



iCourse · 教材

大学数学教程

山东大学数学学院

刘建亚 吴臻 主编

秦静 金辉 傅国华 编

# 线性代数

第三版

高等教育出版社



iCourse · 教材

大学数学教程

# 线性代数

第三版

山东大学数学学院

刘建亚 吴臻 主编

秦静 金辉 傅国华 编

高等教育出版社·北京

## 内容简介

本书根据高等学校非数学类专业线性代数课程的教学要求和教学大纲,在吸收国内外优秀教材的优点并结合多年教学经验的基础上编写而成. 主要内容包括矩阵、 $n$  维向量、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型. 本次修订增加了少量思考题,以加深读者对学习内容的理解. 本书兼顾不同专业、不同学时的需要,适当安排了一些选学章节. 其中,加一个“\*”号的内容为对数学要求较高的专业所用,加两个“\*”号的内容可供教师选用或学有余力的学生课外阅读. 书中每章配有 MATLAB 运算实例,书末附有思考题参考答案、部分习题参考答案和数学建模应用举例.

本书可供高等学校非数学类专业学生使用,也可供科技工作者学习参考. 以本书为蓝本、由编者亲自讲授的线性代数 MOOC 已在“中国大学 MOOC”平台上线,读者可登录平台进行观看学习.

## 图书在版编目 (CIP) 数据

大学数学教程. 线性代数 / 刘建亚, 吴臻主编; 秦静, 金辉, 傅国华编. -- 3 版. -- 北京: 高等教育出版社, 2018.3

ISBN 978-7-04-049207-1

I. ①大… II. ①刘… ②吴… ③秦… ④金… ⑤傅…  
III. ①高等数学-高等学校-教材②线性代数-高等学校-教材 IV. ①O13②O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 000461 号

策划编辑 于丽娜      责任编辑 于丽娜      封面设计 张志奇      版式设计 张杰  
插图绘制 邓超      责任校对 殷然      责任印制 田甜

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街 4 号  
邮政编码 100120  
印 刷 北京宏伟双华印刷有限公司  
开 本 787 mm×960 mm 1/16  
印 张 12.75  
字 数 230 千字  
购书热线 010-58581118  
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>  
<http://www.hepmall.com>  
<http://www.hepmall.cn>  
版 次 2003 年 1 月第 1 版  
2018 年 3 月第 3 版  
印 次 2018 年 3 月第 1 次印刷  
定 价 26.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换  
版权所有 侵权必究  
物料号 49207-00

# 大学数学教程

## 编委会

主 编 刘建亚 吴 臻

编 委 (按姓氏笔画排列)

刁在筠 叶 宏 包芳勋 吕 同 许闻天

张天德 张光明 金 辉 郑修才 胡发胜

秦 静 蒋晓芸 傅国华

## 第三版前言

在“互联网+”的发展背景下,传统的课堂教学模式及学生学习方式正在悄然发生变化,仅以纸质教材作为课堂教学载体已不能很好地适应当前的教育观念,尤其是以“慕课”为代表的在线开放课程的兴起,对大学数学课程的内容和形式提出了新的要求,开发新形态教材成为教材改革的新趋势.本次修订正是在这种形势下进行的.



编者的话

本套教材由山东大学大学数学国家级教学团队精心打造,目前本团队在“中国大学 MOOC”平台已上线 5 门课程,分别是高等数学——微积分(1)、高等数学——微积分(2)、线性代数、线性代数解题技巧及典型题分析、概率论与数理统计,受到全国不同层次学习者的好评.其中,高等数学——微积分(1)、高等数学——微积分(2)、线性代数 2017 年入选首批“国家精品在线开放课程”.

在“慕课”建设过程中,我们特别注重体现现代教育思想与教学观念,在教学体系、教学内容与教学方法上借鉴多年教学改革优秀成果;注重以学生为中心,让学生在学习上实现自适应,力求满足学生自己思考、自主学习、终身学习的大趋势.本次教材修订结合已上线“慕课”,将教学视频资源的建设和应用作为修订的重点.

