

万水MSC技术丛书

MSC Software

MSC Nastran

动力分析指南

第二版

李保国 黄晓铭 裴延军 李 伟 等编著



万水 MSC 技术丛书

MSC Nastran 动力分析指南

(第二版)

李保国 黄晓铭 裴延军 李 伟 等编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

· 北京 ·

内 容 提 要

本书介绍了 MSC Nastran 软件在动力学领域的基本理论和使用方法。内容包括动力学分析方法及 MSC Nastran 基本使用介绍, 模态分析, 频率响应分析, 瞬态响应分析, 响应谱与随机响应分析, 复特征值分析, 使用超单元的正则模态分析, 动力学建模选项, 非线性正则模态, 动力优化设计, 实验-分析的相关性, 动力学设计分析方法 DDAM, 噪声分析, 高级非线性求解序列 SOL 400, 显式非线性分析 SOL 700。本书配有详细的实例操作过程说明, 所选实例均使用 Patran 软件作为前后处理器来创建分析模型和对分析结果进行后处理。

本书内容全面, 案例丰富, 既可作为汽车、航空航天、军工、电子、土木工程、船舶、水利、石油、机械制造和建筑等行业工程技术人员应用 MSC Nastran 软件进行仿真分析的基础教程, 也可作为理工科院校相关专业的学生、教师学习和使用 MSC Nastran 的参考书。

图书在版编目 (C I P) 数据

MSC Nastran动力分析指南 / 李保国等编著. — 2版
— 北京: 中国水利水电出版社, 2018.6
(万水MSC技术丛书)
ISBN 978-7-5170-6486-2

I. ①M… II. ①李… III. ①动力学—分析—应用软件—指南 IV. ①0313-39

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第114862号

责任编辑: 杨元泓 加工编辑: 孙 丹 封面设计: 李 佳

书 名	万水 MSC 技术丛书 MSC Nastran 动力分析指南 (第二版)
作 者	MSC Nastran DONGLI FENXI ZHINAN 李保国 黄晓铭 裴延军 李 伟 等编著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: mchannel@263.net (万水) sales@waterpub.com.cn
经 售	电话: (010) 68367658 (营销中心)、82562819 (万水) 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	三河航远印刷有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 30印张 741千字
版 次	2012年3月第1版 2012年3月第1次印刷 2018年5月第2版 2018年5月第1次印刷
印 数	0001—4000册
定 价	89.00元

凡购买我社图书, 如有缺页、倒页、脱页的, 本社营销中心负责调换
版权所有·侵权必究

再版前言

近年来，有限元仿真分析在工程领域中得到了非常广泛的应用，在某些行业已成为产品研发不可或缺的手段和方法。各大理工科院校和研究机构也都开展了对有限元分析方法的深入研究。MSC Nastran 软件是当今最为著名的有限元求解程序，拥有最为广泛的用户群，其输入/输出格式及计算结果已成为当前 CAE 界的工业标准。2012 年《MSC Nastran 动力学分析指南》一书出版后，在市场上热销，受到读者的大力欢迎。应广大读者的要求，现对该书进行再版。

本书在第一版的基础上，对原版中少量的错误进行了修正，对结构进行了调整，删除了隐式非线性 SOL 600 一章。同时对原版的内容进行了补充和完善，增加了近几年 MSC Nastran 在动力学方面新的技术和案例。具体增加的章节有频响函数装配、残余向量、瞬态分析中的直接法、MSC Nastran 大模型高性能计算、非线性瞬态响应分析的时间积分方法等。补充了优化案例、显式非线性的欧拉法案例、流固耦合案例等。

MSC Nastran 功能强大、应用广泛，并且有很多的前后处理器可供用户选择。本书从动力学基础理论着手，详细讲解了 MSC Nastran 在动力学分析方面的基本使用方法和流程，并结合实际，给出了许多典型例题及说明。本书可以帮助初学者系统地掌握 MSC Nastran 的使用方法和基本技巧，使其学以致用。由于书中理论部分有些是以 MSC Nastran 卡片介绍为主，所以建议初学者在学习本书之前，先了解一些 MSC Nastran 的基础应用知识，遇到难以理解的部分可以参考《MSC Nastran 快速参考手册》。

本书编者从事有限元分析应用多年，有丰富的 MSC Nastran 应用经验。在本书的编写过程中，得到了 MSC Software 中国区各位同事的大力支持和帮助，在此深表谢意。本书由李保国、黄晓铭、裴延军、李伟编著，参加编写和整理工作的还有卞文杰、田利思、陈火红、姜正旭、郭茵等。

