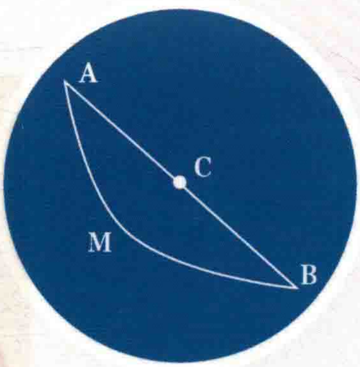
变分方法理论及应用

（第二版）

宋叔尼　张国伟　编著



科学出版社

变分方法理论及应用

（第二版）

宋叔尼　张国伟　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书第 1～5 章是变分方法所需要的泛函分析基础内容；第 6 章主要介绍了相互等价的 Ekeland 变分原理与 Caristi 不动点定理，侧重于变分原理与不动点理论之间的关系；第 7～8 章是 Sobolev 空间和 Banach 空间中微分学的基本知识，同时讨论了 Poisson 方程与泛函极值问题的互相转化；第 9～10章的重点是临界点理论和泛函极值问题，分别用 Ekeland 变分原理和下降流线方法给出了著名的山路定理，应用山路定理和最小作用原理研究二阶半线性椭圆方程边值问题，同时包括与单调梯度映射相关的变分方法；最后第 11 章致力于变分方法在具体工程问题中的应用.

本书的内容适用于数学类相关研究人员、研究生和高年级本科生阅读，也可供相应的工程类研究人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

变分方法理论及应用/宋叔尼，张国伟编著. —2 版. —北京：科学出版社，2018.8

ISBN 978-7-03-058557-8

Ⅰ.①变… Ⅱ.①宋… ②张… Ⅲ.①变分法-研究 Ⅳ.①O176

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 191841 号

责任编辑：张中兴 梁 清/责任校对：张凤琴

责任印制：吴兆东/封面设计：迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 9 月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2018 年 8 月第 二 版 印张：11

2018 年10月第三次印刷 字数：221 000

定价：49.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

第二版前言

我们在第二版对在第一版中发现的疏漏之处进行了修改，并采纳了一些读者提出的建议，谨向他们表示感谢．同时对部分内容进行了增删．

欢迎读者对书中的错误和不足之处提出宝贵意见，如有赐教，作者不胜感激，请将内容发至邮箱 gwzhang@mail. neu. edu. cn.

作　者

2018 年 1 月于东北大学

第一版前言

变分方法是非线性分析的重要部分之一，起源于 J. Bernoulli 提出的最速下降线问题，目前已经成为解决某些数学物理和工程问题的基本方法. 它的主要内容包含着两个相反的方面，一方面是研究泛函的极值或极值点，转化为求解微分方程(即相应的 Euler 方程)问题；另一方面是研究具有变分结构的微分方程，转化为求泛函的极值点或临界点(即可微泛函导数值为零的点).

本书第 1～5 章是变分方法所需要的泛函分析基础内容；第 6 章主要介绍了相互等价的 Ekeland 变分原理与 Caristi 不动点定理，侧重于变分原理与不动点理论之间的关系；第 7～8 章是 Sobolev 空间和 Banach 空间中微分学的基本知识，同时讨论了 Poisson 方程与泛函极值问题的互相转化；第 9～10 章的重点是临界点理论和泛函极值问题，分别用 Ekeland 变分原理和下降流线方法给出了著名的山路定理，应用山路定理和最小作用原理研究二阶半线性椭圆方程边值问题，同时包括与单调梯度映射相关的变分方法；最后第 11 章致力于变分方法在具体工程问题中的应用.

本书的内容适用于数学类相关研究人员、研究生和高年级本科生阅读，也可供相应的工程类研究人员参考.

感谢刘静宜和赵文静两位老师在我们写作过程中提出的很多宝贵意见和建议，同时也感谢科学出版社的大力支持. 本书的出版得到东北大学“变分方法的理论及应用”出版立项及辽宁省自然科学基金的资助.

欢迎读者对书中的不足之处给予批评和建议，如有赐教，作者不胜感激，请将内容发至邮箱 d. mathneu@yahoo. com. cn.

