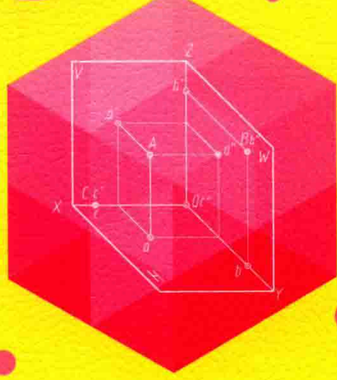
高等数学

（下）

车明刚　刘振杰　主　编
赵　力　徐　宝　副主编



清华大学出版社

高等数学

（下）

车明刚　刘振杰　主　编
赵　力　徐　宝　副主编

清华大学出版社
北　京

内容简介

“高等数学”是高等院校的一门重要的基础理论课程。本书参照《高等数学课程教学基本要求》，并结合作者多年的教学实践和经验精心编写而成，并配有对应的《高等数学习题解析(下)》(ISBN:978-7-302-47577-4)。

本书共有4章。第1章介绍了向量的概念，向量的线性运算及关系判断，平面、直线、曲面、曲线概念及其方程；第2章介绍了多元函数的极限与连续性，偏导数、全微分的概念及应用，多元函数的极值与最值问题；第3章介绍了多元函数积分的概念与应用，曲线积分和曲面积分，格林公式、高斯公式和斯托克斯公式的应用；第4章介绍了常数项级数的概念、性质及其审敛法，幂级数的概念、运算、性质及应用，傅里叶级数的概念等此外，根据章节的知识点内容，本书设置了节习题和总习题模块，便于学生巩固加深对知识点的认知与理解。

本书结构严谨、逻辑清晰、要点突出，既可作为普通高等院校各专业数学课程的教材，也可作为数学教育工作者的参考资料。

本书课件可能过网站 http://www.tupwk.com.cn/downpage 免费下载。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下 / 车明刚，刘振杰　主编．—北京：清华大学出版社，2018

ISBN 978-7-302-47530-9

Ⅰ．①高… Ⅱ．①车… ②刘… Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 140346 号

责任编辑： 王　定　程　琪
封面设计： 周晓亮
版式设计： 思创景点
责任校对： 曹　阳
责任印制： 李红英

出版发行： 清华大学出版社
网　　址： http：//www.tup.com.cn，http：//www.wqbook.com
地　　址： 北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编：** 100084
社 总 机： 010-62770175　　**邮　　购：** 010-62786544
投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者： 三河市金元印装有限公司
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185mm×260mm　　**印　　张：** 13.5　　**字　　数：** 294 千字
版　　次： 2018 年 1 月第 1 版　　**印　　次：** 2018 年 1 月第 1 次印刷
印　　数： 1～3000
定　　价： 45.00 元

产品编号：071019-01

前　言

“高等数学”是高等院校的一门重要的基础理论课程。为了适应普通高等院校学生学习高等数学课程的需要，我们参照《高等数学课程教学基本要求》，并结合多年的教学实践和经验，精心组织编写了本套教材和相应的习题解析。

本套教材在编写过程中，力求结构严谨、逻辑清晰，尽可能以通俗易懂的语言介绍“高等数学”课程中最为基础的，也是最主要的知识点。同时也注重体现时代的特点，吸收了国内外同类教材的精华，本着打好基础、够用为度、服务专业、学以致用的原则，重视理论产生、发展及演变，加强应用，力争做到科学性、系统性和可行性的统一，使传授数学知识和培养数学素养得到较好的结合。期望读者通过学习能在较短时间内掌握“高等数学”课程的基本概念、基本原理、基本技能和基本方法，从而为学习其他基础课程和专业课程打下必要的基础。

本套教材包括如下书目：

《高等数学（上）》	ISBN：978-7-302-47529-3	定价：45.00 元
《高等数学习题解析（上）》	ISBN：978-7-302-47810-2	定价：45.00 元
《高等数学（下）》	ISBN：978-7-302-47530-9	定价：45.00 元
《高等数学习题解析（下）》	ISBN：978-7-302-47577-4	定价：45.00 元