大学数学系列课程中的线性代数课程是“中国大学 MOOC”平台上开设的第一门线性代数课程,由本教材编者亲自讲授.学习者在使用本教材时,可结合“慕课”课程中的资源进行学习.本次修订实现了教材建设与课程建设的对接,线性代数中重要知识点的相关视频资源也在纸质教材中呈现,学习者可以通过扫描二维码观看视频.多种形式的媒体资源极大丰富了知识的呈现形式,期望通过这些视频资源的设计和支持,在帮助教师提升课程教学效果的同时,为学生自主学习提供思维与探索的空间.

我们特别感谢山东大学本科生院、山东大学数学学院对“慕课”课程建设的高度重视和热情指导,感谢课程组全体老师的辛勤付出和大力支持,感谢“爱课程”及其团队、“中国大学 MOOC”平台为我们的课程与教材提供了展示的舞台.本教材修订得到山东大学教务处、山东大学数学学院领导及同事的大力支持,他们在此次修订也给出了不少宝贵的建议,我们在修订时都作了认真考虑.在此,表示衷心的感谢.

限于编者水平,新版中难免存在不足,欢迎广大专家、同行与读者批评指正.

编者  
2017 年 6 月

## 第二版前言

本套教材是由山东大学数学学院具有丰富教学经验的一线教师编写的,第一版是普通高等教育“十五”国家级规划教材,包括《微积分1》《微积分2》《线性代数》《概率论与数理统计》《复变函数与积分变换》五册.经过多年的教学实践,山东大学数学学院在大学数学课程建设和教学改革方面取得了可喜的成绩.微积分与数学实验、线性代数、复变函数与积分变换分别于2007年、2006年、2010年被评为国家精品课程,由刘建亚教授作为带头人的大学数学系列课程教学团队被评为2007年度国家级教学团队.

为更好地将优秀教学改革成果运用并推广开来,根据当前的教学实际,山东大学数学学院组织中坚力量,对第一版进行了修订.在保持本书第一版优点、特色前提下,新版教材注重与中学教学内容的衔接,增加了与中学数学接轨的部分内容;增选一些国外教材中的案例、例题和习题,力求题型新颖.为更好地将数学建模思想融入教学,培养学生的建模思想和意识,通过增设有章节介绍与教学内容相关的建模案例,全方位提升学生的综合素质和创新能力.新版教材力求做到符合大学数学课程教学基本要求,知识结构符合认知规律,同时渗透现代数学思想,加强应用能力培养,便于学生学习和教师教学.

本书为《线性代数》分册,在第一版的基础上,对教材中定义、定理的表述和论证不同程度地有所加强,并重新编写了部分章节,不仅有效地启发了学生的数学思维,还能使学生学以致用.新版对例题、习题做了增加或修改,根据不同难度和类别,一些问题给出详尽的证明,让学生模仿学习;一些问题仅给出证明概要,让学生给出证明的细节;还有一些问题交给学生练习.同时注意兼容各种基本知识与题型,难易结合,为学生留有选择的空间,满足各层次学生的需求.

本次修订工作由秦静、金辉完成,有关MATLAB的内容由傅国华编写.刘建亚教授、吴臻教授按照丛书总体要求对修改框架提出了具体建议,刘桂真教授审定了本书.在本书修订过程中,我们得到山东大学教务处、山东大学数学学院领导及同事们的大力支持,兄弟院校的同行也对此次修订提出了不少宝贵建议,在此,我们表示衷心感谢!

限于编者水平,新版中难免存在不足,欢迎广大专家、同行与读者批评指正.

编者

2011年2月

## 第一版前言

按传统的观点,在大学里除数学类各专业外,数学只是理、工类专业学生的基础课,是学习后续课程和解决某些实际问题的工具.随着社会的进步、科学技术的发展和高等教育水平的不断提高,数学已渗透到包括经济、金融、信息、社会等各个领域,人们越来越深刻地认识到过去看法的不足,越来越深刻地认识到数学教育在高等教育中的重要性,数学不仅是基础、是工具,更重要的,数学是探索物质世界运动机理的重要手段,是一种思维模式——数学思维模式,数学教育是培养大学生理性思维品格和思辨能力的重要载体,是开发大学生潜在能动性和创造力的重要基础;同时,数学又是一种文化——数学文化,它显示着千百年来人类文化的缩微景象,也是当代大学生必须具备的文化修养之一.因此大学数学不仅是理工类学生应该学习的,而且也是大学各类专业都应该学习的课程,数学教育是大学生素质教育的重要组成部分.当然,不同类型专业对数学的要求和内容会有所不同.