作　者

2012 年 7 月于东北大学

目　　录

第二版前言
第一版前言
第 1 章　度量空间的完备性与紧性 ………………………… 1
　1.1　完备的度量空间与压缩映射原理 ………………………… 1
　1.2　空间的完备化 ………………………… 6
　1.3　紧性与可分性 ………………………… 8
　习题 1 ………………………… 10
第 2 章　赋范线性空间 ………………………… 11
　2.1　Banach 空间 ………………………… 11
　2.2　Hilbert 空间 ………………………… 14
　习题 2 ………………………… 20
第 3 章　线性算子与线性泛函 ………………………… 21
　3.1　有界线性算子 ………………………… 21
　3.2　Baire 纲定理和 Banach 逆算子定理 ………………………… 25
　3.3　闭图像定理与共鸣定理 ………………………… 26
　3.4　Hahn-Banach 定理和 Riesz 表示定理 ………………………… 28
　习题 3 ………………………… 31
第 4 章　自反空间、共轭算子和弱收敛 ………………………… 32
　4.1　自反空间 ………………………… 32
　4.2　共轭算子 ………………………… 33
　4.3　弱收敛和弱 * 收敛 ………………………… 35
　习题 4 ………………………… 37
第 5 章　Fredholm 理论和谱论初步 ………………………… 38
　5.1　紧线性算子 ………………………… 38
　5.2　Fredholm 定理 ………………………… 39
　5.3　有界线性算子的谱 ………………………… 42
　5.4　实 Hilbert 空间中对称紧线性算子的谱 ………………………… 45
　习题 5 ………………………… 50
第 6 章　Ekeland 变分原理与不动点定理 ………………………… 51
　6.1　Ekeland 变分原理与 Caristi 不动点定理 ………………………… 51

6.2 紧算子的不动点 …… 56

习题 6 …… 61

第 7 章 Sobolev 空间与 Poisson 方程的变分方法 …… 62

7.1 弱导数与 Sobolev 空间 …… 62

7.2 Poisson 方程的变分方法 …… 68

7.3 Laplace 算子的特征值 …… 72

7.4 一维 Laplace 算子 …… 77

第 8 章 Banach 空间中的微分与积分 …… 80

8.1 G 微分与 F 微分 …… 80

8.2 高阶微分 …… 88

8.3 隐函数定理和反函数定理 …… 91

8.4 Riemann 积分 …… 96

8.5 Banach 空间中的微分方程 …… 99

第 9 章 临界点理论及应用 …… 102

9.1 能量泛函与临界点 …… 102

9.2 山路定理及其应用 …… 108

9.3 最小作用定理及其应用 …… 117

9.4 下降流线与 Minimax 定理 …… 120

第 10 章 泛函的极值与单调梯度映射 …… 123

10.1 梯度映射 …… 123

10.2 弱下半连续泛函 …… 127

10.3 泛函的极值与临界点 …… 129

10.4 单调梯度映射 …… 132

第 11 章 变分方法在工程中的应用 …… 135

11.1 刚塑性可压缩材料模型 …… 135

11.2 总能耗率泛函 …… 137

11.3 热轧过程总能耗率泛函极值点的存在与唯一性 …… 141

11.4 热轧问题的逼近可解性 …… 152

参考文献 …… 165

第 1 章　度量空间的完备性与紧性

1.1　完备的度量空间与压缩映射原理

设 X 是非空集合，如果映射 $d(\cdot,\cdot):X\times X\to\mathbf{R}^1$ 满足下列条件（称为**度量公理**）：

(1) **正定性**　$d(x,y)\geqslant 0,\ \forall\, x,y\in X$，且 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$；

(2) **对称性**　$d(y,x)=d(x,y),\ \forall\, x,y\in X$；

(3) **三角不等式**　$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y),\ \forall\, x,y,z\in X$.

则称 $d(\cdot,\cdot)$ 是 X 上的**度量函数**或**距离函数**，非负实数 $d(x,y)$ 称为两点 $x,y\in X$ 之间的**距离**. 定义了距离的集合称为**度量空间**或**距离空间**，记作 (X,d). 如果不需要特别指明度量，简记为 X.

如果 X_1 是度量空间 (X,d) 的非空子集，显然 $d(\cdot,\cdot)$ 也是 X_1 上的度量函数，这时称 (X_1,d) 是 (X,d) 的**子空间**.

设 $\{x_n\,|\,n\in\mathbf{N}\}$ 是度量空间 (X,d) 中的点列，$x_0\in X$. 如果 $d(x_n,x_0)\to 0\ (n\to\infty)$，则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0，也称 x_0 是点列 $\{x_n\}$ 的极限，记作 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

在度量空间 (X,d) 中有如下一些结论（见参考文献[1]）. 点列 $\{x_n\}$ 的极限具有唯一性. 如果点列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0，则 $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 x_0. 在度量空间 (X,d) 中可以定义邻域、内点、边界点、聚点和开集、闭集、闭包等概念. 设 F 是度量空间 X 中的子集，则 F 是闭集当且仅当对 F 中的任意点列 $\{x_n\}$，如果 $x_n\to x_0$，那么 $x_0\in F$. 设 $x_0\in X$，F 是度量空间 (X,d) 中的非空闭子集. 如果 $x_0\notin F$，则 x_0 到 F 的距离 $d(x_0,F)=\inf\limits_{x\in F}d(x_0,x)>0$.