由于编者水平有限，书中错误之处在所难免，敬请广大读者批评指正。

编者

2018 年 3 月

第一版前言

近年来，有限元仿真分析在工程领域中的应用得到了很大发展，各大理工院校、研究机构都开展了对有限元分析方法的深入研究。Nastran 解算器是当今最为著名的有限元求解程序，拥有最为广泛的用户群，其输入输出格式及计算结果已成为当前 CAE 界的工业标准。但当今市场上针对该部分内容的书并不是很多，为了便于广大用户更好地掌握和使用 MSC Nastran，本书将针对 MSC Nastran 在动力学分析方面的仿真应用做详细介绍。

本书主要从讲解 MSC Nastran 动力学分析基础理论入手，详细讲述 MSC Nastran 在动力学分析方面的基本功能和应用方法。内容包括动力学分析方法及 Nastran 基本功能介绍，模态分析，频率响应分析，瞬态响应分析，响应谱与随机响应分析，复特征值分析，使用超单元算法的正则模态分析，动力学建模选项，非线性正则模态，动力优化设计，试验一分析的相关性，动力学设计分析方法 DDAM，噪声分析，非线性求解序列 SOL 400、隐式非线性求解序列 SOL 600、显式非线性求解序列 SOL 700 的基本理论、求解方法及其在动力学分析中的应用。本书中有大量的 Nastran 应用实例，读者可以在最短的时间内掌握 Nastran 的应用特点，并学以致用。本书可以作为汽车、航空航天、军工、电子、土木工程、造船、水利、石油、制造和建筑等行业工程技术人员应用 Nastran 软件进行仿真分析的基础教程。

MSC Nastran 功能强大应用广泛，并且有很多的前后处理器可供用户选择。本书编者从事有限元分析应用多年，有丰富的 FEA 软件使用经验。本书从动力学基础理论着手，详细讲解了 MSC Nastran 在动力学分析方面的基本使用方法和流程，并结合实际，给出了许多典型例题及说明。通读本书，可以帮助初学者系统掌握 MSC Nastran 的使用方法和基本技巧，并进一步学以致用。由于书中理论部分多以 Nastran 卡片介绍为主，所以建议读者在学习本书之前先要了解一些 Nastran 的基础应用知识，如果遇到难以理解的部分可以参考软件中的“MSC Nastran 快速帮助手册”。

在本书的编写过程中，得到了 MSC Software 中国各办事处的很多同志的大力支持，编者借此机会对 Nastran 资深工程师陈火红、仰蕊雯、姜正旭在书籍编写过程中给与的指导和建议表示感谢，并对北京办事处孙丹丹、陈志伟、李保国以及郭茵女士在编书过程给予的各种协助深表谢意。