为了适应新世纪我国高等教育迅速发展的形势和实行学分制的需要,满足新时期高等教育人才培养拓宽口径、增强适应性对数学教育的要求,山东大学数学与系统科学学院从2000年开始按照教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的精神和要求,在学院领导的亲自参与下,组织部分教师对非数学类专业大学数学的课程体系进行了认真深入的研究和论证.针对大学数学是高校非数学类专业所有大学生应当具有的素质,又考虑到不同专业的要求深浅不同,内容多少各异的实际情况,制订了适应这种情况的新课程体系.新课程体系的主要特点是采取平台加模块的结构,整个大学数学的课程共分三个平台,不同平台反映了不同专业对数学知识的不同层次、级别要求,体现数学知识结构和大学生认知结构的统一.鉴于人类认识是从感性到理性,由易到难,由浅入深的,因此第一平台(包括微积分(一)、线性代数和概率统计)是体现高等数学的普及和基础,体现所有各专业应当具有的数学素质教育,主要侧重基本概念和基本方法,加强基本运算,努力渗透基本数学思想;第二平台是对第一平台基本概念加深和知识方法的拓宽,在本平台中还适当体现出数学理论的系统性和严谨性;第三平台(包括数学建模、数值分析、数理方程、复变函数和积分变换、运筹学等)则是为满足某些对数学知识和方法有特殊专业的专业而设置.各平台的教学内容由浅入深,反映不同专业对数学知识和内容的不同要求;各平台的内容又采取模块组合的方式,模块间相对独立,各专业亦可

根据本专业的需要,选用不同的模块组合,这样就使得新的课程体系具有更大的灵活性,能够满足不同层次、不同要求的专业对数学教学的需求.另外,新课程体系还将利用计算机解决数学问题的数学实验融入其中,做到理论和实践的有机结合.

山东大学教务处对新课程体系给予充分的肯定,并大力支持按新课程体系编写相应的教材.在我们初稿完成之后,教务处安排几个专业的学生先行试用,并在此基础上加以修改完善.目前,已完成了前两个平台共计四册的教材编写和修改.其中,微积分为两册,分属两个平台;线性代数和概率统计各一册.这套教材的特点除上述平台加模块的结构外,还有以下特色:

1. 内容少而精,体现素质教育,突出数学思想.我们重点介绍大学数学中的基本概念和基本方法;从培养读者的能力和提高素质的着眼点,有选择地保留了部分定理、性质的证明,对那些用类似的技巧方法,或者读者举一反三可以理解或自学的证明部分省略或简化处理.

2. 扩大了读者的知识面.我们将各专业的不同需求的数学内容融进了一套教材中.主要的做法是:用“\*”号标明了不同层次对数学的要求,从不同的学科例题分析中引进基本概念,阐述基本内容在各主要学科中的应用,习题中涉及多学科.这使不同专业的读者可以了解到大学数学中的相关知识在其他专业中的应用.这在知识经济时代是非常重要的.另一方面,可以满足目前多数读者希望跨学科获取更多知识的愿望.如在数学要求较低的专业学习的读者希望学习更多的数学知识(如跨学科考研或工作需要)时,可以从同一本书中按“\*”号的标示中获取.当然,教师在授课时可按本专业的要求有选择地使用.

3. 与中学知识相衔接,易教易学.对一些较困难,不易被刚进大学的学生所接受的内容,如极限的“ $\varepsilon-N$ ”,“ $\varepsilon-\delta$ ”定义,以及部分不影响整体结构的较困难内容,如泰勒中值定理等均放入第二平台.希望这使读者对数学增添兴趣,提高学习的自信心.

4. 总学时减少,可在原定学时中学习更多、更新的知识.

5. 各节后的习题配置除基本练习外,还有部分综合练习题,以提高读者分析问题、解决问题的能力.综合练习题多置于每节习题后且配以“\*”号标示.

6. 增添了利用计算机解决数学问题的内容,在每章后均有解决本章主要问题的 MATLAB 程序和例题演示.书后附有通用数学软件 MATLAB 简介并附有软盘.

7. 本套书附有在数学发展史中一些著名数学家的简介.从这些数学家辉煌成就背后的艰苦奋斗故事中,希望可以激发读者学习的热情和兴趣.