定义 1.1　度量空间 (X,d) 中的点列 $\{x_n\}$ 称为 **Cauchy 列**，是指 $d(x_n,x_m)\to 0\ (n,m\to\infty)$，即 $\forall\,\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n,m>N$ 时，$d(x_n,x_m)<\varepsilon$. 若 (X,d) 中所有的 Cauchy 列都收敛到 X 中的点，则称 (X,d) 是**完备的**.

例 1.1　度量空间 $(\mathbf{R}^n,d)$ 是完备的，其中 d 表示 Euclid 距离.

证明　$(\mathbf{R}^n,d)$ 是度量空间（详细证明可参见参考文献[1]中命题 1.1）.

设 $\{x_m\}\subset(\mathbf{R}^n,d)$ 是 Cauchy 列，即 $x_m=(x_1^{(m)},x_2^{(m)},\cdots,x_n^{(m)})\ (m=1,2,\cdots)$，并且 $\forall\,\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $m,k>N$ 时，有

$$d(x_m,x_k)=\Big[\sum_{l=1}^{n}(x_l^{(m)}-x_l^{(k)})^2\Big]^{\frac{1}{2}}<\varepsilon. \tag{1.1}$$

对给定 $1\leqslant l\leqslant n$,有 $|x_l^{(m)}-x_l^{(k)}|\leqslant d(x_m,x_k)<\varepsilon$. 所以可设 $x_l^{(m)}\to x_l^{(0)}(m\to\infty)$. 显然 $x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})\in\mathbf{R}^n$. 在(1.1)式中令 $k\to\infty$,可得 $d(x_m,x_0)\leqslant\varepsilon$(证明见参考文献[1]中命题 1.2). 因此 $x_m\to x_0(m\to\infty)$,故$(\mathbf{R}^n,d)$是完备的. ■

如果在 $\mathbf{R}^n$ 中定义度量

$$d_1(x,y)=\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$$

或

$$d_2(x,y)=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k-y_k|,x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n,$$

容易证明$(\mathbf{R}^n,d_1)$和$(\mathbf{R}^n,d_2)$都是完备的.

例 1.2　如果在 $C[a,b]$中定义 $d(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$, $\forall x,y\in C[a,b]$,则 $C[a,b]$是完备的度量空间.

证明　易证 $d(x,y)$是 $C[a,b]$上的度量函数,并且当 $x_n,x_0\in C[a,b](n=1,2,\cdots)$时,$x_n\to x_0\Leftrightarrow x_n(t)$在$[a,b]$上一致收敛到 $x_0(t)$.

如果$\{x_n\}$是空间 $C[a,b]$中的 Cauchy 列,则 $\forall\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n,m>N$ 时,$\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon$,即$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon$, $\forall t\in[a,b]$. 故 $x_n(t)$在$[a,b]$上一致收敛到连续函数 $x_0(t)$,从而 $x_n\to x_0(n\to\infty)$,于是 $C[a,b]$是完备的度量空间. ■

例 1.3　设 $L^p[a,b]=\left\{x\,\Big|\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t<+\infty\right\}(1\leqslant p<+\infty)$,其中几乎处处相等的函数看作同一个元素. 定义 $d(x,y)=\left[\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}$, $\forall x,y\in L^p[a,b]$,则 $L^p[a,b]$是完备的度量空间.

证明　首先证明 $L^p[a,b]$是线性空间,从而 $d(x,y)$有意义. 事实上,设 α,β 为实数,$x,y\in L^p[a,b]$. 由于对 $p\geqslant 1$, $f(t)=t^p$ 是$[0,+\infty)$上的凸函数,所以当 $u,v\geqslant 0$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\alpha u+\beta v}{2}\right|^p&\leqslant\left(\frac{|\alpha u|+|\beta v|}{2}\right)^p=f\left(\frac{|\alpha u|+|\beta v|}{2}\right)\\&\leqslant\frac{f(|\alpha u|)+f(|\beta v|)}{2}=\frac{|\alpha u|^p+|\beta v|^p}{2},\end{aligned}$$

$$|\alpha u+\beta v|^p\leqslant 2^{p-1}(|\alpha|^p|u|^p+|\beta|^p|v|^p),$$

故

$$\int_a^b|\alpha x(t)+\beta y(t)|^p\mathrm{d}t\leqslant 2^{p-1}\left(|\alpha|^p\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t+|\beta|^p\int_a^b|y(t)|^p\mathrm{d}t\right)<+\infty.$$

从而 $L^p[a,b]$是线性空间.