本书为《高等数学（下）》，共有 4 章。第 1 章介绍了向量的概念，向量的线性运算及关系判断，平面、直线、曲面、曲线概念及其方程；第 2 章介绍了多元函数的极限与连续性，偏导数、全微分的概念及应用，多元函数的极值与最值问题；第 3 章介绍了多元函数积分的概念与应用，曲线积分和曲面积分，格林公式、高斯公式和斯托克斯公式的应用；第 4 章介绍了常数项级数的概念、性质及其审敛法，幂级数的概念、运算、性质及应用，傅里叶级数的概念等。此外，根据章节的知识点内容，设置了节习题和总习题模块，便于读者巩固加深对内容的理解。

本书可以作为普通高等院校各专业基础课教材，以及其他数学教育工作者的参考资料。

在编写本书过程中，我们参阅并应用了国内外学者的有关著作和论述，并从中受到了启迪，特向他们表示诚挚的谢意！

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请同行、专家及读者指正。

编著者

2017 年 8 月

目　录

第1章　空间解析几何初步

平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有序的数对对应起来，把平面上图形和方程对应起来，从而可以用代数方法来研究几何问题．空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的.

本章首先引进向量的概念及线性运算，进而建立空间直角坐标系，然后利用代数方法研究空间平面和直线，以及几种特殊的曲面和曲线．这些内容对学习多元函数微积分将起到重要的作用．

1.1　向量及线性运算

1.1.1　向量的概念

我们经常遇到的像时间、质量、功、长度、面积与体积等这种只有大小的量叫做数量．像位移、力、速度、加速度等这种不但有大小而且还有方向的量就是向量.

定义 1.1.1　既有大小又有方向的量叫做向量，或称矢量，简称矢.

我们用有向线段表示向量，有向线段的始点与终点分别叫做向量的始点和终点，有向线段的方向表示向量的方向，而有向线段的长度代表向量大小．始点是 A，终点是 B 的向量记作$\overrightarrow{AB}$，在手写时常用带箭头的小写字母 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，…表示，而在印刷时常用黑体字母 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，…来记向量（如图 1.1.1).

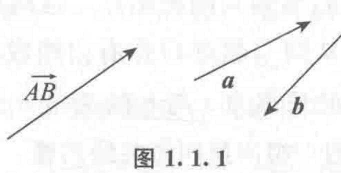


图 1.1.1

向量的大小叫做向量的模，也称为向量的长度，向量$\overrightarrow{AB}$与 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作$|\overrightarrow{AB}|$与$|\boldsymbol{a}|$.

模等于 1 的向量叫做单位向量，与向量 $\boldsymbol{a}$ 具有同一方向的单位向量叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，常用 $\boldsymbol{a}^0$ 来表示.

模等于 0 的向量叫做零向量，记作 $\boldsymbol{0}$，它是起点与终点重合的向量．零向量的方向不确定，可以是任意方向．不是零向量的向量叫做非零向量.

由于在几何中，我们把向量看成是一个有向线段，因此像对待线段一样，下面说到向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互平行，意思就是它们所在的直线相互平行，并记作 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$. 类似地，我们可以说一个向量与一条直线或一个平面平行等.

定义 1.1.2 如果两个向量的模相等且方向相同，那么这两个向量叫做**相等向量**，所有的零向量都相等，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

根据定义 1.1.2，对于不在同一条直线上的两个相等的非零向量 $\boldsymbol{n}$ 与$\overrightarrow{A'B'}$，如果用线段分别连接它们的一对起点 A 与A'，一对终点 B 与 B'，那么显然得到一个平行四边形 $ABB'A'$ (如图 1.1.2)；反过来，如果用这种做法从两个向量得到一个平行四边形时，那么这两个向量就相等.

两个向量是否相等与它们的始点无关，只由它们的模和方向决定．我们以后运用的正是这种始点可以任意选取，而只由模和方向决定的向量．这样的向量通常叫做**自由向量**.

也就是说，自由向量可以任意平行移动，移动后的向量仍代表原来的向量．在自由向量的意义下，相等的向量都看作同一个自由向量．由于自由向量始点的任意性，按需要我们可以选取某一点作为所研究的一些向量的公共始点，在这种场合，我们就说，把那些向量归结到共同的始点.