由于编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

作者

2017年1月于北京

目 录

再版前言

第一版前言

第 1 章 动力学分析方法及 MSC Nastran 基本

使用介绍..... 1

1.1 有限元分析方法介绍..... 1

1.1.1 有限单元法的基本思路..... 2

1.1.2 有限元法的计算步骤..... 3

1.1.3 有限元法的进展与应用..... 5

1.2 动力学分析概述..... 6

1.2.1 动力分析过程浏览..... 6

1.2.2 单自由度系统..... 7

1.2.3 单自由度系统无阻尼自由振动..... 8

1.2.4 单自由度系统有阻尼自由振动..... 9

1.2.5 单自由度系统无阻尼简谐振动..... 10

1.2.6 单自由度系统有阻尼简谐振动..... 11

1.2.7 多自由度系统..... 12

1.2.8 有限元动力学建模需要考虑的问题..... 13

1.3 MSC Nastran 的由来..... 13

1.3.1 MSC Nastran 程序的起源..... 13

1.3.2 MSC Nastran 的由来..... 14

1.4 MSC Nastran 动力分析功能介绍..... 14

1.4.1 动力分析功能及特性..... 14

1.4.2 MSC Nastran 支持的硬件平台..... 17

1.5 MSC Nastran 基本应用流程..... 17

1.5.1 前处理..... 17

1.5.2 求解..... 21

1.5.3 后处理..... 22

1.6 动力学模型输入..... 22

1.6.1 MSC Nastran 输入文件结构..... 22

1.6.2 MSC Nastran 数据卡片格式..... 23

1.6.3 有限元分析手段..... 23

1.6.4 MSC Nastran 常用单元形式..... 23

1.6.5 耦合质量与集中质量..... 24

1.6.6 MSC Nastran 基本集合的运算..... 28

1.6.7 MSC Nastran 基本集合的定义..... 29

1.6.8 模型检查的提示..... 31

第 2 章 模态分析..... 32

2.1 模态分析目的..... 32

2.2 模态分析理论..... 32

2.3 自然模态与固有频率性质..... 33

2.4 模态能量..... 34

2.5 特征值解法..... 34

2.5.1 跟踪法..... 35

2.5.2 变换法..... 35

2.5.3 兰索士法..... 35

2.5.4 特征值方法的比较..... 35

2.5.5 兰索士法卡片..... 36

2.5.6 模态分析求解控制..... 36

2.5.7 例子..... 37

2.6 动力分析的缩减..... 39

2.6.1 概述..... 39

2.6.2 MSC Nastran 中使用的降阶方法..... 39

2.7 刚体模态..... 44

2.7.1 刚体模态的概念..... 44

2.7.2 刚体模态的计算..... 45

2.7.3 支撑自由度的选择..... 46

2.7.4 支撑自由度的检验..... 46

2.7.5 MSC Nastran 对刚体模态和刚体

向量的计算..... 46

2.8 模态分析实例..... 47

第 3 章 频率响应分析..... 56

3.1 动力学分析中的矩阵组集..... 56

3.1.1 阻尼矩阵..... 56

3.1.2 直接法..... 58

3.1.3 模态法..... 59

3.2 频率响应分析..... 60

3.2.1 概述	60	5.1 强迫运动	113
3.2.2 直接法频率响应	61	5.1.1 概述	113
3.2.3 模态法频率响应	61	5.1.2 瞬态分析中的强迫运动	113
3.2.4 激励的确定	61	5.1.3 瞬态分析中的大质量法	113
3.2.5 模态法频率响应与直接法频率响应的比较	69	5.1.4 瞬态分析中的大刚度法	114
3.2.6 SORT1 和 SORT2 输出的对比	70	5.1.5 瞬态分析中的拉格朗日乘法	114
3.2.7 频率响应求解控制	70	5.1.6 强迫位移实例	114
3.2.8 频变弹簧和阻尼器	71	5.1.7 瞬态分析中的直接法	118
3.3 频率响应分析实例	74	5.2 响应谱	119
3.4 频率函数装配	84	5.2.1 概述	119
3.4.1 频响函数的概念	84	5.2.2 响应谱求解控制	120
3.4.2 频响函数装配的概念	85	5.2.3 响应谱应用	121
3.4.3 频响函数装配在 MSC Nastran 中的实现	86	5.2.4 求解控制	122
3.4.4 频响函数装配实例	89	5.2.5 响应谱实例	124
第 4 章 瞬态响应分析	95	5.3 随机响应分析	143
4.1 直接法瞬态响应分析	95	5.3.1 概述	143
4.1.1 过程	95	5.3.2 自相关与自谱	143
4.1.2 直接瞬态响应分析中的阻尼	96	5.3.3 各态历经性随机激励下线性系统响应计算	144
4.2 模态法瞬态响应分析	96	5.3.4 MSC Nastran 中随机分析的实现	146
4.2.1 过程	96	5.4 随机响应分析实例	147
4.2.2 模态法瞬态响应分析中的阻尼	96	第 6 章 复特征值分析	156
4.2.3 MSC Nastran 中模态法瞬态响应分析阻尼的输入	97	6.1 概述	156
4.2.4 模态法瞬态响应分析数据的提取	98	6.2 理论	156
4.2.5 模态截断	98	6.3 MSC Nastran 中的实现	156
4.2.6 残余向量	98	6.4 求解控制	157
4.3 瞬态激励	100	6.4.1 执行控制	157
4.3.1 时变载荷	100	6.4.2 工况控制	157
4.3.2 载荷的组合	101	6.4.3 数据模型	157
4.3.3 DAREA 卡	101	6.5 复特征值分析实例	157
4.3.4 LSEQ 卡片	102	第 7 章 使用超单元的正则模态分析	165
4.3.5 初始条件	103	7.1 超单元的概念与定义	165
4.3.6 TSTEP 卡	104	7.1.1 超单元的概念	165
4.4 直接法瞬态响应与模态法瞬态响应的比较	105	7.1.2 在 MSC Nastran 中定义部件超单元	165
4.5 瞬态响应分析实例	105	7.2 例题: 钢的冲压	166
第 5 章 响应谱与随机响应分析	113	7.2.1 模型及参数	166
		7.2.2 例题的模型定义	166
		7.3 超单元应用说明	176
		7.3.1 求解过程	176

