工程数学 复变函数、矢量分析与场论、数学物理方法

田玉 郭玉翠 编著

清华大学出版社

工程数学 复变函数、矢量分析与场论、数学物理方法

田玉 郭玉翠 编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书包含复变函数、矢量分析与场论、数学物理方法三部分。复变函数部分的基本内容有：复数与复变函数的基本概念、复变函数的导数与积分、解析函数的性质和应用、复变函数的幂级数表示方法、留数定理及其应用等。矢量分析与场论部分介绍矢量函数及其导数与积分、梯度、散度和拉普拉斯算符在正交曲线坐标系中的表达式，以及算子方程等。数学物理方法部分的基本内容包括：波动方程、热传导方程、稳定场位势方程的导出、定解问题的提法；分离变量法求解定解问题的过程和步骤；二阶线性常微分方程的幂级数解法和斯图姆-刘维尔本征值问题；贝塞尔函数和勒让德函数的定义、性质与应用；求解定解问题的行波法、积分变换法和格林函数法等。

本书可以作为理科非数学专业和工科各专业本科生的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学：复变函数、矢量分析与场论、数学物理方法/田玉，郭玉翠编著. —北京：清华大学出版社，2018

ISBN 978-7-302-50904-2

Ⅰ. ①工…　Ⅱ. ①田…　②郭…　Ⅲ. ①工程数学　Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 189274 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：丛怀宇

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市龙大印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：21.75　　**字　　数**：529 千字
版　　次：2018 年 9 月第 1 版　　**印　　次**：2018 年 9 月第 1 次印刷
定　　价：49.80 元

产品编号：080808-01

前　言

本书是在郭玉翠编著、清华大学出版社出版的《工程数学——复变函数与数学物理方法》基础上，经过5年教学实践的磨练，增删部分内容编写而成的，现呈现给广大同学和读者朋友。与清华大学出版社出版的《工程数学—复变函数与数学物理方法》相比，有以下一些改变。

1. 增加了矢量分析与场论一章内容和习题。从数学角度希望读者对这部分内容有深入了解，也为工科学生后继课程打下基础。

2. 调整了复变函数部分的内容，有些内容重新用定理描述，比如复合闭路定理，各类型孤立奇点的判定定理等，方便理解和总结归纳。

3. 增加了若干例题和习题。由于数学概念和定理很抽象，理解起来困难，为此增加例题的讲解，以方便读者学习和掌握。

4. 原有附录A和矢量分析与场论内容有关，故删去。阅读和学习数学物理方法部分时，常用到常微分方程求解的方法，为了让读者阅读和学习无障碍，增加了附录A常微分方程简介。

在本书的使用过程中，北京邮电大学的许多老师提出了具体的意见和建议。刘文军副教授、李莉副教授审阅了部分稿件。清华大学出版社给与了大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

我们衷心期望使用和关心该教材的师生，对本书提出宝贵意见和建议。

田玉　郭玉翠

2018年6月

目　录

第1篇　复变函数

第3篇 数学物理方法

第1篇

复 变 函 数

第1章

复变函数及其导数与积分

1.1 引言

见到方程

$$x^2+1=0,$$

我们的第一反应是它在实数域内没有根.因为求它的根遇到了负数开平方的问题.

一般实系数一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

当判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时,都会遇到负数开平方的问题.再如 $\sqrt{-1}$,$\sqrt{-5}$ 这样的式子有什么意义吗?从有理数的角度来想象这样的数就没有任何意义.12世纪一位印度数学家婆什迦罗(Brahmin Bhaskara)说:"正数的平方是正数,负数的平方也是正数.因此,一个正数的平方根是两重的,一个正数和一个负数.负数没有平方根,因为负数不是平方数."

第一个将负数的平方根这个"显然"没有意义的东西写到公式里的人是16世纪意大利数学家卡尔达诺(Cardano),他把40看成是 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{-15}$ 的乘积.当时连卡尔达诺自己也认为这只是一种纯形式表达而已,没有任何意义,于是他给负数的平方根起了名字,称为"虚数",意指这是虚构的数.尽管不是有意为之,这个概念使数系得到了扩充,从实数域扩大到复数域.

