline{A}_2$($\overline{A}_1$ 与 A_2)皆实在含有有理数也. 换句话说,有理数全体,非含于 A_1 或 $\overline{A}_2$($\overline{A}_1$ 或 A_2)之一方,实为此两集合所分割也.

(3)属于集合一方 A_1(或 $\overline{A}_1$)之有理数,皆小于属于另一方 $\overline{A}_2$(或 A_2)之有理数.

有理数全体分为两集合,兼有上述之性质,则此一对集合称之曰有理数之切断(或截断). 此切断以$(A_1,\overline{A}_2)$或$(\overline{A}_1,A_2)$之记号表之.

以某种方法有理数之切断(B_1,B_2),就 B_1 之最大数与 B_2 之最小数存在否讨论之,不出下列三者:

(ⅰ)B_1 有最大数而 B_2 无最小数,或 B_1 无最大数而 B_2 有最小数;

(ⅱ)B_1 有最大数同时 B_2 亦有最小数;

(ⅲ)B_1 无最大数 B_2 亦无最小数.

前举之例$(A_1,\overline{A}_2)$与$(\overline{A}_1,A_2)$皆属于(ⅰ),故(ⅰ)得实在存在.(ⅱ)不能实在存在. 何则,设 B_1 之最大数为 g,B_2 之最小数为 l,则从切断之性质(3)得 $g<l$. 然有理数全体为稠密之集合,故 g 与 l 之间,当有有理数存在,而此等有理数,既不属于 B_1 又不属于 B_2,即 B_1 与 B_2 不能含有有理数之全体,此与(B_1,B_2)为有理数之切断之假定相反.

更就(ⅲ)考之,前例之中,取 A_1,A_2 作(A_1,A_2),则适与(ⅲ)相同. 然 A_1,A_2 之中,均不含 a,故(A_1,A_2)非有理数全体之切断,以其缺 a 之一数也. 若填补所缺之一数 a,则实与(ⅰ)相同矣. 由此观之,若有理数之切断,形成(ⅲ)之情况,则其中必有一间隙,可以插入一新数,吾人填补此新数之后,其切断之状态与(ⅰ)相同,亦可知矣.

然(ⅲ)之切断成立与否,亦以后必须解决之问题也.

例题 从稠密性证明下列事项:

(1)与已知有理数任何接近之有理数必存在;

(2)绝对值任何小之有理数必存在.

§3 无 理 数

今设 $x^2<2$ 之一切有理数 x 之集合为 B_1,$x^2>2$ 之一切有理数 x 之集合设为 B_2(适合 $x^2=2$ 之有理数 x 不存在,为吾人已知之事实),则(B_1,B_2)作有理数之切断,而§2之条件(1)(2)(3)皆得适合,容易证明.

然 B_1 不得有最大数之集合也. 何则,设 B_1 之中,取任意有理数 m,则 $2-m^2>0$,故适合下列不等式之正有理数 h 必存在(§2例题(2))

$$h<m,h<\frac{2-m^2}{3m}$$

然

$$(m+h)^2=m^2+(2m+h)h<m^2+3mh<2$$

即 B_1 之中有较 m 更大之有理数 $m+h$ 存在也,故 B_1 不得有最大数.

用同法,可证 B_2 不得有最小数. 由此观之,切断 (B_1,B_2) 与 §2 所举之(ⅲ)相当,此例表示稠密之有理数之间,尚有可以插入一新数之间隙也.

此种新数称之曰无理数.

凡有理数之切断 (B_1,B_2) 之中,B_1 无最大数,B_2 无最小数时,吾人常于其中得插入一无理数. 换句话说,无理数者,充填有理数与有理数之间所存在之空隙之数也. 故欲表示一无理数,即以引起此无理数的有理数之切断表之,例如切断 (B_1,B_2) 之间可插入无理数设为 β,则以

$$\beta=(B_1,B_2)$$

记之.

若有理数做彼此记法而应用 §2 之记号,则可写为

$$a=(A_1,\overline{A}_2)\text{ 或 }a=(\overline{A}_1,A_2)$$

两者均可用. 然通常有理数之任意切断常指一有理数或无理数而言,其数称之曰该切断所定之数.

有理数与无理数总称之曰实数. 有理数之切断,定一实数,反之,一实数常得以有理数切断定之.

今述关于无理数之大小及四则运算之定义于下.