7.3.2	静凝聚理论	176	8.4	附加点和传递函数	213
7.3.3	使用超单元分析的优点	177	8.4.1	EPOINT 集	214
7.3.4	超单元分析的缺点	177	8.4.2	模态变换	214
7.3.5	流程区别	178	8.4.3	直接矩阵输入	215
7.4	动力分析中可用的超单元缩减方法	182	8.4.4	传递函数	215
7.4.1	缩减程度对比	182	8.4.5	Pickups 和变换器	216
7.4.2	古演或静态缩减	182	8.4.6	高阶传递函数	216
7.4.3	各种缩减方法的优点	183	8.4.7	实例	217
7.4.4	使用静态缩减的正则模态计算	183	8.5	非线性载荷函数	220
7.4.5	使用超单元动态缩减的正则模态 计算	183	8.5.1	标准瞬态求解理论	221
7.5	MSC Nastran 的超单元输入卡片	184	8.5.2	非线性弹簧实例	221
7.5.1	超单元的内部广义自由度卡: SENQSET	184	8.5.3	依赖于速度的非线性力	222
7.5.2	标量点定义卡: SPOINT	184	8.5.4	非线性瞬态求解的顺序	223
7.5.3	广义自由度定义卡: QSET	185	8.5.5	采用 NOLIN1 输入时的建议	223
7.5.4	QSET 卡的替代格式: QSET1	186	8.5.6	应用实例——旋转结构的耦合	224
7.5.5	固定分析自由度的定义卡: BSET	186	8.6	动力分析模型调试	226
7.5.6	BSET 卡的替代格式: BSET1	187	8.6.1	建模要点	226
7.5.7	自由的边界自由度定义卡: CSET	188	8.6.2	测试动力模型	227
7.5.8	CSET 卡的替代格式: CSET1	188	8.7	MSC Nastran 大模型高性能计算	241
7.6	默认的部件模态综合方法——固定 边界法	189	8.7.1	常用计算参数设置	242
7.7	手工求解示例	190	8.7.2	自动部件模态综合法	242
7.8	超单元分析实例	195	8.7.3	分布式内存并行计算设置	243
第 8 章	动力学建模选项	204	第 9 章	非线性正则模态	244
8.1	概述	204	9.1	带微分刚度的正则模态	244
8.1.1	动力分析的策略	204	9.2	有预载荷结构的正则模态示例	245
8.1.2	规划分析	204	9.2.1	使用 SOL 106 计算	245
8.2	质量建模	205	9.2.2	使用 SOL 103 计算	251
8.2.1	质量的基本定义	205	第 10 章	动力优化设计	256
8.2.2	质量数据输入选项	205	10.1	基本知识	256
8.2.3	耦合的质量矩阵项	206	10.1.1	优化设计的概念	256
8.2.4	移动坐标系的质量效应	207	10.1.2	优化设计的作用	256
8.3	阻尼效应建模	209	10.1.3	MSC Nastran 中“优化设计”的 基本特性	256
8.3.1	粘性阻尼	210	10.1.4	MSC Nastran 结构优化的优势	256
8.3.2	结构阻尼	210	10.1.5	MSC Nastran 支持的优化功能	256
8.3.3	模态阻尼	211	10.1.6	MSC Nastran 支持的优化类型	257
8.3.4	非线性阻尼	213	10.1.7	基本优化问题的描述	257
			10.1.8	MSC Nastran 中设计优化的输入 控制段	257