本套书由山东大学数学与系统科学学院组织部分有较高水平和丰富教学经验的教师集体编写,最后聘请有关专家审定.在长达近两年的编写过程中,学院领导给予了极大的关注、支持和具体指导,为此曾多次召开各种类型的会议反复论证,几易手稿.

大学数学教程的主编是刘建亚.线性代数部分由秦静(第1,3,4,5章)、潘建勋(第2



章)编写,由秦静完成统稿及改写工作,刘桂真教授审定.各册的数学实验内容由傅国华编写,数学家简介由包芳勋编写.

本套教材作为普通高等教育“十五”国家级重点教材正式出版,是教育改革的产物.在此,我们感谢山东大学教务处、山东大学出版基金委、山东大学数学学院领导的远见卓识,以及对教学改革和教材出版的鼎力支持.感谢仪洪勋、江守礼教授对我们的鼓励和帮助.我们特别感谢高等教育出版社,由于他们的指导和帮助才使本书顺利与读者见面.

新时期大学数学的教学改革是一项非常紧迫、非常重要,也是非常艰巨的工作.限于编者水平,本书肯定会有许多不足和缺点,乃至问题,恳请读者批评指正.

编者

2002年4月

# 目 录

第 1 章 矩阵 .....	1
§ 1.1 矩阵的概念 .....	1
1. 矩阵概念的引进 .....	1
2. 矩阵的定义 .....	2
3. 几种特殊矩阵 .....	4
§ 1.2 矩阵的运算 .....	5
1. 矩阵的线性运算 .....	5
2. 矩阵的乘法运算 .....	8
3. 矩阵的转置 .....	14
§ 1.3 方阵的行列式及其性质 .....	16
1. 方阵的行列式 .....	16
2. 行列式的性质 .....	20
3. 行列式的应用 .....	26
§ 1.4 初等变换与矩阵的秩 .....	30
1. 高斯消元法 .....	30
2. 矩阵的初等变换 .....	32
3. 矩阵的秩 .....	35
4. 满秩矩阵 .....	39
§ 1.5 初等矩阵与逆矩阵 .....	39
1. 初等矩阵 .....	40
2. 逆矩阵 .....	43
§ 1.6 分块矩阵 .....	47
1. 分块矩阵的概念 .....	47
2. 分块矩阵的运算 .....	48
3. 准对角矩阵 .....	50
§ 1.7 用 MATLAB 进行矩阵运算 .....	53