(大小)无理数 β 从有理数之切断 (B_1,B_2) 决定之际,一有理数 a 因属于 B_1 或 B_2,得决定

$$\beta>a\text{ 或 }\beta<a$$

无理数与有理数之间之大小因之决定.

今定无理数彼此之大小,设

$$\beta=(B_1,B_2),\gamma=(C_1,C_2)$$

为两无理数,B_1 与 C_1 完全一致,则 $\beta=\gamma$. 若 B_1 与 C_1 非完全一致,属于 B_1 之有理数,有不属于 C_1 者,或属于 C_1 之有理数,有不属于 B_1 者,前者为 $\beta>\gamma$,后者为 $\beta<\gamma$.

注 1 上述之 β,γ 切勿忘其为无理数. 若 β,γ 为有理数,例如

$$\beta=(\overline{A}_1,A_2),\gamma=(A_1,\overline{A}_2)$$

属于 $\overline{A}_1$ 之有理数有不属于 A_1 者,然非 $\beta>\gamma$,实 $\beta=\gamma$ 也.

据此定义,则 §1 所举关于有理数之大小之性质(A)(B)(C)适用于实数全体矣.

定理 1 不相等两实数之间,有无数有理数存在.

设不等之两实数为 α,β，而 $\alpha<\beta$.

若 α,β 均为有理数，则从有理数之稠密性，本定理之成立，无待证明.

若 α 为有理数，β 为无理数，设定 β 之有理数之切断为 (B_1,B_2)，则 α 当属于 B_1，然 B_1 无最大之数，故 B_1 之中，必有有理数大于 α. 设 b 为其中之一数，两有理数 α,b 之间有无数有理数，故 α,β 之间有无数有理数. α 为无理数，β 为有理数时，亦得用同法证之.

再设 α,β 均为无理数，则自上述关于大小之定义，必有

$$\alpha<a<\beta$$

之有理数 a 存在. 然据上述证明 α,a 之间及 a,β 之间有无数有理数存在，故 α，β 之间有无数有理数存在.

定理2 对于任意实数 a，必有

$$a_1<a<a_2,a_2-a_1<\varepsilon$$

之有理数 a_1,a_2 存在，式中 ε 为正有理数.

何则，取小于 $\frac{\varepsilon}{2}$ 之正有理数 ε'，作无穷数列

$$\cdots,-3\varepsilon',-2\varepsilon',-\varepsilon',0,\varepsilon',2\varepsilon',3\varepsilon',\cdots$$

则数 a 或与其中之一数合一，或在相邻两数之间. 例如

$$n\varepsilon'\leqslant a<(n+1)\varepsilon'$$

则假设

$$\begin{cases}a_1=(n-1)\varepsilon'\\a_2=(n+1)\varepsilon'\end{cases}$$

可也.

定理3 仅由有理数所成之两集合 A_1,A_2（未必含有理数之全部），假定适合下列两条件：

（ⅰ）取属于 A_1 之一有理数 a_1，属于 A_2 之一有理数 a_2，则必 $a_1<a_2$；

（ⅱ）对于任意正数 ε，取 a_1,a_2 适合 $a_2-a_1<\varepsilon$.

则必有实数存在不小于 A_1 之任何数，亦不大于 A_2 之任何数，而此等实数仅有一个.

今于一切有理数之中，大于 A_1 之任何有理数之和（例如属于 A_2 之有理数）之集合为 B_2，与此相反之数之集合为 B_1，则 B_1 与 B_2 显然作一有理数之切断. 设 β 为此切断所定之实数，则 β 不小于 A_1 之任何数亦不大于 A_2 之任何数. 何则，A_1,A_2 按次含于 B_1,B_2 之中，而 β 不小于 B_1 之任何数，亦不大于 B_1 之任何数故也.

假设此等数除 β 外尚有他数 β'，假定 $\beta<\beta'$，则适合

$$\beta<b_1<b_2<\beta'$$

之两有理数 b_1,b_2 必存在(定理1),则 A_1,A_2 之中所取之任意数 a_1,a_2 必适合

$$a_1 < b_1 < b_2 < a_2$$

即

$$b_2 - b_1 < a_2 - a_1$$

此与假定(ⅱ)相反.

若 $\beta > \beta'$,亦得同样之结论. 故 β 不存在.

注2 β 有属于 A_1 或 A_2 者,有不属于 A_1,A_2 者. 若属于 A_1,则为 A_1 之最大数,若属于 A_2,则为 A_2 之最小数.

