普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数

王宽程 杨英钟 高小明 编著

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\
\qquad\vdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m
\end{cases}
$$

$$\boldsymbol{Ax=b}$$

清华大学出版社

线性代数

王宽程　杨英钟　高小明　编著

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书从应用型本科院校的教学实际要求出发，有针对性地选取内容，分层次安排习题，全书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值、二次型、线性空间与线性变换共6章. 并安排了用MATLAB求解相关问题的内容.

本书适合普通高等院校理工类、经管类等专业教学使用.

版权所有，侵权必究. 侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王宽程，杨英钟，高小明编著. —北京：清华大学出版社，2018
ISBN 978-7-302-50905-9

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①王…　②杨…　③高…　Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第189275号

责任编辑：刘　颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：董　瑾

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市君旺印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：12.5　　**字　　数**：302千字
版　　次：2018年9月第1版　　**印　　次**：2018年9月第1次印刷
定　　价：29.80元

产品编号：081083-01

前　言

线性代数是大学数学教育中的一门重要基础课程.通过对线性代数课程的学习,学生们不仅可以掌握该课程的基本知识理论,更重要的是可以培养学生的抽象思维和逻辑推理能力以及利用矩阵等工具解决专业中遇到的实际问题的能力.

传统的线性代数教材存在不适应计算机时代大学生能力提升的诸多不利方面,因此,改革线性代数教材的编写理念,融入数学实验的思想与内容,切合时代节拍成为本书编写的一个良好动机.我们认为,让学生应用数学知识并通过使用计算机来解决实际问题是数学教育中非常值得重视的环节.

本书共分六个章节.第1章主要介绍了行列式的基本概念和行列式的计算,并包含了行列式的一个应用——克莱姆法则;第2章介绍了矩阵的运算、可逆矩阵、矩阵的初等变换、分块矩阵和矩阵的秩的概念以及有关性质;第3章讨论了n维向量的线性关系和向量组的秩的概念,并在此基础上讨论了线性方程组解的结构;第4章介绍了方阵的特征值和特征向量以及矩阵相似的概念;第5章介绍了实二次型的概念和化二次型为标准形的方法,并讨论了正定二次型的相关性质;第6章介绍了线性空间与线性变换的基本概念和性质.为便于读者掌握各部分的基本内容,我们在每节中穿插有若干练习题,作为基本训练之用;并在主要章节中增加了用MATLAB处理线性代数有关运算的数学实验内容.章末附有习题,书后附有习题的参考答案,供读者参考.

本书可作为高等院校工科、理科(非数学专业)与经济管理学科线性代数课程的教材,课内32～64学时的都可以选用.某些章节不同专业可根据不同情况予以取舍.

本书第1、3章由王宽程编写,第2、4章由高小明编写,第5、6章由杨英钟编写.王宽程完成了全书的统稿工作,杨英钟完成了全书的审阅工作.

我们感谢参考文献中所列著作的诸位作者,本书从他们的著作中得到许多有益的启示,并采纳了其中若干优秀的例题、习题和一些生动有趣的应用实例,极大地丰富了本书的内容.

由于作者水平有限,书中一定会有许多错、漏及考虑不周之处,我们热切希望使用本书的教师和同学予以指正,以便再版时修订.我们在此致以谢意.

编者

2018年6月

目录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章

行　列　式

行列式是研究线性代数的一个重要工具，它在数学的许多分支以及其他自然科学方面有着广泛的应用．本章先介绍二阶、三阶行列式，然后归纳给出 n 阶行列式的定义，进而讨论其性质和计算方法，最后介绍用行列式解线性方程组的克莱姆法则．

1.1　二阶、三阶行列式

1.1.1　二阶行列式

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，简记为 D，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式含有两行两列，横排的称为行，竖排的称为列．数 a_{ij} $(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元素，其中 i 为行标，j 为列标．元素 a_{ij} 位于行列式的第 i 行，第 j 列．二阶行列式有四个元素分别是 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}．

二阶行列式表示的代数和，可以用画线（参见图 1.1）的方法帮助记忆，即实线连结的两个元素的乘积减去虚线连结的两个元素的乘积．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图　1.1

例 1　计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$．

解　$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=2\times4-(-1)\times5=13.$

例 2　设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & 2 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}$，问 λ 为何值时 $D=0$．

解　$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & 2 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda=\lambda(\lambda-2).$

由 $D=0$ 得，$\lambda(\lambda-2)=0$，则 $\lambda=0,\lambda=2$.

因此可得，当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$ 时，$D=0$.