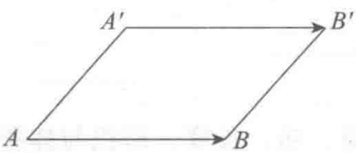


图 1.1.2

必须注意，由于向量不仅有大小，而且还有方向，因此，模相等的两个向量不一定相等，因为它们的方向可能不同.

定义 1.1.3 两个模相等、方向相反的向量叫做**互为反向量**，向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量记做$-\boldsymbol{a}$.

显然，向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$互为反向量，也就是$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$，或$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

如果把彼此平行的一组向量归结到共同的始点，这组向量一定在同一条直线上；同样，如果把平行于同一平面的一组向量归结到共同的始点，这组向量一定在同一个平面上.

定义 1.1.4 非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，从同一起点 O 作有向线段$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$分别表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，把由射线 OA 和 OB 构成的角度在$[0, \pi]$的角称为 **$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**，记作$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

定义 1.1.5 平行于同一直线的一组向量叫做**共线向量**．零向量与任何共面的向量组共线．

定义 1.1.6 平行于同一平面的一组向量，叫做**共面向量**．零向量与任何共面的向量组共面.

显然，一组共线向量一定是共面向量，三个向量中如果有两个向量是共线的，这三个向量一定也是共面的.

1.1.2　向量的线性运算

1. 向量的加法

定义 1.1.7　对向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，从同一起点 O 作有向线段$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$分别表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，然后以$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形 $OACB$，则把平行四边形的对角线向量$\overrightarrow{OC}$称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和**，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

这种求和方法称为**平行四边形法则**(如图 1.1.3). 以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作为向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点，则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量亦是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 这种求和方法称为**三角形法则**. 在自由向量的意义下，两个向量和的平行四边形法则可归结为三角形法则，如只要将图 1.1.3 向量$\overrightarrow{OB}$平移到$\overrightarrow{AC}$的位置就行了(如图 1.1.4).

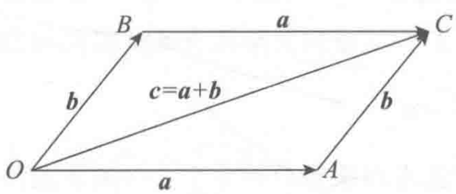


图 1.1.3

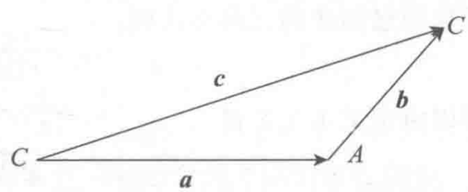


图 1.1.4

求两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和的运算叫做**向量加法**. 向量的加法满足下面的运算规律.

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由于向量的加法满足交换律与结合律，所以三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 相加，不论它们的先后顺序与结合顺序如何，它们的和总是相同的，因此可简单地写成

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

推广到任意有限个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 的和，就可以记作

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

有限个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 相加的作图法，可以由向量求和的三角形法则推广如下：自任意点 O 开始，依次引$\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，…，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，由此得一折线 $OA_1A_2\cdots A_n$(如图 1.1.5). 于是向量$\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}$ 就是 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 的和，即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

即

$$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}.$$

特别的，当 A_n 与 O 重合时，它们的和为零向量 $\boldsymbol{0}$.

这样求和的方法叫做**多边形法则**.

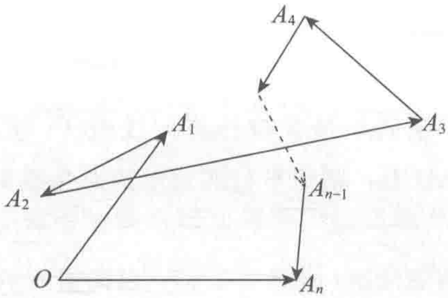


图 1.1.5

2. 向量减法

定义 1.1.8 当向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 的和等于向量 $\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$ 时，我们把向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，并记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，求向量的差的运算叫做**向量减法**.