关于复数理论系统的叙述是由瑞士数学家欧拉(Euler)作出的.他在1777年系统地建立起复数理论,发现了负指数函数和三角函数之间的关系,创立了复变函数论的一些基本定理,并开始把它们用到力学和地图制图学上.用符号"$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$"作为虚数单位也是欧拉首创的,借助于这个虚数单位,就有 $\sqrt{-9}=\sqrt{9}\times\sqrt{-1}=3\mathrm{i}$,$\sqrt{-7}=\sqrt{7}\sqrt{-1}=2.646\cdots\mathrm{i}$,这样一来,每一个实数都有一个自己的虚数搭档.此外,实数和虚数还能结合起来,形成单一的表达式,例如 $5+\sqrt{-15}=5+\sqrt{15}\mathrm{i}$,而这种混合表达式通常称作**复数**.

复数被人们广泛认识和应用,是在两个业余数学家给出了虚数的几何解释之后.这两个业余数学家是:测绘员威塞尔(Wessel),挪威人;会计师阿尔刚(Robert Argand),法国人.

按照他们的解释，一个复数，例如 $3+4\mathrm{i}$ 可以像图 1.1 那样表示出来，其中 3 是水平方向的坐标，4 是垂直方向的坐标.

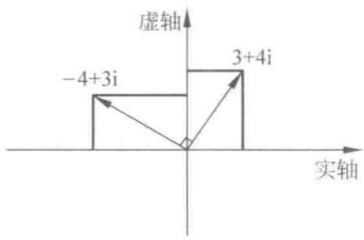

图 1.1

所有的实数（正数和负数）都对应横轴上的点，而虚数则对应纵轴上的点. 当我们把横轴上的 3 乘以虚数单位 i 时，就得到纵轴上的虚数 3i. 因此一个数乘以 i，相当于逆时针旋转 90°（见图 1.1）.

如果把 3i 再乘以 i，又需再逆时针旋转 90°，这下又回到横轴上，不过是位于负数那一边了. 这可以帮助我们理解

$$3\mathrm{i}\times\mathrm{i}=-3 \quad 或 \quad \mathrm{i}^2=-1.$$

这个规则同样适合于复数，把 $3+4\mathrm{i}$ 乘以 i，就得到

$$(3+4\mathrm{i})\mathrm{i}=3\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2=3\mathrm{i}-4=-4+3\mathrm{i}.$$

从图 1.1 立刻可以看出，$-4+3\mathrm{i}$ 正好相当于 $3+4\mathrm{i}$ 这个点绕原点逆时针旋转了 90°. 同样道理，一个数乘以 $-\mathrm{i}$ 就是它绕原点顺时针旋转了 90°. 这一点从图 1.1 也可以看出.

最后，我们通过一个例子来说明复数具有现实的应用.

从前有一个富于冒险的年轻人，在他祖父的遗物中发现了一张羊皮纸，上面指出了一项宝藏. 它这样写着：

乘船至北纬________，西经________（为了不泄密，隐去了实际经纬度），就会找到一座荒岛. 岛上北岸有一大片草地，草地上有一株橡树和一株松树，还有一座绞架，那是过去用来吊死叛变者的. 从绞架走到橡树，并记住走了多少步；到了橡树向右拐个直角再走这么多步，在这里打个桩. 然后回到绞架那里，朝松树走去，同样记住所走的步数；到了松树向左拐个直角再走这么多步. 在这里也打个桩. 在两桩的正中间挖掘，就可找到宝藏.

这张纸指示很明确，所以年轻人就租了一条船开往目的地. 他找到了那座岛，也找到了橡树和松树，但令他大失所望的是绞架不见了. 经过长时间的风吹、日晒和雨淋，绞架已经糟烂成土，一点痕迹也看不出来了.

我们的这位探险家陷入了绝望，在狂乱中，他在地上乱掘起来. 但是地方太大了，一切只是白费力气，他只好两手空空、无功而返了. 因此那项宝藏恐怕还在岛上埋着呢!

这是一个令人伤心的故事，更令人伤心的是，如果小伙子懂点数学，特别是复数，他本来是可以找到宝藏的!

把这个岛看成一个复平面，过两棵树画一个轴线（实轴），过两树中点与实轴垂直作虚轴，如图 1.2 所示.