1.1.2 三阶行列式

类似于二阶行列式，我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31},$$

称为三阶行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

三阶行列式含有三行三列，是6项的代数和，可以用(对角线法则)画线(参见图1.2)的方法帮助记忆. 其中各实线连结的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线连结的三个元素的乘积是代数和中的负项.

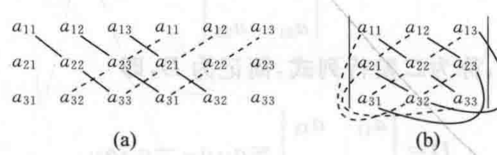

图 1.2

例3 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法则，有

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=1\times0\times6+3\times4\times(-1)+2\times5\times0-1\times4\times0-3\times5\times6-2\times0\times(-1)$$

$$=-102.$$

例4 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ -b & a & 0 \end{vmatrix}$，问 a,b 满足什么条件时 $D=0$.

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ -b & a & 0 \end{vmatrix}=a^2+b^2$.

要使 $D=0$，则 a,b 必须同时等于0. 因此，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时 $D=0$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

习题 1-1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 4\end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}5 & 4\\ 6 & 7\end{vmatrix}$；(4) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 5 & 7 & 9\end{vmatrix}$；(6) $\begin{vmatrix}3 & 6 & 9\\ 0 & 4 & 8\\ 0 & 0 & 5\end{vmatrix}$.

2. 解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix}x^2 & 4\\ x & 2\end{vmatrix}=0$；(2) $\begin{vmatrix}5 & 1 & x\\ 4 & x & 0\\ 1 & 0 & x\end{vmatrix}=0$.

1.2 *n* 级排列

为了给出 n 阶行列式的定义，以及确定行列式中每一项所应取的符号，在这里我们研究一下 n 级排列的性质和有关定理.

定义 1.1 由数码 $1,2,\cdots,n$ 所组成的一个有序数组，称为一个 **n 级排列**.

排列是有序数组，所以组成排列数码的顺序不同就是不同的排列，例如 123 和 231 就是不同的三阶排列. 不同的 n 阶排列有多少个呢？n 阶排列的一般形式可以表示为 $j_1j_2\cdots j_n$，其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 为数 $1,2,\cdots,n$ 中某一个数，且互不相同，这时 $j_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的下标 k 表示 j_k 排在 n 阶排列从左到右的第 k 个位置上. 这样按 n 阶排列的定义知，j_1 可有 n 种选取（在 n 个数码中任选一个），j_2 有 $n-1$ 种选取（去掉 j_1，在余下的 $n-1$ 个数码中任选一个），……，j_{n-1} 可有 2 种选取（去掉 $j_1,j_2,\cdots,j_{n-2}$，在余下的 2 个数码中任选一个），而 j_n 只能取余下的那个数码，故 n 阶排列一共有

$$n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1=n!$$

个. 例如三阶排列共有 $3!=6$ 个，分别是：

123， 132， 213， 231， 312， 321.

定义 1.2 在一个排列中，若有某个较大的数排在某个较小的数的前面，则称这两个数构成一个逆序. 在一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，逆序的总数称为这个排列的**逆序数**，记为 $N(j_1j_2\cdots j_n)$.

例如，5 级排列 35412 有 7 个逆序，4 级排列 1324 有一个逆序.

下面寻求计算排列逆序数的方法. 先看一个例子，排列 35412 构成逆序的数对有

31， 32；

54， 51， 52；

41， 42.

因而 35412 的逆序数为

$$
\begin{aligned}
&2(3\text{ 的后面比 }3\text{ 小的数的个数})+\\
&3(5\text{ 的后面比 }5\text{ 小的数的个数})+\\
&2(4\text{ 的后面比 }4\text{ 小的数的个数})+\\
&0(1\text{ 的后面比 }1\text{ 小的数的个数})=7,
\end{aligned}
$$

所以 $N(35412)=7$.

由此得出计算排列的逆序数的一个方法：

$$
\begin{aligned}
N(j_1j_2\cdots j_n)=&N_1(j_1\text{ 的后面比 }j_1\text{ 小的数的个数})+\\
&N_2(j_2\text{ 的后面比 }j_2\text{ 小的数的个数})+\cdots+\\
&N_{n-1}(j_{n-1}\text{的后面比 }j_{n-1}\text{小的数的个数}).
\end{aligned}
$$

例如，在排列 3657214 中，在 3 的后面比 3 小的数有 2 个，在 6 的后面比 6 小的数有 4 个，在 5 的后面比 5 小的数有 3 个，在 7 的后面比 7 小的数有 3 个，在 2 的后面比 2 小的有 1 个，所以

$$N(3657214)=2+4+3+3+1=13.$$

$12\cdots n$ 所构成的 n 级排列，是按自然数的顺序由小到大进行排列的，我们称它**自然顺序排列**，容易看出自然顺序排列的逆序数为 0，即 $N(12\cdots n)=0$.