根据向量加法的三角形法则，

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}.$$

所以由定义 1.1.8 得

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}.$$

由此得到向量减法的几何作图法：自空间任意点 O 引向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，那么向量 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(如图 1.1.6). 如果以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为一对邻边构成平行四边形 $OACB$，那么显然它一条对角线向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，而另一条对角线向量 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$(如图 1.1.7).

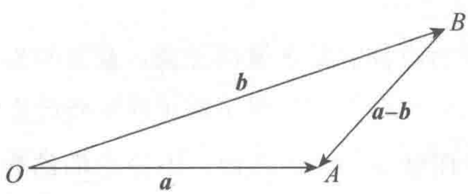


图 1.1.6

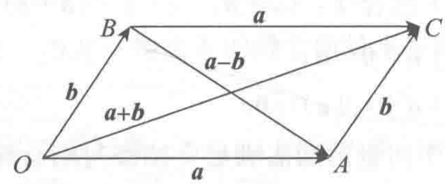


图 1.1.7

利用反向量，可以把向量减法运算变为加法运算，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

这表明求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的反向量 $-\boldsymbol{b}$ 之和，又因为 $-\boldsymbol{b}$ 的反向量就是 $\boldsymbol{b}$，因此又可得

$$\boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

从向量减法的这个性质，可以得出向量等式的移向法则：在向量等式中，将某一向量从等号的一端移到另一端，只需要改变它的符号. 例如将等式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 中的 $\boldsymbol{c}$ 移到另一端，那么有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$，这是因为从等式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 两边减去 $\boldsymbol{c}$，即加上 $-\boldsymbol{c}$，而 $\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$ 的缘故.

我们还要指出，对于任何的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，有下列不等式：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

这个不等式还可以推广到任意有限多个向量的情况：

$$|a_1+a_2+\cdots a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

3. 数乘向量

我们知道，在向量的加法中，n 个向量相加仍然是向量，特别是 n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的情形，显然这时的和向量模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，n 个 $\boldsymbol{a}$ 的和记作 $n\boldsymbol{a}$.

定义 1.1.9　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，其模是 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 我们把这种运算叫做数量与向量的乘法，简称数乘.

对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 以及任意实数 λ，μ，有以下运算法则：

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})$；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

特殊地，当 $\lambda=-1$ 时，$(-1)\boldsymbol{a}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的反向量，因此我们常把 $(-1)\boldsymbol{a}$ 简写成 $-\boldsymbol{a}$.

已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和它的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$，下面的等式成立：

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0 \text{ 或 } \boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

由此可知，一个非零向量乘以它的模的倒数，结果是一个与它同方向的单位向量.

向量的加法、减法及数乘运算统称为向量的线性运算 . $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$ 称为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的一个线性组合 $(\lambda,\ \mu\in\mathbf{R})$.

从向量的加法与乘法的运算规律知，对于向量也可以像实数及多项式那样去运算.

1.1.3　空间直角坐标系

若想确定空间一点的位置，就需要建立新的坐标系.

1. 空间直角坐标系

过空间一点 O 作三条两两垂直的数轴 x 轴、y 轴和 z 轴，这样就构成了空间直角坐标系，记作 $O-xyz$.

一般规定 x 轴、y 轴和 z 轴的位置关系遵循右手系：让右手的四个手指指向 x 轴的正向，然后让四指沿握拳方向转向 y 轴的正向，大拇指所指的方向为 z 轴的正向 . 在各数轴上的单位长度相同 . 把 x 轴、y 轴放置在水平平面上，z 轴垂直于水平平面（如图 1.1.8).

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，点 O 称为坐标原点，简称原点；x 轴、y 轴、z 轴这三个数轴统称为坐标轴，分别称为横轴、纵轴、竖轴；由任意两个坐标轴所确定的平面称为坐标面，共有 xOy，yOz，zOx 三个坐标面；三个坐标面把空间分隔成八个部分，每个部分依次分别称为第一、第二直至第八卦限，其中，第一卦限位于 x 轴、y 轴、z 轴的正向位置，第二至第四卦限也位于 xOy 面的上方，按逆时针方向排列，第五卦限在第一卦限的正下方，第六至第八卦限也在 xOy 面的下方，按逆时针方向排列(如图 1.1.9).

