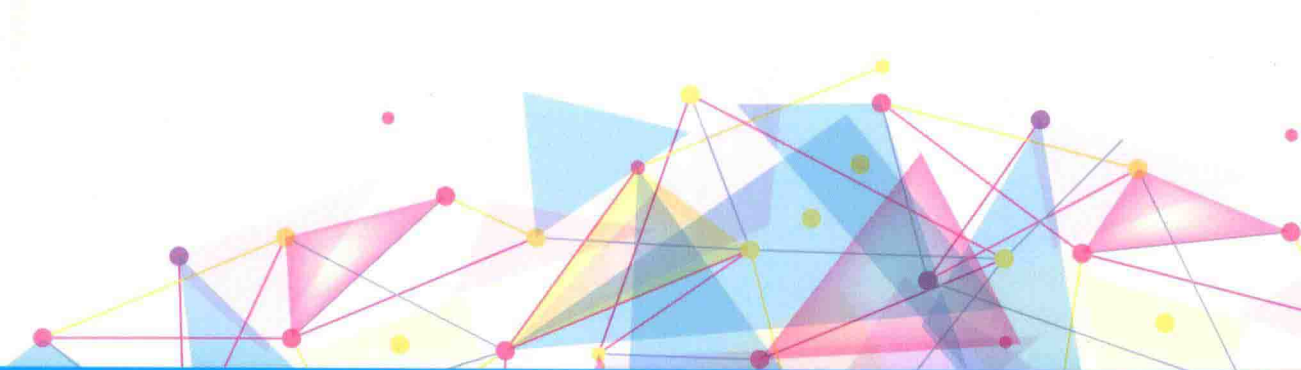




线性代数

练习与提高(二)

XIANXING DAISHU LIANXI YU TIGAO

陈兴荣 刘剑锋 主 编
刘智慧 李卫峰



中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

线性代数练习与提高

XIANXING DAISHU LIANXI YU TIGAO

(二)

陈兴荣 刘剑锋 刘智慧 李卫峰 主编



中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

线性代数练习与提高:全 2 册/陈兴荣等主编. —武汉:中国地质大学出版社,2018. 7
(2018. 10 重印)

ISBN 978-7-5625-4276-6

I. ①线…

II. ①陈…

III. ①线性代数-高等学校-习题集

IV. ①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 105211 号

线性代数练习与提高

陈兴荣 刘剑锋 刘智慧 李卫峰 主编

责任编辑:谌福兴 郑济飞

责任校对:徐蕾蕾

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路 388 号)

邮政编码:430074

电 话:(027)67883511

传真:67883580

E-mail:cbb@cug.edu.cn

经 销:全国新华书店

<http://cugp.cug.edu.cn>

开本:787 毫米×1092 毫米 1/16

字数:224 千字 印张:8.75

版次:2018 年 7 月第 1 版

印次:2018 年 10 月第 2 次印刷

印刷:武汉市籍缘印刷厂

ISBN 978-7-5625-4276-6

定价:26.00 元(全 2 册)

如有印装质量问题请与印刷厂联系调换

前 言

为方便教师批阅和学生使用,本书分为第一分册和第二分册。

第一分册包括行列式、矩阵的初等变换与线性方程组、相似矩阵与二次型,分别对应课本的第一、三、五章。

第二分册包括矩阵及其运算、向量组的线性相关性、线性空间与线性变换,分别对应课本的第二、四、六章。

每节包括知识要点、典型例题以及练习题三个部分。练习题分为 A、B、C 三个层次, A 类题为基础题, B 类题难度稍大, C 类题为有一定难度的综合题, 书末附有练习题的答案与提示, 供读者核对正误。

本书编写工作安排如下: 陈兴荣负责前言、行列式、矩阵及其运算的编写; 刘剑锋负责矩阵的初等变换与线性方程组、线性空间与线性变换的编写; 刘智慧负责向量组的线性相关性的编写; 李卫峰负责相似矩阵及二次型的编写。