在上例中，我们看到有的排列的逆序数是奇数，而有的排列的逆序数是偶数.

定义 1.3 在一个排列中，若它的逆序数是奇数，则称这个排列是**奇排列**；若它的逆序数是偶数，则称这个排列是**偶排列**.

例如，3 级排列 231 的逆序数 $N(231)=2$，所以它是一个偶排列；5 级排列 35412 的逆序数 $N(35412)=7$，是个奇数，所以它是一个奇排列；自然顺序排列 $123\cdots n$ 的逆序数 $N(12\cdots n)=0$，因此它是一个偶排列.

将一个排列中某两个数码的位置互换，而其余数码不动，就得到另一个排列，这样的变换称为**对换**.

例如，排列 1324 经过 3，4 对换，变成了排列 1423. 原来排列的逆序数是 1，为奇排列，经过对换 3，4 后的排列的逆序数是 2，为偶排列. 又如排列 1357624 经过 5，2 对换变为排列 1327654，原来排列的逆序数是 8，为偶排列，经过对换 5，2 后的排列的逆序数是 7，为奇排列. 在一个排列中，经过一次对换之后改变了原来排列的奇偶性. 由下面的定理知道，这是一个普遍的规律.

定理 1.1 任一排列，经过一次对换后排列的奇偶性改变.

证 首先看在一个排列中互换相邻的两个数的情形. 设已给排列为

$$\cdots ij\cdots,$$

经过 i,j 的对换，变成排列

$$\cdots ji\cdots,$$

其中"$\cdots$"表示除 i,j 之外其余不动的数. 比较一下这两个排列的逆序数，由于"$\cdots$"中各数的位置保持不变，因此在上述两个排列中，i 或 j 与前面和后面"$\cdots$"中各数所构成的逆序也相同，所不同的只是改变了 i 与 j 的顺序. 于是当 $i<j$ 时，新排列比原排列的逆序数多了一个；当 $i>j$ 时，新排列比原排列的逆序数少了一个，所以这两个排列的奇偶性相反.

现在，看一般情形. 设 i 与 j 之间有 s 个数，即排列为

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots,$$

经过 i 与 j 的对换，变成排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots,$$

这样一个对换，我们可以把它看作在原排列中先让 j 与 k_s 对换，再与 k_{s-1} 对换，……，最后与 i 对换；总共经过 $s+1$ 次相邻两数的对换，变成排列

$$\cdots jik_1k_2\cdots k_s\cdots,$$

然后，再让 i 与 k_1 对换，再与 k_2 对换，……，最后与 k_s 对换，总共经过 s 次相邻两数的对换，最后变成排列

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots,$$

它正是排列"$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots$"经过 i 与 j 的对换所得到的排列. 因此，i 与 j 的对换总共通过 $2s+1$ 次相邻两数的对换而得到. 上面已经证明对换相邻两数改变排列的奇偶性，而 $2s+1$ 为奇数，所以，经过奇数次相邻两数的对换改变原排列的奇偶性.

习题 1-2

1. 写出 4 个数码 1,2,3,4 的所有 4 阶排列.

2. 分别计算下列 4 个 4 阶排列的逆序数，然后指出奇排列是(　　).

A. 4321　　B. 4132　　C. 1342　　D. 2314

3. 求下列排序的逆序数：

(1) 41253；　(2) 3712456；　(3) 36715284；　(4) $n(n-1)\cdots 21$.

1.3 n 阶行列式的定义

先来剖析二阶、三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

其共同特征可概括如下：

(1) 二阶行列式是 $2!=2$ 项的代数和，其中每一项是取自不同行不同列的两个元素的乘积. 三阶行列式是 $3!=6$ 项的代数和，其中每一项是取自不同行不同列的三个元素的乘积，且任意三个不同行不同列的元素的乘积都是展开式中的一项.

(2) 代数和中每一项的正负号是这样决定的：当每一项行标按自然顺序排列时，由列指标组成排列的奇偶性确定，偶者为正，奇者为负.

据此，我们可将二阶行列式、三阶行列式分别定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{N(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 表示对 1,2 这两个数所有排列(共 2! 项)取和，$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1,2,3 这三个数所有排列(共 3! 项)取和.