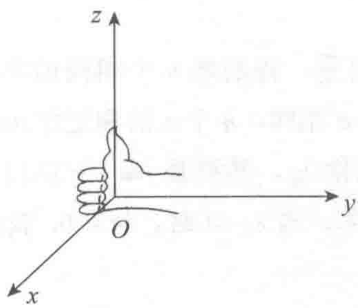


图 1.1.8

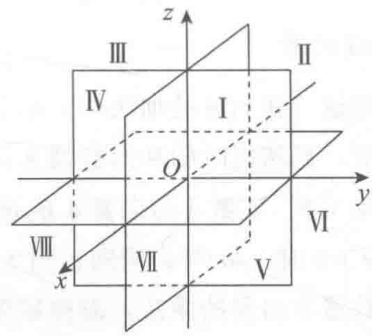


图 1.1.9

2. 空间点的直角坐标

我们将通过空间直角坐标系建立空间中的点与由三个实数组成的有序数组的关系，即空间中点与坐标之间的关系.

如图 1.1.10 所示，设 M 为空间的任意一点，过点 M 分别作垂直于三个坐标轴的三个平面，与 x 轴、y 轴和 z 轴依次交于 A、B、C 三点，若这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x，y，z，这样点 M 就唯一地确定了一组三元有序数组(x, y, z)，称该三元有序实数数组(x, y, z)为点 M 在该空间直角坐标系中的直角坐标，记作 $M(x, y, z)$或 $M=(x, y, z)$. x，y，z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，也称为点 M 坐标的 x 分量、y 分量和 z 分量.

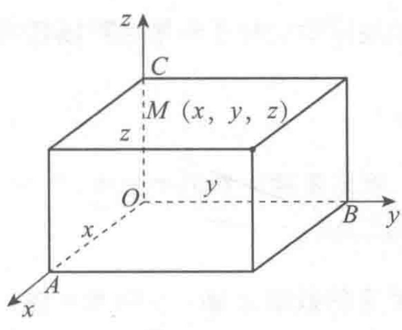


图 1.1.10

反之，如果任给一组三元有序数组(x, y, z)，在空间直角坐标系中可唯一确定一点.

原点 O 的坐标分量均为 0，即 $O(0, 0, 0)$；若点 M 在 xOy 坐标面上，则 $M=(x, y, 0)$；若点 M 在 x 轴上，则 $M=(x, 0, 0)$. 类似可得其他坐标面或坐标轴上点的坐标特征. 八个卦限内点的三个坐标均不为零，各分量的符号由点所在卦限确定.

类似于平面直角坐标系下的情形，可以讨论关于坐标轴、坐标面、坐标原点对称的点的坐标关系. 例如，点(x, y, z)关于 x 轴对称的点为$(x, -y, -z)$；点(x, y, z)关于 xOy 坐标面对称的点为$(x, y, -z)$；点(x, y, z)关于原点对称的点为$(-x, -y, -z)$等.

3. 向量的坐标表示

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，在 x 轴、y 轴、z 轴上各取一个与坐标轴同向的单位向量，依次记作 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，它们称为**坐标向量**．空间中任一向量 $\boldsymbol{a}$，它都可以唯一地表示为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的数乘之和.

事实上，设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{MN}$，作 M 和 N 在坐标轴的投影，如图 1.1.11 所示.

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.$$

由于$\overrightarrow{MA}$与 $\boldsymbol{i}$ 平行，$\overrightarrow{MB}$与 $\boldsymbol{j}$ 平行，$\overrightarrow{MC}$与 $\boldsymbol{k}$ 平行，所以存在唯一的实数 x，y，z，使得

$$\overrightarrow{MA}=x\boldsymbol{i}，\overrightarrow{MB}=y\boldsymbol{j}，\overrightarrow{MC}=z\boldsymbol{k}，$$