本书既可作为高等学校理工科专业线性代数课程的教学参考书, 也可以作为报考硕士研究生的复习参考资料。

希望本书对提高教学质量有所裨益, 并得到广大读者的喜爱。但限于编者水平, 疏漏与不足之处在所难免, 恳请广大读者批评指正。

编 者

2018 年 5 月

目 录

第一章 矩 阵	(1)
第一节 线性方程组和矩阵 矩阵的运算	(1)
第二节 逆矩阵 克拉默法则	(7)
第三节 矩阵分块法	(13)
第二章 向量组的线性相关性	(17)
第一节 向量组及其线性组合 向量组的线性相关性	(17)
第二节 向量组的秩	(23)
第三节 线性方程组的解的结构	(28)
第四节 向量空间	(38)
第三章 线性空间与线性变换	(44)
第一节 线性空间的定义与性质 维数、基与坐标 基变换与坐标变换	(44)
第二节 线性变换 线性变换的矩阵表示式	(48)
参考答案	(50)

第一章 矩 阵

在整个线性代数中,矩阵是一个十分有用的工具,同时它在自然科学与工程技术领域也有着广泛的应用.

第一节 线性方程组和矩阵 矩阵的运算



知识要点

1. 矩阵的线性运算

(1) 加法:同型矩阵 $A=(a_{ij})_{s \times n}$, $B=(b_{ij})_{s \times n}$, 定义其加法 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{s \times n}$.

(2) 数量乘法:数 k 与矩阵 A 的乘积定义为 $kA=(ka_{ij})_{s \times n}$.

2. 矩阵的乘法

矩阵 $A=(a_{ij})_{s \times n}$, $B=(b_{ij})_{n \times m}$, A 与 B 的乘积 $AB=(c_{ij})_{s \times m}$, 其中 $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$, ($i=1, 2, \dots, s, j=1, 2, \dots, m$).

矩阵乘法满足的运算律:设 A, B, C 为同型矩阵, k 为数, 则

① $(AB)C=A(BC)$; ② $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$;

③ $k(AB)=(kA)B=A(kB)$.

注意:(1) 矩阵 A 与 B 只有当 A 的列数与 B 的行数相等时才能相乘;

(2) 矩阵的运算与数的运算规律有些是相同的,但也有许多不同之处,学习时注意比较二者的差异.

3. 方阵的幂

k 个 n 阶方阵 A 连乘称为方阵 A 的 k 次幂,记为 A^k , 即 $A^k = \underbrace{AA \cdots A}_k$.

4. 矩阵的转置

设 $A=(a_{ij})_{s \times n}$, 将 A 的行列互换后得到的矩阵称为 A 的转置,记为 A^T , 即

$$A^T=(a_{ji})_{n \times s}.$$

矩阵的转置满足的运算律:设 A, B 为矩阵, k 为数, 则

① $(A^T)^T=A$; ② $(A+B)^T=A^T+B^T$; ③ $(AB)^T=B^TA^T$; ④ $(kA)^T=kA^T$.

5. 方阵的行列式

由 n 阶方阵 A 的元素构成的行列式(各元素位置不变)称为方阵 A 的行列式,记为 $|A|$.

方阵的行列式满足的运算律:设 A, B 为 n 阶方阵, k 为数,则

$$\textcircled{1} |A^T| = |A|; \textcircled{2} |kA| = k^n |A|; \textcircled{3} |AB| = |A| |B|, |A_1 A_2 \cdots A_n| = |A_1| |A_2| \cdots |A_n|.$$

6. 几类特殊矩阵

①零矩阵 O ; ②单位矩阵 E ; ③数量矩阵; ④对角矩阵;

⑤上(下)三角矩阵; ⑥对称矩阵($A^T = A$); ⑦反对称矩阵($A^T = -A$).



典型例题

例 1 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 计算 $4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB$.

解: $4A^2 - B^2 - 2BA + 2AB = (4A^2 - 2BA) + (2AB - B^2)$

$$= (2A - B)2A + (2A - B)B = (2A - B)(2A + B)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -11 & 0 \\ -8 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -44 & -24 & -60 \\ -5 & -25 & 11 \end{pmatrix}.$$

注意:本题利用矩阵的加法和乘法可直接运算,但计算量较大.这里利用乘法对加法的分配律先化简,再代入计算.矩阵的运算与数的计算不同的地方是矩阵的乘法对加法的分配律有两种:左分配律和右分配律,因矩阵没有乘法交换律,所以左分配律和右分配律是有区别的,于是提取公因子不能颠倒相乘矩阵的左右次序.总之,在类似的矩阵运算中,应注意矩阵运算与数的运算的区别.

例 2 n 阶矩阵 A, B 满足 $A^2 = A, B^2 = B, (A+B)^2 = A+B$, 试证 $AB = O$.