以两树距离的一半作长度单位，这样橡树位于实轴的 -1 点上，而松树位于实轴的 $+1$ 点上. 我们不晓得绞架在哪里，不妨用大写希腊字母 Γ 来表示它的假设位置. 这个位置不一定在两根轴上，因此 Γ 应该是复数，即

$$\Gamma=a+b\mathrm{i}.$$

现在来做点小计算，同时使用虚数的乘法. 既然绞架在 Γ，橡树在 -1，两者的距离和方位便是 $-1-\Gamma=-(1+\Gamma)$. 同理绞架与松树距离为 $1-\Gamma$. 将这两段距离分别顺时针和逆时针旋转 90°，也就是按照复数乘法的法则将这两个数分别乘以 $-\mathrm{i}$ 和 i. 这样便得到两桩的位

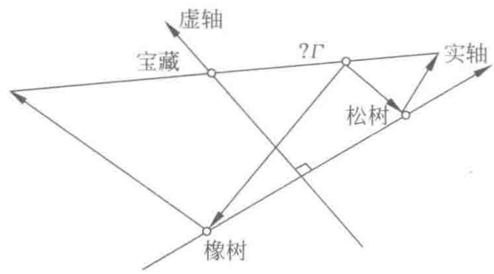

图　1.2

置为

第一根$(-\mathrm{i})[-(1+\Gamma)]+1=\mathrm{i}(\Gamma+1)+1$,

第二根$(+\mathrm{i})(1-\Gamma)-1=\mathrm{i}(1-\Gamma)-1$.

宝藏在两桩的正中间,因此我们应该求出上述两个复数之和的一半,即

$$\frac{1}{2}[\mathrm{i}(\Gamma+1)+1+\mathrm{i}(1-\Gamma)-1]=\frac{1}{2}[\mathrm{i}\Gamma+\mathrm{i}+1+\mathrm{i}-\mathrm{i}\Gamma-1]=\frac{1}{2}(2\mathrm{i})=\mathrm{i}.$$

现在看出来了,绞架Γ所在的位置在运算过程中消掉了,即不管绞架在何处,宝藏都在$+\mathrm{i}$这个点上!

1.2　复数与复变函数

1.2.1　复数

设x和y是实数,形如$z=x+\mathrm{i}y$的数称为复数.其中$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$是虚数单位,x和y分别称为z的**实部**(real part)和**虚部**(imaginary part),分别记作$x=\mathrm{Re}z$,$y=\mathrm{Im}z$.

复数$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$和$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$相等是指它们的实部与虚部分别相等.

如果$\mathrm{Im}z=0$,则z可以看成一个实数,记为$z=x$,因此复数是实数概念的推广;如果$\mathrm{Im}z\neq 0$,那么z称为一个虚数;如果$\mathrm{Im}z\neq 0$,而$\mathrm{Re}z=0$,则称z为一个纯虚数.

复数的**共轭**定义为$\bar{z}=x-\mathrm{i}y$.

复数的四则运算定义为

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2),$$

$$(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

复数在四则运算这个代数结构下,构成一个复数域,记为$\mathbb{C}$.

1.2.2　复平面

$\mathbb{C}$也可以看成平面$\mathbb{R}^2$,称为复平面.

作映射:$\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$:$z=x+\mathrm{i}y\mapsto(x,y)$,则在复数集与平面$\mathbb{R}^2$之间建立了一个一一对应关系.建立直角坐标系如图1.3所示,横坐标轴称为实轴,纵坐标轴称为虚轴;复平面一般称

为 z 平面或 w 平面等.

复数可以等同于平面中的向量. 向量的长度称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模,定义为

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

向量与正实轴之间的夹角称为复数的**辐角**(argument),记为 $\mathrm{Arg}z=\varphi$, $\tan\varphi=\dfrac{y}{x}$,于是有

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi \tag{1.1}$$

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2},\quad |z|^2=z\bar{z}.$$

注意：当 $z=0$ 时的辐角不确定,Arg0 无意义. 当 $z\neq0$ 时,由于辐角 φ 增加 2π 的整数倍,其终边不变,因此 $\mathrm{Arg}z$ 是多值的. 可是满足条件 $-\pi<\mathrm{Arg}z\leqslant\pi$ 的辐角是唯一的,称该值为辐角主值,记为 $\arg z$,于是有 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$, $\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