即

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \tag{1.1.1}$$

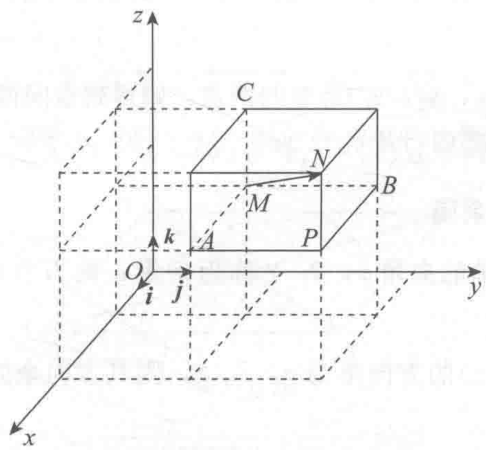


图 1.1.11

我们把式(1.1.1)中 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 系数组成的有序数组$(x，y，z)$叫做**向量 $\boldsymbol{a}$ 的直角坐标**，记为 $\boldsymbol{a}=(x，y，z)$. 向量的坐标确定了，向量也就确定了.

式(1.1.1)中的 x，y，z 是向量 $\boldsymbol{a}$ 分别在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影．因此，在空间直角坐标系中的向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标就是该向量在三个坐标轴上的投影组成的有序数组.

把已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点移到原点 O 时，其终点在 C，即 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OC}$，称$\overrightarrow{OC}$为**向径(或矢径)**，通常记作 $\boldsymbol{a}$；称点 C 的坐标$(x，y，z)$为 **$\boldsymbol{a}$ 的坐标**，记作 $\boldsymbol{a}=(x，y，z)$，即向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标就是与其相等的向径的终点坐标．这样在建立了空间直角坐标系后，向量、向径、坐标之间就有了一一对应的关系(如图 1.1.12).

进一步可得以下结论：在图 1.1.11 中，若设空间两点 $M(x_1，y_1，z_1)$，$N(x_2，y_2，z_2)$，则向量坐标为

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(x_2-x_1，y_2-y_1，z_2-z_1)，$$

即向量坐标为终点坐标减去对应始点坐标.

若 $\boldsymbol{a}=(x，y，z)$，则向量的模为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

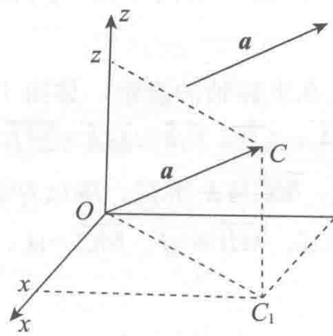


图 1.1.12

4. 空间两点间的距离

设 $M(x_1, y_1, z_1)$，$N(x_2, y_2, z_2)$为空间两点，则得到空间两点 M 与 N 之间的距离公式：

$$d=\overrightarrow{MN}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.1.2}$$

5. 向量的方向角与方向余弦

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴的夹角 α，β，γ 称为向量 a 的方向角．方向角的余弦值称为向量 a 的方向余弦.

若非零向量 $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$的方向角为 α，β，γ，则其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \tag{1.1.3}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{1.1.4}$$

6. 向量线性运算的坐标公式

引入向量的坐标以后，就可将向量的运算转化为代数运算，可得向量的加法、减法以及向量的数乘运算的坐标公式.

设在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，向量 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1, z_1)$及 $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2, z_2)$，则由向量坐标定义有

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}.$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\pm(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k},\\\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=(\lambda x_1)\boldsymbol{i}+(\lambda y_1)\boldsymbol{j}+(\lambda z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标分别为

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(x_1\pm x_2,\ y_1\pm y_2,\ z_1\pm z_2)$$

与

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1).$$

也就是说，向量的和(差)向量的坐标等于它们的坐标的和(差). 数乘向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的坐标等于数 λ 乘以 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

例 1.1.1　用向量加法证明：对角线相互平分的四边形是平行四边形.

证明　设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 交于 O 点且互相平分(如图 1.1.13).

从图可以看出：

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{DC}.$$

因此$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{DC}$且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$，即四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

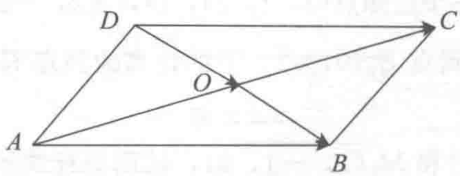


图 1.1.13

例 1.1.2　已知向量 $\boldsymbol{a}=(-3,\ 0,\ 1)$的始点 A 的坐标为$(-3,\ 1,\ 4)$，求终点 B 的坐标.