习题 1 .....	57
------------	----

## 第 2 章 $n$ 维向量 .....

§ 2.1 $n$ 维向量及其运算 .....	65
-------------------------	----

1. $n$ 维向量的概念 .....	65
---------------------	----

2. $n$ 维向量的线性运算 .....	66
-----------------------	----

§ 2.2 向量组的线性相关性 .....	67
-----------------------	----

1. 线性相关的概念 .....	67
------------------	----

2. 线性相关的判定定理 .....	69
--------------------	----

§ 2.3 向量组的秩 .....	72
-------------------	----

1. 向量组的极大线性无关组 .....	72
----------------------	----

2. 向量组的秩及其求法 .....	74
--------------------	----

3. 极大线性无关组的求法 .....	76
---------------------	----

§ 2.4 向量空间 .....	77
------------------	----

1. 向量空间的概念 .....	77
------------------	----

2. 向量空间的基与维数 .....	78
--------------------	----

3. 向量在基下的坐标 .....	78
-------------------	----

§ 2.5 向量组的正交性与正交矩阵 .....	79
--------------------------	----

1. $n$ 维向量的内积 .....	79
---------------------	----

2. 向量组的正交规范化 .....	80
--------------------	----

3. 正交矩阵 .....	82
---------------	----

§ 2.6 用 MATLAB 进行向量运算 .....	84
-----------------------------	----

习题 2 .....	84
------------	----

## 第 3 章 线性方程组 .....

§ 3.1 齐次线性方程组 .....	90
---------------------	----

1. 齐次线性方程组的基本概念 .....	91
-----------------------	----

2. 齐次线性方程组解的性质 .....	92
----------------------	----

3. 齐次线性方程组的基础解系及其求法 .....	92
---------------------------	----

§ 3.2 非齐次线性方程组 .....	99
----------------------	----

1. 线性方程组的相容性 .....	101
--------------------	-----

2. 非齐次线性方程组的解的性质 .....	102
------------------------	-----

3. 非齐次线性方程组的解法 .....	103
----------------------	-----

§ 3.3 用 MATLAB 求解线性方程组 .....	108
习题 3 .....	109
<b>第 4 章 矩阵的特征值与特征向量</b> .....	115
§ 4.1 矩阵的特征值与特征向量 .....	115
1. 相似矩阵 .....	115
2. 特征值与特征向量的定义 .....	116
3. 特征值与特征向量的求法 .....	117
4. 特征值与特征向量的性质 .....	122
**5. 应用举例 .....	124
§ 4.2 矩阵的相似对角化 .....	125
1. 矩阵与对角矩阵相似的条件 .....	125
2. 矩阵相似对角化的方法 .....	128
**3. 应用举例 .....	130
§ 4.3 实对称矩阵的相似对角化 .....	133
1. 实对称矩阵的特征值与特征向量的性质 .....	134
2. 实对称矩阵的相似对角化 .....	135
*3. 矩阵的合同 .....	137
§ 4.4 用 MATLAB 求特征值和特征向量 .....	138
习题 4 .....	140
<b>第 5 章 二次型</b> .....	146
§ 5.1 二次型的概念 .....	146
1. 二次型的概念 .....	146
2. 二次型的矩阵表示法 .....	147
3. 二次型经可逆线性变换后的矩阵 .....	149
§ 5.2 化二次型为标准形的方法 .....	150
1. 正交变换法化二次型为标准形 .....	150
2. 配方法化二次型为标准形 .....	152
**3. 初等变换法化二次型为标准形 .....	153
4. 惯性定理 .....	155
§ 5.3 二次型的分类 .....	156
1. 二次型的分类 .....	156

2. 正定二次型的判别方法 .....	157
** § 5.4 应用举例 .....	163
§ 5.5 用 MATLAB 化简二次型 .....	166
习题 5 .....	167
<b>思考题参考答案</b> .....	171
<b>部分习题参考答案</b> .....	174
<b>附录 线性代数在数学建模中的应用</b> .....	185

# 第 1 章 矩 阵

矩阵是线性代数的主要研究对象之一.它的理论在自然科学、工程技术、社会科学等各个领域都有着广泛的应用.矩阵作为一些抽象数学结构的具体表现,在数学研究中占有极重要的位置.

本章从实际问题出发,引出矩阵的概念,进而介绍矩阵的运算、矩阵运算的性质及一些特殊类型的矩阵.

## § 1.1 矩阵的概念



矩阵是什么

这一节主要介绍矩阵的定义及几种特殊矩阵.

### 1. 矩阵概念的引进

**例 1.1.1** 四个城市  $A, B, C, D$  之间的航线如图 1.1.1 所示,若从城市  $A$  到城市  $B$  有航班,则用线段连接  $A, B$ ,并在线段上从  $A$  到  $B$  的方向画一个箭头.图 1.1.1 表示了四城市间的航班图.

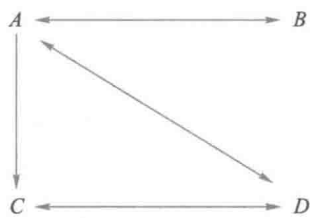


图 1.1.1

通常可由一个数表来表示四城市间的航班情况.在表 1.1.1 中,用“1”表示此城市到彼城市有航班,“0”表示没有.

表 1.1.1

进 港

		A	B	C	D
出 港	A	0	1	1	1
	B	1	0	0	0
	C	0	0	0	1
	D	1	0	1	0

**例 1.1.2** 在某地区有一种物资,有  $m$  个产地  $A_1, A_2, \dots, A_m$  和  $n$  个销地  $B_1, B_2, \dots, B_n$ ,用  $a_{ij}$  表示由产地  $A_i$  运到销地  $B_j$  的数量,则调运方案可排成一个数表,见表 1.1.2.