根据以上规律，我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.4 由 n^2 个数，排成 n 行 n 列，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称其为 ***n* 阶行列式**，其中 a_{ij} 代表第 i 行第 j 列的数(称为元素)$(i,j=1,2,\cdots,n)$，i,j 分别称为元素 a_{ij} 的**行标**和**列标**. n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，此代数和共有 $n!$ 项，每项的符号是这样确定的：当这一项的 n 个元素的行标按自然顺序排列好之后，它的列标构成一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$，若该 n 级排列是偶排列，那么这一项取正号；是奇排列，则取负号，即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.1}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$(共 $n!$ 项)求和. $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的**一般项**.

当 $n=2$ 或 $n=3$ 时，就是二阶行列式或三阶行列式. 特别地，当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

为方便计算，n 阶行列式(1.1)可简记为 $D=|a_{ij}|_n$.

例 1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 这是一个 4 阶行列式，在展开式中应该有 $4!=24$ 项. 但是由于出现很多的零，所以不等于零的项数就大大减少了. 我们具体地来看一下. 展开式中项的一般形式是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

显然，如果 $j_1\neq 4$，那么 $a_{1j_1}=0$，从而这个项就等于零. 因此只需考虑 $j_1=4$ 的那些项；同理，只需考虑 $j_2=3, j_3=2, j_4=1$ 这些列指标的项. 这就是说，行列式中不为零的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 这一项，而 $N(4321)=6$，这一项前面的符号应该是正的. 所以

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}=1\times2\times3\times4=24.$$

例 2 计算行列式

$$\begin{vmatrix}a&b&c&d\\e&f&g&h\\x&y&0&0\\u&v&0&0\end{vmatrix}.$$

解 这是一个 4 阶行列式，在展开式中应该有 $4!=24$ 项. 但只有以下 4 项为非零.

$$chxv, chyu, dgxv, dgyu.$$

与这 4 项相对应的列标的 4 级排列分别为 3412，3421，4312 和 4321，对应的逆序总数分别为：$N(3412)=4$，$N(3421)=5$，$N(4312)=5$，$N(4321)=6$，所以第一项和第四项取正号，第二项和第三项取负号，即

$$\begin{vmatrix}a&b&c&d\\e&f&g&h\\x&y&0&0\\u&v&0&0\end{vmatrix}=chxv-chyu-dgxv+dgyu.$$

例 3 求下列行列式的值

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

这个行列式称为**上三角形行列式**，它的特点是当 $i>j$ 时 $a_{ij}=0$，或者说这个行列式主对角线(即 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所占的一条对角线)以下的元素都等于零.

解 由行列式的定义知，D 的展开式共有 $n!$ 项，其展开式中的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

而乘积当中只要有一个元素为零，乘积就为零，所以只需取乘积不为零的项即可. 由于一般项中 a_{nj_n} 取自 D 的第 n 行，而第 n 行除 a_{nn} 外，其余元素全为零，故若 $j_n\neq n$，则对应的行列式展开式中那一项一定为零，求和时该项可不计，为此只要考虑 $j_n=n$ 的项. 同样由于 D 的第 $n-1$ 行中除 $a_{n-1,n-1}$ 及 $a_{n-1,n}$ 外，其余元素全为零，且 j_n 已取 n，从而只能取 $j_{n-1}=n-1$. 以此类推，$j_2=2$，$j_1=1$. 所以行列式中不为 0 的项只能是 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 又因列标的 n 级排列的逆序数 $N(123\cdots n)=0$，所以

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可计算出下三角形行列式（当 $i<j$ 时 $a_{ij}=0$ 的行列式）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

定理 1.2 n 阶行列式的一般项可以写为

$$(-1)^{m+l}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列，m 和 l 分别为排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

证 在乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中，交换任意两个元素的位置，那么两个下标所对应的 n 级排列也同时变换，由定理 1.1 可知，排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数将同时改变奇偶性，于是和式 $m+l$ 的奇偶性不变. 这样，经过有限次交换两个元素的位置，使乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中元素的行标调换成按自然顺序 $12\cdots n$ 排列，而设此时所对应的列标的 n 级排列为 $s_1s_2\cdots s_n$，则有

$$\begin{aligned}(-1)^{m+l}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}&=(-1)^{N(12\cdots n)+N(s_1s_2\cdots s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}\\&=(-1)^{N(s_1s_2\cdots s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}.\end{aligned}$$

上式利用了 $N(12\cdots n)=0$.

有了定理 1.2，在 n 阶行列式的定义 1.4 中，如果我们把行列式的一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中元素的列标调换成按自然顺序 $12\cdots n$ 排列，而此时相应的行标的 n 级排列为 $i_1i_2\cdots i_n$，那么行列式的定义又可叙述为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}, \tag{1.2}$$

其中 $\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的所有排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 求和.

习题 1-3

1. 用行列式定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2. 在 6 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，下列各元素乘积应取什么符号？

(1) $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$； (2) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$； (3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com