下证 $d(x,y)$ 是 $L^p[a,b]$ 上的度量函数. 为此需要首先证明 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

Hölder 不等式

设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p>1, q>1$(称 p 和 q 为一对共轭数),则有 Hölder 不等式($p=q=2$ 时称为 Cauchy 不等式)如下:

$$\int_a^b |x(t)y(t)|\,dt \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}, \forall x \in L^p[a,b], y \in L^q[a,b].$$

事实上,因为 $g(t)=e^t$ 是凸函数,所以当 $u,v>0$ 时,

$$\begin{aligned} u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} &= e^{\frac{1}{p}\ln u+\frac{1}{q}\ln v} = g\left(\frac{1}{p}\ln u+\frac{1}{q}\ln v\right) \\ &\leqslant \frac{1}{p}g(\ln u)+\frac{1}{q}g(\ln v) = \frac{u}{p}+\frac{v}{q}, \end{aligned}$$

即有 Young 不等式

$$u^{\frac{1}{p}} v^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{u}{p}+\frac{v}{q} (u,v \geqslant 0). \tag{1.2}$$

如果 $\int_a^b |x(t)|^p dt = 0$ 或 $\int_a^b |y(t)|^q dt = 0$, Hölder 不等式显然成立. 否则取

$$u = |x(t)|^p \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{-1}, \quad v = |y(t)|^q \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{-1}.$$

代入到(1.2)式中再积分即得 Hölder 不等式.

Minkowski 不等式

设 $p \geqslant 1, \forall x,y \in L^p[a,b]$,

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

当 $p=1$ 时,不等式显然成立. 当 $p>1$ 时,由于 $x+y \in L^p[a,b]$,则 $|x+y|^{\frac{p}{q}} \in L^q[a,b]$. 于是由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned} &\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt \\ &= \int_a^b |x(t)+y(t)||x(t)+y(t)|^{p-1} dt \\ &\leqslant \int_a^b |x(t)||x(t)+y(t)|^{\frac{p}{q}} dt + \int_a^b |y(t)||x(t)+y(t)|^{\frac{p}{q}} dt \\ &\leqslant \left[\left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

从而 Minkowski 不等式得证.

利用 Minkowski 不等式,易证 $d(x,y)$ 是度量函数.(完备性的证明见参考文

献[2].) ■

例 1.4 设 $l^p=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mid \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<+\infty\}(1\leqslant p<+\infty)$，易见 l^p 是线性空间，定义 $d(x,y)=(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p)^{\frac{1}{p}}$，$\forall x,y\in l^p$. 设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$p>1$，$q>1$，有离散形式的 Hölder 不等式（$p=q=2$，并且为有限和时称为 Cauchy 不等式）

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_ny_n|\leqslant(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q)^{\frac{1}{q}},\forall x\in l^p,y\in l^q,$$

离散形式的 Minkowski 不等式

$$(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p)^{\frac{1}{p}}\leqslant(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p)^{\frac{1}{p}},\forall x,y\in l^p.$$

易证 $d(x,y)$ 是 l^p 上的度量函数，可以证明 (l^p,d) 是完备的度量空间（见参考文献[1]）.

例 1.5 设 $L^{\infty}[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上本性有界函数的全体，即在 $[a,b]$ 中去掉某个零测度集以后有界的可测函数集合，在 $L^{\infty}[a,b]$ 中将几乎处处相等的函数看作同一个函数. 易见 $L^{\infty}[a,b]$ 是线性空间，定义

$$\begin{aligned}d(x,y)&=\inf_{\substack{\mu E_0=0\\E_0\subset[a,b]}}\{\sup_{t\in[a,b]\setminus E_0}|x(t)-y(t)|\}\\&=\operatorname*{varisup}_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|,\forall x,y\in L^{\infty}[a,b].\end{aligned}$$

$d(x,y)$ 是 $L^{\infty}[a,b]$ 上的度量函数，可以证明 $(L^{\infty}[a,b],d)$ 是一个完备的度量空间（见参考文献[2]）.

例 1.6 设 $l^{\infty}=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mid\sup_{n\geqslant1}|x_n|<+\infty\}$，即 l^{∞} 是有界数列的集合，易见 l^{∞} 是线性空间. 定义 $d(x,y)=\sup_{n\geqslant1}|x_n-y_n|$，$\forall x,y\in l^{\infty}$，$d(x,y)$ 是 l^{∞} 上的度量函数，可以证明 (l^{∞},d) 是完备的度量空间（见参考文献[3]）. ■

容易证明完备度量空间的闭子空间也是完备的.

定理 1.1（Cantor 定理）　设 (X,d) 是完备度量空间，$\{M_n\}$ 是 X 中的一列非空闭集，满足 $M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_n\supset\cdots$. 记 M_n 的直径为 $\delta(M_n)=\sup_{x,y\in M_n}d(x,y)$，如果 $\lim_{n\to\infty}\delta(M_n)=0$，则存在唯一的元素 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}M_n$.