证明:由 $(A+B)^2 = A+B$ 得 $A^2 + AB + BA + B^2 = A+B$, 又 $A^2 = A, B^2 = B$, 所以 $AB + BA = O$.

用 A 分别左乘、右乘 $AB + BA = O$ 等式两边,并利用 $A^2 = A$ 得 $AB + ABA = O$, $ABA + BA = O$, 两式相减得 $AB = BA$, 再利用 $AB + BA = O$, 所以 $AB = O$.

注意:在矩阵运算中, AB 不一定等于 BA , 若两者相等,则称 A 与 B 可交换.

例 3 设 4 阶方阵 $A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4), B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 均为 4 维列向量, 且 $|A| = 4, |B| = 1$, 计算 $|A+B|$.

解:当行列式的运算和矩阵的运算交织在一起时,需格外注意正确应用它们的性质.

$$\begin{aligned} |A+B| &= |\alpha + \beta, 2\gamma_2, 2\gamma_3, 2\gamma_4| = 2^3 |\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| + 2^3 |\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| \\ &= 8(|A| + |B|) = 40. \end{aligned}$$

例 4 已知 $\alpha=(1,2,3), \beta=(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}), A=\alpha^T \beta$, 其中 α^T 是 α 的转置, 计算 A^n .

解: 本题的关键是利用矩阵乘法的结合律, 并注意到 $\alpha^T \beta$ 是矩阵, 而 $\beta \alpha^T$ 是数.

$$\begin{aligned} A^n &= (\alpha^T \beta)(\alpha^T \beta) \cdots (\alpha^T \beta) = \alpha^T (\beta \alpha^T) (\beta \alpha^T) \cdots (\beta \alpha^T) \beta \\ &= 3^{n-1} \alpha^T \beta = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 5 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, 计算 A^n .

$$\begin{aligned} \text{解: } A^n &= \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \left[\lambda E + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]^n = \sum_{i=0}^n C_n^i (\lambda E)^{n-i} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^i \\ &= (\lambda E)^n + n (\lambda E)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} (\lambda E)^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2} \lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 6 试证: 如果 A 是实对称矩阵且 $A^2=O$, 那么 $A=O$.

证明: 设实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$A^2=O$, 即

$$\begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2 & * & \cdots & * \\ * & a_{12}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & \cdots & a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \cdots + a_{nn}^2 \end{pmatrix} = O$$

于是 $a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 0 (i=1, 2, \cdots, n)$, 即 $a_{ij} = 0 (i, j=1, 2, \cdots, n)$, 所以 $A=O$.



练习题

A 类题

1. 判断题

- (1) 设 A, B 为 n 阶方阵, 则 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. ()
- (2) A, B 为 n 阶阵, 且 $A^T = A, B^T = -B$, 则 $(AB-BA)^T = AB-BA$. ()
- (3) 设 A 为 n 阶方阵, 则 $|2A| = 2|A|$. ()
- (4) 设 A, B 为 n 阶方阵, 已知 $AB=O$ 则 $A=O$ 或 $B=O$. ()
- (5) 设 A, B 为 n 阶方阵, 已知 $A \neq B$, 则 $2|A| \neq |B|$. ()

2. 填空题

- (1) 设 $A=(2, 3, 5), B=(-1, -1, -1)$ 则 $AB^T = \underline{\hspace{2cm}}, A^T B = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (2) 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, 则 $AB = \underline{\hspace{2cm}}, BA = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 25 \\ 10 \\ 30 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 30 \\ 5 \end{bmatrix}$, 则 $AB = \underline{\hspace{2cm}}, AC = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (4) 若 $\alpha = (1, 2, 5), \beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right), A = \alpha^T \beta$, 则 $A^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (5) 设 A 为 n 阶方阵, 且 $|A| = 5$, 则 $|A|A^T = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 选择题

- (1) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, C 是 $p \times m$ 矩阵, 则下列运算不可行的是 ().

(A) $C + (AB)^T$ (B) ABC (C) $(BC)^T - A$ (D) $C^T A$

- (2) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵 ($m \neq n$), 则下列运算结果是 n 阶方阵的是 ().

(A) AB (B) $A^T B^T$ (C) $B^T A^T$ (D) $(AB)^T$

- (3) 设 A, B 为 n 阶方阵, 满足关系 $AB=O$, 则必有 ().