A_1 与 A_2 未必含有有理数之全体,故不能适合 §1 所述切断之条件(1). 然因假定有(ⅱ)之条件,故得决定一实数 β. 因此,以后此等两集合,称为广义的有理数切断,以 (A_1,A_2) 之记号表之.

(四则)假设两实数 α,β 从下列有理数之切断决定者

$$\alpha = (A_1,A_2),\beta = (B_1,B_2)$$

则其加法之定义如下

$$\alpha + \beta = (A_1 + B_1, A_2 + B_2)$$

式中 $A_1 + B_1$ 者,属于 A_1 之数与属于 B_1 之数所成一切之和之集合;$A_2 + B_2$ 准此. $(A_1 + B_1, A_2 + B_2)$ 作广义的有理数之切断,可以定理2与定理3容易证明,故 $\alpha + \beta$ 为唯一的决定之实数也.

欲定义减法,先考 $(-B_2, -B_1)$ 之切断,其所定义之数,名之曰 β 之反号数,以 $-\beta$ 表之,$\alpha - \beta$ 定义为 α 与 $-\beta$ 之和. 故

$$\alpha - \beta = (A_1 - B_2, A_2 - B_1)$$

欲定义乘法,先取 $\alpha > 0, \beta > 0$ 时考之,A_1,A_2,B_1,B_2 皆为正有理数所成之集合,吾人定义

$$\alpha\beta = (A_1B_1, A_2B_2)$$

此式之右边作广义的切断,容易证明①.

若 α 与 β 之一方或双方小于0,设其反号数为 α' 与 β',则

$$\alpha = (-\alpha') \quad (\alpha' > 0)$$

$$\beta = (-\beta') \quad (\beta' > 0)$$

吾人定义

$$(-\alpha')\beta = -\alpha'\beta$$

$$\alpha(-\beta') = -\alpha\beta'$$

$$(-\alpha')(-\beta') = \alpha'\beta'$$

又 α 与 β 之一方或双方为0,则必有 $\alpha\beta = 0$.

---

① $A_2B_2 - A_1B_1 = (A_2 - A_1)B_2 + A_1(B_2 - B_1)$.

最后欲定义除法,先设 $\alpha>0,\beta>0$,则 A_1,A_2,B_1,B_2 皆由正有理数所组成. 切断 $\left(\frac{1}{B_2},\frac{1}{B_1}\right)$ 称为 B 之反数,而 $\frac{\alpha}{\beta}$ 定义为 α 与 β 之反数之积,即

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{A_1}{B_2},\frac{A_2}{B_1}\right)$$

$\alpha<0$ 或 $\beta<0$ 时,用乘法同样之意义

$$\frac{-\alpha'}{\beta}=-\frac{\alpha'}{\beta},\frac{\alpha}{-\beta'}=-\frac{\alpha}{\beta'},\frac{-\alpha'}{-\beta'}=\frac{\alpha'}{\beta'}$$

又 $\beta\neq0$ 时,定义

$$\frac{0}{\beta}=0$$

$\beta=0$ 时 $\frac{\alpha}{\beta}$ 为无意义之式.

注 3　以上所定义四则运算之结果,α,β 皆为有理数时,亦包含在内,关于有理数之四则 §1(Ⅰ)至(Ⅶ)所举之诸性质对于实数全体亦得成立,此为学者之最佳演习问题也.

注 4　如下列想法即生误谬

$$\alpha-\beta=(A_1-B_1,A_2-B_2)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{A_1}{B_1},\frac{A_2}{B_2}\right)$$

因此两式之右边不能形成切断也.

例题 1　试证不相等两实数之间,有无数有理数存在.

例题 2　试证本节中所定义之 β 之反号数等于自 0 减 β 之差,β 之反数等于 β 除 1 之商.

§4　实数之连续性

吾人前述,因有理数之切断,知其间尚有空隙存在,而以无理数充填之. 然则有理数与无理数所合成实数全体之间,是否尚有空隙存在. 换句话说,实数全体分为 A_1,A_2 两集合,属于 A_1 之一切数小于 A_2 之数时,A_1 无最大数,A_2 无最小数乎否乎? 今讨论如下.