表 1.1.2

	$B_1$	$B_2$	$\dots$	$B_n$
$A_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1n}$
$A_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$A_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mn}$

**例 1.1.3** 某地有一个煤矿,一个发电厂和一条铁路,经成本核算,每生产价值 1 元钱的煤,需消耗 0.3 元的电,为了把这 1 元钱的煤运出去,需要花费 0.2 元的运费;每生产价值 1 元钱的电,需要 0.6 元的煤作燃料,为了运行电厂的辅助设备,要消耗本身 0.1 元的电,还需花费 0.1 元的运费;作为铁路部门,每提供 1 元钱运费的运输,要消耗 0.5 元的煤,辅助设备要消耗 0.1 元的电.煤矿、电厂与铁路部门之间的消耗可用表 1.1.3 表示.

表 1.1.3

	煤矿	电厂	铁路
煤矿	0	0.6	0.5
电厂	0.3	0.1	0.1
铁路	0.2	0.1	0

这些例子表明,不只是数学本身,而且在各种自然科学和社会科学中都经常通过数表来表达相互之间的关系.从这些数表中,我们抽象出矩阵的概念.

## 2. 矩阵的定义

**定义 1.1.1** 由  $m \times n$  个数  $a_{ij} (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n)$  按一定顺序排成的  $m$  行  $n$  列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1.1)$$

称为  $m \times n$  矩阵(或  $m$  行  $n$  列矩阵),简称矩阵.横的各排称为矩阵的行,竖的各排称为矩阵的列, $a_{ij}$  称为矩阵的第  $i$  行第  $j$  列的元素.

元素为实数的矩阵称为实矩阵.我们主要讨论实矩阵.

矩阵通常用大写字母  $A, B, C$  等表示,例如,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

有时上面的矩阵也可简记为  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 下标  $m \times n$  表示矩阵的行数为  $m$ , 列数为  $n$ .

当  $m=n$ , 即矩阵的行数与列数相同时, 称矩阵为  $n$  阶方阵或  $n$  阶矩阵, 在  $n$  阶方阵  $A$  中, 元素  $a_{ii}(i=1, 2, \dots, n)$  排成的对角线称为方阵  $A$  的主对角线.

当  $m=1$  时, 得到一个 1 行  $n$  列的矩阵

$$A_{1 \times n} = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}),$$

称它为行矩阵.

当  $n=1$  时, 得到一个  $m$  行 1 列的矩阵

$$A_{m \times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

称它为列矩阵.

由矩阵的定义 1.1.1 知, 例 1.1.1 的数表可表示为一个 4 阶方阵

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

一般地, 若若干个点之间的单向通道都可用这样的矩阵表示.

例 1.1.2 的数表可表示为一个  $m \times n$  矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 例 1.1.3 的数表可表示为一个 3 阶方阵:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.5 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}.$$

这个矩阵被称作消耗矩阵, 是投入产出问题中一个非常重要的矩阵.

必须注意: 矩阵表示的是一个数表, 不是一个具体的数.



### 3. 几种特殊矩阵

在使用矩阵解决问题时,我们经常会遇到以下几种特殊矩阵.

#### (1) 零矩阵

当一个矩阵的元素  $a_{ij}$  全部为零时,这个矩阵称为零矩阵,简称零阵,记为  $\mathbf{O}$  或  $\mathbf{O}_{m \times n}$ .

#### (2) 对角矩阵

一个  $n$  阶方阵,若除主对角线上的元素  $a_{ii}(i=1,2,\dots,n)$  外,其余元素全部为零,则称这个矩阵为对角矩阵,对角矩阵通常用  $\mathbf{A}$  表示,即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中,非主对角线上的零元素可省略不写.对角矩阵也可记为

$$\text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}.$$

#### (3) 单位矩阵

主对角线上的元素全为 1 的对角矩阵称为单位矩阵. $n$  阶单位矩阵通常用  $\mathbf{E}_n$  表示,下标  $n$  表示单位矩阵的阶数,有时也简记为  $\mathbf{E}$ ,即

$$\mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

#### (4) 标量矩阵

主对角线上的元素全为常数  $k$  的对角矩阵称为标量矩阵,即

$$\begin{pmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix}.$$

#### (5) 三角形矩阵

主对角线下(上)面的元素全为零的方阵称为上(下)三角形矩阵.上、下三角形矩阵统称为三角形矩阵.

#### (6) 阶梯形矩阵

设  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$  为非零矩阵,若非零行(即至少有一个非零元素的行)全在零行的前面,且  $\mathbf{A}$  中各非零行第一个(最后一个)非零元素前(后)面零元素的个数随行数