(A) $A=B=O$ (B) $A+B=O$
(C) $|A|=0$ 或 $|B|=0$ (D) $|A|+|B|=0$

- (4) 设 A 是 n 阶 ($n \geq 3$) 方阵, A^* 是其伴随矩阵, k 为常数, $k \neq 0$, 则 $(kA)^* = (\quad)$.

(A) kA^* (B) $k^{n-1}A^*$ (C) $k^n A^*$ (D) $k^{-1}A^*$

- (5) 设 A 为 n 阶方阵, 且 $|A| = a \neq 0$, 则 $|A^*| = (\quad)$.

(A) a (B) $\frac{1}{a}$ (C) a^{n-1} (D) a^n

4. 计算题

(1) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, 求 AA^T 和 A^TA .

(2) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $3AB - 2A$.

B 类题

1. 计算题

(1) 若矩阵 A, B 满足 $AB = BA$, 则称矩阵 A 和 B 可交换. 求所有与 $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 可

交换的三阶矩阵.

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 求 A^k .

2. 证明题

(1) 设 A 为 n 阶方阵, $B = \frac{1}{2}(A + E)$, 试证 $B^2 = B$ 的充分必要条件是 $A^2 = E$.

(2) 已知 $A = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$, 试证 $A^2 = lA$, 并求 l .

C 类题

1. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, 问:

(1) $AB = BA$ 吗?

(2) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ 吗?

(3) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ 吗?

2. 举反例说明下列命题是错误的:

- (1) 若 $A^2 = O$, 则 $A = O$;
- (2) 若 $A^2 = A$, 则 $A = O$ 或 $A = E$;
- (3) 若 $AX = AY$, 且 $A \neq O$, 则 $X = Y$.

第二节 逆矩阵 克拉默法则



知识要点

1. 逆矩阵的定义

A 是 n 阶方阵, 若存在 n 阶方阵 B , 使得 $AB = BA = E$, 则称 A 是可逆的, 又称 B 是 A 的逆矩阵, 记作 $A^{-1} = B$, 且若 A 为 n 阶可逆矩阵, 则它的逆矩阵是惟一的.

2. 逆矩阵的性质

设 A, B 为同阶可逆矩阵, 则

- (1) $(A^{-1})^{-1} = A$; (2) 若 $k \neq 0$, 则 kA 可逆, 且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$;
- (3) A^T 可逆, 且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; (4) AB 可逆, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- (5) A^* 可逆, 且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$; (6) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

3. 矩阵可逆的条件

- (1) 对 n 阶方阵 A , 若存在 n 阶方阵 B , 使 $AB = E$ (或 $BA = E$), 则 A 可逆, 且 $A^{-1} = B$;
- (2) n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$, (当 $|A| \neq 0$ 时, 称 A 为非奇异矩阵或满秩矩阵, 当 $|A| = 0$ 时, 称 A 为奇异矩阵或降秩矩阵).

4. 计算逆矩阵的方法——伴随矩阵法

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}, \text{ 其中 } A^* \text{ 是 } A \text{ 的伴随矩阵, } A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}, A_{ij} \text{ 是元素 } a_{ij} \text{ 的代}$$

数余子式.

5. 克拉默法则

含有 n 个方程、 n 个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

(1) 如果系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 的行列式 $|A| \neq 0$, 则方程组有惟一解,

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

其中 A_j 是将矩阵 A 中第 j 列换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 所成的矩阵, 即

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, n$$

(2) 当 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 全为零时称为齐次线性方程组, 若齐次线性方程组的系数矩阵的行列式 $|A| \neq 0$, 那么它只有零解; 如果它有非零解, 则必有 $|A| = 0$.



典型例题

例 1 矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且满足 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 求矩阵 B .

解: 由 $AA^* = |A|E$ 得 $|A| = 2$, 所以 A 可逆. 在方程 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ 两边左乘 A^{-1} , 右乘 A 得 $B = A^{-1}B + 3E$, 即 $(E - A^{-1})B = 3E$, 所以

$$\begin{aligned} B &= 3(E - A^{-1})^{-1} \\ &= 3\left(E - \frac{A^*}{|A|}\right)^{-1} \\ &= 6(2E - A^*)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

例 2 已知 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, 求 A 中所有元素的代数余子式之

和 $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}$.