解　设 $B=(x,\ y,\ z)$，则 $\boldsymbol{a}=(x+3,\ y-1,\ z-4)=(-3,\ 0,\ 1)$，所以 $x=-6$，$y=1$，$z=5$，即 $B=(-6,\ 1,\ 5)$.

例 1.1.3　在 z 轴上求与点 $A(3,\ 5,\ -2)$和 $B(-4,\ 1,\ 5)$等距的点 M.

解　设 M 的坐标为$(0,0,z)$. 由题意知

$$|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|.$$

由式(1.1.2)得

$$\sqrt{3^2+5^2+(-2-z)^2}=\sqrt{(-4)^2+1^2+(5-z)^2},$$

从而解得

$$z=\frac{2}{7},$$

即所求的点为 $M(0,\ 0,\ \frac{2}{7})$.

例 1.1.4　设 $\boldsymbol{a}=(0,\ -1,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,\ 3,\ 4)$，求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

解　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(0+(-1),\ -1+3,\ 2+4)=(-1,\ 2,\ 6)$;

$$2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2\times0,\ 2\times(-1),\ 2\times2)-(-1,\ 3,\ 4)$$
$$=(0-(-1),\ -2-3,\ 4-4)=(1,\ -5,\ 0).$$

习题 1.1

1. 设向量 $\boldsymbol{u}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+5\boldsymbol{c}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示 $3\boldsymbol{u}-4\boldsymbol{v}$.

2. 在空间直角坐标系中，指出下列各点在哪个卦限：

$A(1,\ -1,\ 1)$，$B(1,\ 1,\ -1)$，$C(1,\ -1,\ -1)$，$D(-1,\ -1,\ 1)$.

3. 求证：以 $M_1(4,\ 3,\ 1)$，$M_2(7,\ 1,\ 2)$，$M_3(5,\ 2,\ 3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

4. 在平行四边形 $ABCD$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$M$ 为对角线 AC 与 BD 的交点，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MD}$.

5. 求点 $P(2,\ -5,\ 4)$到原点及各坐标轴和各坐标面的距离.

6. 在 yOz 平面上，求与三个已知点$(3,\ 1,\ 2)$，$(4,\ -2,\ -2)$，$(0,\ 5,\ 1)$等距离的点.

7. 设点 P 在 x 轴上，它到点 $P_1(0,\ \sqrt{2},\ 3)$的距离为到点 $P_2(0,\ 1,\ -1)$的距离的两倍，求点 P 的坐标.

8. 已知两点 $M_1(0,\ 1,\ 2)$和 $M_2(1,\ -1,\ 0)$，试用坐标表示向量$\overrightarrow{M_1M_2}$及$-2\ \overrightarrow{M_1M_2}$.

9. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，求：(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；(2)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；(3)$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

10. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(1,\ 1,\ 1)$的单位向量.

11. 求 λ 使向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda,\ 1,\ 5)$与向量 $\boldsymbol{b}=(2,\ 10,\ 50)$平行.

12. 设点 $A(1,\ -1,\ 2)$，$B(4,\ 1,\ 3)$，求：

(1) $\overrightarrow{AB}$在三个坐标轴上的坐标和分向量；

(2) $\overrightarrow{AB}$的方向余弦.

13. 已知两点 $A(2,\ \sqrt{2},\ 5)$，$B(3,\ 0,\ 4)$，求向量$\overrightarrow{AB}$的模、方向余弦和方向角.

14. 设向量的方向角为 α，β，γ，若已知 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{2\pi}{3}$，求 γ.

15. 设向量的方向余弦分别满足：(1)$\cos\alpha=0$，(2)$\cos\beta=1$，(3)$\cos\alpha=\cos\beta=0$. 问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何？

16. 设 $M_1(1,\ -2,\ -3)$，$M_2(2,\ -4,\ -1)$，求与$\overrightarrow{M_1M_2}$平行的单位向量.

17. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-1,\ 3,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ 5,\ -1)$，$\boldsymbol{c}=(6,\ 4,\ -6)$，证明 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行.

18. 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与 u 轴的夹角是$\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影.