证明　存在性. 取 $x_n\in M_n$，当 $m>n$ 时，因为 $d(x_m,x_n)\leqslant\delta(M_n)\to0(n\to\infty)$，所以 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 列，于是可设 $x_n\to x$. 而对任意的 n，当 $m>n$ 时，$x_m\in M_n$，由于 M_n 是闭集，令 $m\to\infty$，可得 $x\in M_n$，即 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}M_n$.

唯一性. 如果 $x,y\in\bigcap_{n=1}^{\infty}M_n$，则对任意的 n，$x,y\in M_n$，所以 $d(x,y)\leqslant\delta(M_n)\to0$

$(n\to\infty)$，因此 $x=y$. ■

定义 1.2　设(X,d_1)和(Y,d_2)都是度量空间，映射 $T:(X,d_1)\to(Y,d_2)$称为**在点 $x_0\in X$ 连续**，如果对于 X 中任意收敛于 x_0 的点列$\{x_n\}$，即 $d_1(x_n,x_0)\to 0$，Y 中的相应点列$\{Tx_n\}$收敛于 Tx_0，即 $d_2(Tx_n,Tx_0)\to 0$. 如果 T 在 X 中的每一点都连续，则称 T 是 X 上的**连续映射**.

易见 $T:(X,d_1)\to(Y,d_2)$在点 $x_0\in X$ 连续的充分必要条件是 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $d_1(x,x_0)<\delta$ 时，$d_2(Tx,Tx_0)<\varepsilon$.

定义 1.3　设(X,d)是度量空间，映射 $T:(X,d)\to(X,d)$称为**压缩映射**，如果存在常数 $0\leqslant\alpha<1$，使得 $\forall x,y\in X$，$d(Tx,Ty)\leqslant\alpha d(x,y)$，其中 α 称为**压缩常数**.

易见压缩映射在 X 上是连续的.

例 1.7　设 $X=[a,b]$，$T(x)$是$[a,b]$上的可微函数. 如果 $T(x)\in[a,b]$，$\forall x\in[a,b]$，且 $|T'(x)|\leqslant\alpha<1$，则 T 是压缩映射.

设 X 是非空集合，$x\in X$ 称为映射 $T:X\to X$ 的不动点，是指 $Tx=x$.

定理 1.2(Banach 不动点定理-压缩映射原理，1922)　设(X,d)是完备的度量空间，$T:(X,d)\to(X,d)$是压缩映射，则 T 在 X 中存在唯一的不动点，并且 $\forall x_0\in X$，由 $x_{n+1}=Tx_n(n=0,1,2,\cdots)$定义的迭代序列$\{x_n\}$收敛到该不动点.

证明　设 $x_{n+1}=Tx_n(n=0,1,2,\cdots)$. 对任意正整数 p，

$$d(x_{n+p},x_n)\leqslant\sum_{k=n}^{n+p-1}d(x_{k+1},x_k)\leqslant\sum_{k=n}^{n+p-1}\alpha^k d(x_1,x_0)\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0)\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{x_n\}$是 Cauchy 列. 由空间的完备性，存在 $x^*\in X$，使得 $x_n\to x^*$. 由于压缩映射是连续的，对 $x_{n+1}=Tx_n$，令 $n\to\infty$，得 $x^*=Tx^*$，即 x^* 是 T 的不动点.

如果 $x^{**}\in X$，使得 $x^{**}=Tx^{**}$，则 $d(x^*,x^{**})=d(Tx^*,Tx^{**})\leqslant\alpha d(x^*,x^{**})$，可见 $d(x^*,x^{**})=0$，即 $x^*=x^{**}$. ■

例 1.8(Picard 定理)　考虑常微分方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x(t)),\\ x(0)=x_0.\end{cases}\tag{1.3}$$

如果 $f(t,x)$在$[-h,h]\times[x_0-\delta,x_0+\delta]$$(h>0,\delta>0)$上连续不恒为零，且关于 x 满足 Lipschitz 条件，即存在常数 $L>0$，使得 $\forall x_1,x_2\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$，有

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|,\ \forall t\in[-h,h],$$

则存在 $h_1\in(0,h)$，使得初值问题(1.3)在$[-h_1,h_1]$上存在唯一解.

证明　取 $h_1>0$ 满足 $h_1<\min\left\{h,\dfrac{\delta}{M},\dfrac{1}{L}\right\}$，其中

$$M>\max\{|f(t,x)|\mid(t,x)\in[-h,h]\times[x_0-\delta,x_0+\delta]\}.$$

初值问题(1.3)在$[-h_1,h_1]$上的解等价于积分方程

$$x(t)=x_0+\int_0^t f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau$$

在$[-h_1,h_1]$上的连续函数解.