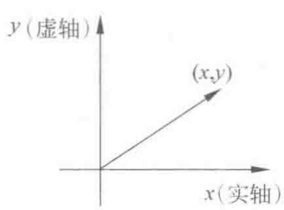

图 1.3

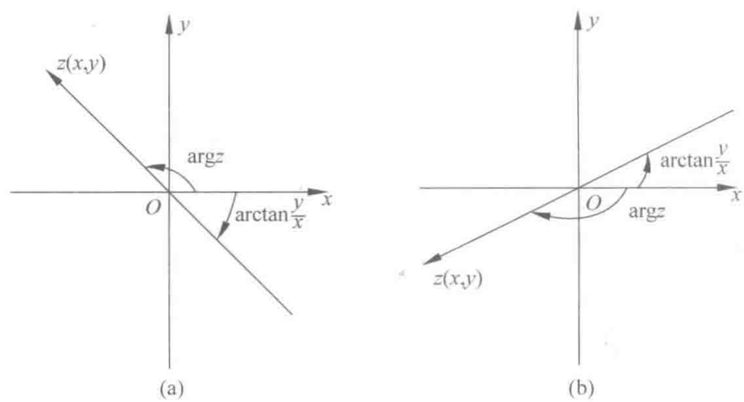

图 1.4

当 $\arg z(z\neq0)$ 表示 z 的辐角主值时,它与 $\arctan\dfrac{y}{x}\left(-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}\right)$,有如下关系(图 1.4)：

$$\underset{(z\neq0)}{\arg z}=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0,\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant0,\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0,\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases}$$

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 是复数的代数表示式。当 $z\neq0$,由(1.1)式和欧拉公式 $e^{\mathrm{i}\varphi}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$,可分别写出其三角表示式

$$z=|z|(\cos\mathrm{Arg}z+\mathrm{i}\sin\mathrm{Arg}z),$$

和指数表示式

$$z=|z|e^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}z}.$$

1.2.3 复数加法的几何表示

设 z_1,z_2 是两个复数，它们的加法、减法的几何意义是向量相加减如图 1.5 所示.

关于两个复数的和与差的模，有以下不等式：

(1) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$；

(2) $|z_1+z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$；

(3) $|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$；

(4) $|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$；

(5) $|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|,|\mathrm{Im}z|\leqslant|z|$；

(6) $|z|^2=z\bar{z}$.

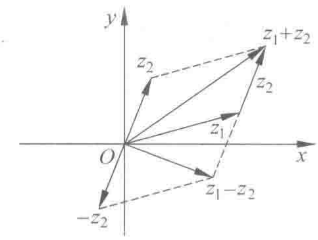

图 1.5

利用复数的三角表示，定义复数的乘幂为

$$z^n=|z|^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi).$$

令 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，则有

$$z^{-n}=|z|^{-n}[\cos(-n\varphi)+\mathrm{i}\sin(-n\varphi)].$$

进一步，有

$$z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{1}{n}\varphi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{n}\varphi\right)\right],$$

共有 n 个值.

例 1.1 试用复数表示圆的方程

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0,\quad a\neq 0,$$

其中，a,b,c,d 是实常数.

解 由复数及其共轭的定义，上述方程的复数形式为

$$az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+d=0,\quad \text{其中 } \beta=\frac{1}{2}(b+\mathrm{i}c).$$

例 1.2 设 z_1,z_2 是两个复数，证明

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\quad \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2,\quad \bar{\bar{z}}_1=z_1.$$

证明 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则 $z_1+z_2=x_1+x_2+\mathrm{i}(y_1+y_2)$.

$z_1z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$，所以

$\overline{z_1+z_2}=(x_1+x_2)-\mathrm{i}(y_1+y_2)=x_1-\mathrm{i}y_1+x_2-\mathrm{i}y_2=\bar{z}_1+\bar{z}_2$，

$\overline{z_1z_2}=(x_1x_2-y_1y_2)-\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)=\bar{z}_1\bar{z}_2$，

$\bar{\bar{z}}_1=\overline{x_1-\mathrm{i}y_1}=x_1+\mathrm{i}y_1=z_1$.

利用数学软件 Maple 可以进行复数运算. 例如计算 $\dfrac{(2+3\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}$，只需在 Maple 窗口输入

$$\mathrm{num}:=\frac{((2+3\cdot I)\cdot(3-2\cdot I))}{((1+2\cdot I)\cdot(2+I))}$$

回车后，直接输出结果：$1-\dfrac{12}{5}\mathrm{I}$.（注意：在 Maple 程序中虚数单位 $\sqrt{-1}$ 需用大写字母 I