解: 显然直接求各元素的代数余子式, 再求和比较麻烦, 需找其他方法. 由于 $|A| = 2 \neq 0$, 所以 A 可逆, 且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由 $A^* = |A|A^{-1}$ 得

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij} = 2 \left[\frac{1}{2} + (n-1) \times (-1) + (n-1) \right] = 1.$$

例 3 设 A 为 n 阶非零实矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵, 若 $A^* = A^T$, 试证 $|A| \neq 0$.

证明: 由 $A^* = A^T$ 知 $A_{ij} = a_{ij}$, 即 a_{ij} 的代数余子式仍为 a_{ij} , 再利用行列式按某行展开得

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2$$

又因 $A \neq O$, 所以 $|A| > 0$, 即有 $|A| \neq 0$.

例 4 设方阵 A 满足 $A^2 - A - 2E = O$, 试证:

- (1) A 和 $E - A$ 都是可逆矩阵, 并求它们的逆矩阵;
- (2) $A + E$ 和 $A - 2E$ 不可能同时为可逆矩阵.

证明: (1) 由 $A^2 - A - 2E = O$ 得 $A^2 - A = 2E$, 即 $\frac{1}{2}A(A - E) = E$, 因此 A 和 $E - A$ 都是可逆矩阵, 且 $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - E)$, $(E - A)^{-1} = -\frac{1}{2}A$.

(2) 由 $A^2 - A - 2E = O$ 得 $(A - 2E)(A + E) = O$, 若 $A - 2E$ 可逆, 则有 $A + E = O$, 即 $A + E$ 不可逆. 同理可证, 若 $A + E$ 可逆, 则 $A - 2E$ 不可逆, 所以 $A + E$ 和 $A - 2E$ 不可能同时可逆.

例 5 解方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 2, \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 = 4, \\ 8x_1 + 27x_2 + 64x_3 + 125x_4 = 8. \end{cases}$$

解: 系数行列式是范德蒙德行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$$

$$= (3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4) = 12,$$

而 $|A_1| = |A|$, $|A_2| = |A_3| = |A_4| = 0$, 所以方程组的解为 $x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0$.



练习题

A 类题

1. 判断题

- (1) 方阵 A 可逆的充要条件是 $|A| \neq 0$. ()
- (2) 可逆的对称矩阵的逆矩阵, 仍为对称矩阵. ()
- (3) 设方阵 A 可逆, 则对任意实数 λ , λA 均可逆. ()
- (4) $A^T A = E$, 则必有 $|A| = 1$. ()

2. 填空题

- (1) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) 设 A 为 n 阶方阵, 且 $|A| = 5$, 则 $|AA^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $(A - 2E)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (4) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 则 $(A^*)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, 矩阵 B 满足 $BA = B + 4E$, 则 $B = \underline{\hspace{2cm}}$, $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (6) 设齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 只有零解, 则 λ 满足条件 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 选择题

- (1) 设 n 阶方阵 A, B, C 满足关系式 $ABC = E$, 则必有 ().
 (A) $ACB = E$ (B) $CBA = E$ (C) $BAC = E$ (D) $BCA = E$

(2) 设 A, B 均为 n 阶方阵, 下列结论正确的是().

- (A) 若 A, B 均可逆, 则 $A+B$ 可逆 (B) 若 A, B 均可逆, 则 AB 可逆
(C) 若 $A+B$ 可逆, 则 $A-B$ 可逆 (D) 若 $A+B$ 可逆, 则 A, B 可逆

(3) 若由 $AB=AC$ 必能推出 $B=C$, 其中 A, B, C 为同阶方阵, 则 A 应满足条件().

- (A) $A \neq O$ (B) $A = O$ (C) $|A| = 0$ (D) $|A| \neq 0$

(4) 设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵, 则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ 等于().

- (A) $A^{-1}+B^{-1}$ (B) $A+B$
(C) $A(A+B)^{-1}B$ (D) $(A+B)^{-1}$

4. 计算下列各题

(1) 解矩阵方程 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$.

(2) 用克拉默法则解方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

B 类题

1. 计算题

(1) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 X 满足 $AX + E = A^2 + X$, 求 X .

(2) 设 $AB = A + 2B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 求 B .

2. 设 n 阶方阵 A 满足 $(A + E)^3 = O$, 证明矩阵 A 可逆, 并写出 A 的逆矩阵的表达式.