取$\overline{B}(x_0,\delta)=\{x\in C[-h_1,h_1]\mid d(x,x_0)=\max\limits_{t\in[-h_1,h_1]}|x(t)-x_0|\leqslant\delta\}$，则$\overline{B}(x_0,\delta)$是$C[-h_1,h_1]$的闭子空间，从而是完备的. 定义映射 T 为

$$(Tx)(t)=x_0+\int_0^t f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau,\ \forall\, x\in\overline{B}(x_0,\delta).$$

由于

$$d(Tx,x_0)=\max_{t\in[-h_1,h_1]}|(Tx)(t)-x_0|=\max_{t\in[-h_1,h_1]}\left|\int_0^t f(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau\right|\leqslant h_1M\leqslant\delta,$$

故 $T:\overline{B}(x_0,\delta)\to\overline{B}(x_0,\delta)$. 因为$\forall\, x,y\in\overline{B}(x_0,\delta)$，

$$\begin{aligned}d(Tx,Ty)&=\max_{t\in[-h_1,h_1]}|(Tx)(t)-(Ty)(t)|\\&=\max_{t\in[-h_1,h_1]}\left|\int_0^t[f(\tau,x(\tau))-f(\tau,y(\tau))]\mathrm{d}\tau\right|\\&\leqslant h_1\max_{t\in[-h_1,h_1]}|f(t,x(t))-f(t,y(t))|\\&\leqslant Lh_1\max_{t\in[-h_1,h_1]}|x(t)-y(t)|=Lh_1d(x,y),\end{aligned}$$

而$Lh_1<1$，所以 T 是压缩映射. 根据 Banach 不动点定理，T 在$\overline{B}(x_0,\delta)$中存在唯一不动点 x^*，即 $x^*(t)=x_0+\int_0^t f(\tau,x^*(\tau))\mathrm{d}\tau$，故 $x^*(t)$是初值问题(1.3)在$[-h_1,h_1]$唯一解.

同时，由 $x_{n+1}(t)=x_0+\int_0^t f(\tau,x_n(\tau))\mathrm{d}\tau\,(n=0,1,2,\cdots)$，其中 $x_0(t)\equiv x_0$，得到的函数列$\{x_n(t)\}$在$[-h_1,h_1]$一致收敛到 $x^*(t)$. ■

1.2 空间的完备化

在 Banach 不动点定理中，对空间(X,d)完备性要求是不可缺少的. 例如 $T(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x+1}$在$[0,1]$上有定义，并且有唯一的不动点 $x_0=(\sqrt{17}+1)/8$. 然而若取 $X=[0,1]\setminus\{x_0\}$，那么 $T:X\to X$ 是压缩映射，但 T 在 X 中没有不动点. 另外空间的完备性与空间中的度量也有关. 例如在 $C[0,1]$中赋予度量

$$d_1(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t,\ \forall\, x,y\in C[0,1],$$

则$(C[0,1],d_1)$不是完备的. 事实上，取函数列 $x_n(t)\,(n\geqslant2)$如下：

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right),\\ n\left(t-\dfrac{1}{2}\right), & t\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right],\\ 1, & t\in\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n},1\right].\end{cases}$$

显然 $x_n\in C[0,1]$，并且 $\forall\varepsilon>0$，当 $n,m>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 时，$d_1(x_n,x_m)<\varepsilon$. 实际上 $d_1(x_n,x_m)$ 即是 $x_n(t)$ 与 $x_m(t)$ 所围图形的面积. 所以 $\{x_n\}$ 是 $(C[0,1],d_1)$ 中的 Cauchy 列. 假若存在 $x_0\in C[0,1]$，使得 $d_1(x_n,x_0)\to 0$. 由于

$$\begin{aligned}&\int_0^1|x_n(t)-x_0(t)|\,\mathrm{d}t\\ =&\int_0^{\frac{1}{2}}|x_0(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}}^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}|x_n(t)-x_0(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})}^1|1-x_0(t)|\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，那么 $0=\int_0^{\frac{1}{2}}|x_0(t)|\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{2}}^1|1-x_0(t)|\,\mathrm{d}t$，从而

$$\int_0^{\frac{1}{2}}|x_0(t)|\,\mathrm{d}t=0,\quad \int_{\frac{1}{2}}^1|1-x_0(t)|\,\mathrm{d}t=0.$$

于是

$$x_0(t)=\begin{cases}0, & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right),\\ 1, & t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

与 $x_0\in C[0,1]$ 矛盾.

定义 1.4　设 (X,d) 和 (X_1,d_1) 是度量空间. 如果存在映射 $\varphi: X\to X_1$，满足

(1) φ 是满射；

(2) $d_1(\varphi(x),\varphi(y))=d(x,y)$，$\forall x,y\in X$（可见 φ 也是单射）. 则称 (X,d) 与 (X_1,d_1) **等距**，φ 称为**等距映射**.