今设 A_1 之中所含有理数之全体为 B_1,A_2 之中所含有理数之全体为 B_2,则 (B_1,B_2) 成一有理数之切断,而此切断定一实数 β,β 必含于 A_1 或 A_2 之中. 若 β 属于 A_1,则为 A_1 最大数. 何则,若 A_1 之中有大于 β 之数,设此数为 a,则 β 与 a 之间当有无数有理数. 而此等有理数因小于 a,故必属于 A_1,同时此等有理数因

大于β,故必属于B_2,成矛盾矣. 故A_1之中不得有大于β之数. 依同理,若β属于A_2,则必为其最小数,亦得证明.

因得下列定理.

定理 1 实数全体分为A_1及A_2两集合,令属于A_1之一切数小于属于A_2之数,则必A_1有最大数而A_2无最小数,或A_1无最大数而A_2有最小数.

因此可知实数全体之间,吾人所谓疑问之空隙,不得存在. 此性质称之曰实数连续性.

今后吾人对于切断一语将以广义的用之,A_1之最大数或A_2之最小数称之曰实数全体之切断(A_1,A_2)所决定之数.

微积分学中所常用下列之定理,可自实数连续性,直接求出之结果也.

定理 2 变数x单调地增大(或减少)而不能超过某定数M,则必有一定数l存在,如下述:

(ⅰ)x决不大于(或小于)l;

(ⅱ)设ε为任何小正数,x大于(或小于)$l-\varepsilon$(或$(l+\varepsilon)$).

今就x单调地增大时证明之(单调地减少时可用同样论法).

分实数全体为A_1,A_2两集合,比变数x所取之任何值更大之一切数(例如大于M之数)今属于A_2,反是之数,今属于A_1. 则从实数之连续性,或A_1有最大数,或A_2有最小数. 设此数为α,则α即本定理所说之l也. 何则,若x取大于α之值,则此值与α之间一切实数皆小于x所取之某数而皆属于A_2,故不合理;又设x不取大于$\alpha-\varepsilon$之值,则$\alpha-\varepsilon$与α之间之一切实数皆属于A_2而皆小于α,亦不合理. 因此α必适合(ⅰ)(ⅱ)两条件,故α即l也.

定数l仅限于一个,可如下法证之. 假定如l之数有两个,其小者为l_1,大者为l_2,则从关于l_1之条件(ⅰ)论之,l_1与l_2之间不得有x之值. 然后关于l_2条件(ⅱ)论之,l_1与l_2之间不得不有x之值. 此显然自相矛盾.

系 数列$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$之各项顺次单调地增大(减少)而不超过某定数,则

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

有有限确定之极限值存在.

此外关于实数解析之种种事项,非本书之目的,故不详论. 属于微积分学之普通知识本书中作为读者之所已知者,常常引用之(其二三重要结果揭于本章之习题中).

例题 交换项无穷级数

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$$

之中

$$u_1\geqslant u_2\geqslant u_3\geqslant\cdots\geqslant u_n\geqslant\cdots>0$$

且

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

则此级数为收敛,试证明之.

§5 集 合

数学中之所谓集合云者,若干个物件之团体,而有判定任意一物件属于此团体与否(至少理论上)之定义,存在者也. 而集合中所属之各个物件,称集合之元素.

例如一切有理数,绝对值不超过10之一切整数,已知直线上之所有点等,各成一集合. 反之,一切简单分数,不甚长之一切线段等其标准不明,故不能作一集合观之.

有甲乙两集合,用某种方法得使甲之一元素与乙之一元素对应,反之,乙之一元素亦得与甲之一元素对应时,称甲与乙成一一对应之集合,或单称甲与乙对等.

例1 六角形之一切对角线与

$$1,2,3,\cdots,8,9$$

自然数之集合对等.

六角形对角线之数有9,即表此事实也.

例2 有两线段 AB,CD. 今设直线 AC,BD 相交于 E. 过 E 之任意直线与 AB,CD 之交点以 P,Q 表之(图1),则对于 AB 上之一点 P,必有 CD 上之一点 Q 与之相应;反之,对于 CD 上之一点 Q,必有 AB 上之一点 P 与之相应.

故线段 AB 上一切点与线段 CD 上一切点成对等集合.

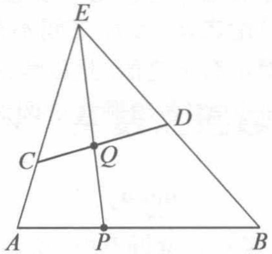

图1

例3 一切自然数之集合与一切正偶数之集合,如下表,成一一对应,故此两集合成对等.

自然数	1	2	3	4	…	n	…
正偶数	2	4	6	8	…	$2n$	…