如果度量空间 (X,d) 与度量空间 (X_1,d_1) 的一个子空间 (X_0,d_1) 等距，则称 (X,d) 可以等距嵌入到 (X_1,d_1). 在等距的意义下，(X,d) 可以看做是 (X_1,d_1) 的子空间，记作 $(X,d)\subset(X_1,d_1)$.

定义 1.5　设 (X,d) 是度量空间，集合 $E\subset X$ 称为在 X 中**稠密**，如果 $\overline{E}=X$，也即是 $\forall x\in X$，存在点列 $\{x_n\}\subset E$，使得 $x_n\to x$.

关于稠密性，容易证明有下面两个等价条件：

(1) $\forall x\in X$，$\forall\varepsilon>0$，存在 $y\in E$，使得 $d(x,y)<\varepsilon$；

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\bigcup\limits_{y\in E}\{x\in X\mid d(x,y)<\varepsilon\}\supset X$，即覆盖.

显然有理数集和无理数集在实数集中稠密.

例 1.9　$[a,b]$上的多项式的全体记作 $P[a,b]$,则根据 Weierstrass 定理可知 $P[a,b]$在 $C[a,b]$中稠密.

定理 1.3　对每一个度量空间(X,d),都存在一个完备的度量空间(X_1,d_1),使得(X,d)等距于(X_1,d_1)的一个稠密子空间,并且在等距的意义下,(X_1,d_1)是唯一的.

此时称(X_1,d_1)是(X,d)的**完备化空间**(定理证明见参考文献[4]).

例 1.10　$C[0,1]$在度量 $d_1(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t$, $\forall x,y\in C[0,1]$下的完备化空间是 $L^1[0,1]$.

证明见参考文献[1]中定理 3.11.

1.3　紧性与可分性

定义 1.6　设(X,d)是度量空间,$A\subset X$. 如果 A 中的任意无穷点列都存在收敛子列,则称 A 是(X,d)中的**列紧集**(也称**相对紧集**).

命题 1.1　$\mathbf{R}^n$ 中的有界集合是列紧的.

证明见参考文献[4]. 但是并不是任何度量空间中的有界集合都是列紧的.

例 1.11　设函数列 $x_n(t)=\begin{cases}1-nt, & t\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right],\\ 0, & t\in\left(\dfrac{1}{n},1\right].\end{cases}$ 显然 $x_n\in C[0,1]$. 由于 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n|=1$,所以$\{x_n\}$是有界的. 如果存在 $x_0\in C[0,1]$,使得$\{x_n\}$的某一子列$\{x_{n_k}\}$收敛到 x_0,则 $x_0(t)=\begin{cases}1, & t=0,\\ 0, & t\in(0,1].\end{cases}$ 与 $x_0\in C[0,1]$矛盾,所以$\{x_n\}$不是列紧的. ■

定义 1.7　设(X,d)是度量空间,$M\subset X$. 如果对给定的 $\varepsilon>0$,存在集合 $A\subset M$,使得 $\forall x\in M$,存在 $y\in A$,满足 $d(x,y)<\varepsilon$,则称 A 是 M 的一个 **$\boldsymbol{\varepsilon}$ 网**. 如果 A 是有限集合,则称 A 是 M 的一个**有限 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 网**.

显然,如果 A 是 M 的一个 ε 网,则 $M\subset\bigcup\limits_{y\in A}\{x\in X\,|\,d(x,y)<\varepsilon\}$. 可见如果 M 存在有限 ε 网,那么 M 有界.

定理 1.4(Hausdorff)　在完备度量空间(X,d)中,M 是列紧集当且仅当 $\forall\varepsilon>0$,M 存在有限 ε 网.

证明　设 M 是列紧的,但是存在 $\varepsilon_0>0$,使得 M 不存在有限 ε_0 网.

取 $x_1\in M$,存在 $x_2\in M$,使得 $d(x_1,x_2)\geqslant\varepsilon_0$,即 $x_2\in M\backslash B(x_1,\varepsilon_0)$. 同理可知存

在 $x_3\in M\backslash(B(x_1,\varepsilon_0)\cup B(x_2,\varepsilon_0))$，依此下去，存在 $x_{n+1}\in M\backslash\left(\bigcup_{k=1}^{n}B(x_k,\varepsilon_0)\right)$. 显然点列 $\{x_n\}\subset M$，并且 $d(x_n,x_m)\geqslant\varepsilon_0(n\neq m)$，$\{x_n\}$ 没有收敛子列，与 M 列紧矛盾.

设 $\forall\varepsilon>0$，M 存在有限 ε 网. 取无穷的序列 $\{x_n\}\subset M$，对有限的 1 网，存在 $y_1\in M$ 及 $\{x_n\}$ 的无穷子列 $\{x_n^{(1)}\}\subset B(y_1,1)$. 对有限的 $\frac{1}{2}$ 网，存在 $y_2\in M$ 及 $\{x_n^{(1)}\}$ 的无穷子列 $\{x_n^{(2)}\}\subset B\left(y_2,\frac{1}{2}\right)$，依此下去，对有限的 $\frac{1}{k}$ 网，存在 $y_k\in M$ 及 $\{x_n^{(k-1)}\}$ 的无穷子列 $\{x_n^{(k)}\}\subset B\left(y_k,\frac{1}{k}\right)$. 取对角线序列 $\{x_n^{(n)}\}$，它是 $\{x_n\}$ 的子列. 下证 $\{x_n^{(n)}\}$ 是 Cauchy 列. 事实上，$\forall\varepsilon>0$，当 $n>\frac{2}{\varepsilon}$ 时，对任意的正整数 p

$$d(x_{n+p}^{(n+p)},x_n^{(n)})\leqslant d(x_{n+p}^{(n+p)},y_n)+d(y_n,x_n^{(n)})<\frac{2}{n}<\varepsilon.$$

故 $\{x_n\}$ 存在收敛子列. ■

【注】 在证明“M 是列紧集，则 $\forall\varepsilon>0$，M 存在有限 ε 网”时，不需要空间的完备性，且易见列紧集有界.

定理 1.5(Arzela-Ascoli) 集合 $F\subset C[a,b]$ 列紧的充分必要条件是：

(1) F 是一致有界的，即存在常数 $M>0$，使得 $|x(t)|\leqslant M$，$\forall x\in F,t\in[a,b]$；

(2) F 是等度连续的，即 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，$\forall x\in F$，$t_1,t_2\in[a,b]$，当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时，有 $|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$.

定理 1.6(Riesz) 集合 $F\subset L^p[a,b](1\leqslant p<+\infty)$ 列紧的充分必要条件是

(1) F 是有界的，即存在常数 $M>0$，使得 $\forall x\in F$，$\left(\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant M$；

(2) F 是等度整体连续的，即 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $\forall x\in F$，当 $|\tau|<\delta$ 时，$\left(\int_a^b|x(t+\tau)-x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$，其中 $x(t)=0$，$\forall t\notin[a,b]$.

以上两个定理的证明见参考文献[5].

定义 1.8 度量空间 (X,d) 中集合 M 称为是**紧的**，如果覆盖 M 的任意开集族中都存在有限个开集覆盖 M.

定理 1.7 在度量空间 (X,d) 中集合 M 是紧的当且仅当 M 是列紧的闭集.

证明见参考文献[4].

定义 1.9 度量空间称为是**可分的**，是指存在至多可数的稠密子集.

空间 $\mathbf{R}^n$，$C[a,b]$，$L^p[a,b]$，$l^p(1\leqslant p<+\infty)$ 都是可分的，但是空间 $L^\infty[a,b]$ 和 l^∞ 不可分(见参考文献[6]).

定理 1.8 设 (X,d) 是度量空间，$X_1\subset X$. 如果 X_1 是列紧集，则 (X_1,d) 是可分的度量子空间；如果 (X,d) 是可分的，则 (X_1,d) 是可分的度量子空间.

证明　见参考文献[6].

习　题　1

1.1　证明完备度量空间的闭子空间是完备的,度量空间中的完备子空间是闭子集.

1.2　证明度量空间中的压缩映射是连续的.

1.3　设(X,d)是完备的度量空间,$x_0\in X$,$B(x_0,r)=\{x\in X\mid d(x,x_0)<r\}(r>0)$,映射$T:B(x_0,r)\to X$是压缩常数$\alpha<1$的压缩映射.如果$d(Tx_0,x_0)<(1-\alpha)r$,则$T$存在不动点.

1.4　在度量空间中,证明列紧集的闭包是紧集.

1.5　在完备的度量空间中,证明集合M列紧当且仅当$\forall\varepsilon>0$,存在M的列紧ε网.

1.6　在度量空间中,证明紧集上的连续函数有界,并且可以达到它的上、下确界(即有最大、小值).

1.7　在度量空间中,证明紧集上的连续函数是一致连续的.

1.8　在度量空间中,证明连续映射将列紧集映成列紧集.

1.9　设(X,d)是度量空间,$M\subset X$是紧集,映射$f:M\to M$满足

$$d(f(x_1),f(x_2))<d(x_1,x_2),\forall x_1,x_2\in M,x_1\neq x_2,$$

证明f在M中存在唯一的不动点.