10.1.9 优化问题中常用的模型数据段 输入卡	258	第 13 章 噪声分析	294
10.2 实例	258	13.1 MSC Nastran 噪声分析的理论背景	294
10.2.1 使用自然模态分析的优化设计	258	13.2 使用 MSC Nastran 进行噪声分析	294
10.2.2 使用频率响应的优化实例	267	13.2.1 噪声学基础介绍	294
10.2.3 基于结构平均柔度和一阶频率的 拓扑优化	271	13.2.2 MSC Nastran 流固耦合分析	295
第 11 章 试验—分析的相关性	275	13.2.3 MSC Nastran 外噪声分析	297
11.1 试验—分析相关性的介绍	275	13.3 应用实例	298
11.2 完整的试验—分析过程	275	13.3.1 MSC Nastran 内噪声分析案例	298
11.2.1 试验前的规划	275	13.3.2 MSC Nastran 外噪声分析案例	318
11.2.2 试验后的评估	276	第 14 章 高级非线性分析 SOL 400	354
11.3 模型的改进	281	14.1 概述	354
11.3.1 强制的人为干预法	281	14.2 非线性理论	354
11.3.2 灵敏度矩阵法	281	14.2.1 非线性分析	354
11.3.3 设计优化法	282	14.2.2 非线性方程组的迭代方法	355
11.3.4 应用举例	282	14.2.3 非线性瞬态响应分析的时间 积分方法	360
第 12 章 动力学设计分析方法	285	14.3 非线性瞬态响应分析的控制卡片	362
12.1 概述	285	14.4 瞬态动力响应分析实例	364
12.2 理论背景	285	第 15 章 显式非线性分析 SOL 700	374
12.3 DDAM 分析	287	15.1 概述	374
12.3.1 分析流程概述	287	15.2 显式积分求解算法的原理	375
12.3.2 使用 MSC Patran 前处理器进行 DDAM 分析	287	15.3 侵彻分析实例	375
12.3.3 应用实例	289	15.4 碰撞分析实例	391
		15.5 金属射流分析实例	401
		15.6 容器中的爆炸分析实例	448

第 1 章 动力学分析方法及 MSC Nastran 基本使用介绍

1.1 有限元分析方法介绍

计算机软硬件技术的迅猛发展,给工程分析、科学研究以至人类社会带来急剧的革命性变化,数值模拟即为这一技术革命在工程分析、设计和科学研究中的具体表现。数值模拟技术通过汲取当今计算数学、力学、计算机图形学和计算机硬件发展的最新成果,根据不同行业的需求,不断扩充、更新和完善。

近五十年来,计算机计算能力的飞速提高和数值计算技术的长足进步,诞生了商业化的有限元数值分析软件,并发展成为一门专门的学科——计算机辅助工程(Computer Aided Engineering, CAE)。这些商品化的 CAE 软件具有越来越人性化的操作界面和易用性,使得这一工具的使用者由学校或研究所的专业人员逐步扩展到企业的产品设计人员和分析人员,CAE 在各个工业领域的应用也得到不断普及,并逐步向纵深发展,CAE 工程仿真在工业设计中的作用变得日益重要。许多行业中已经将 CAE 分析方法和计算要求设置在产品研发流程中,作为产品上市前必不可少的环节。CAE 仿真在产品开发、研制与设计及科学研究中已显示出明显的优越性:

- (1) CAE 仿真可以有效缩短新产品的研发周期。
- (2) 虚拟样机的引入减少了实物样机的试验次数。
- (3) 大幅度降低了产品的研发成本。
- (4) 在精确的分析结果指导下制造出高质量的产品。
- (5) 能够快速地对设计变更作出反应。
- (6) 能充分地与 CAD 模型相结合,并对不同类型的问题进行分析。
- (7) 能够精确地预测出产品的性能。
- (8) 增加产品和工程的可靠性。
- (9) 采用优化设计,降低材料的消耗或成本。
- (10) 在产品制造或工程施工前预先发现潜在的问题。
- (11) 模拟各种试验方案,减少试验时间和经费。
- (12) 进行机械事故分析,查找事故原因等。

当前流行的商业化 CAE 软件有很多种,国际上早在 20 世纪 50 年代末、60 年代初就投入大量的人力和物力开发具有强大功能的有限元分析程序。其中最为著名的是由美国国家宇航局(NASA)在 1965 年委托美国计算机科学公司(Computer Science Corporation)和 MacNeal-Schwendler Corporation(即 MSC)开发的 Nastran 有限元分析系统。该系统发展至今已有几十个版本,是目前世界上规模最大、功能最强的有限元分析系统。到现在,世界各地的研究机构和大学也开发了一批专用或通用有限元分析软件。除了 Nastran 以外,主要有德国的 ASKA,英国的 PAFEC,法国的 SYSTUS,美国的 ABAQUS、ADINA、ANSYS、BERSAFE、

BOSOR、COSMOS、ELAS、MARC 和 STARDYNE 等产品。虽然软件种类繁多，但是万变不离其宗，其核心求解方法都是有限单元法，也简称为有限元法 (Finite Element Method)。

1.1.1 有限单元法的基本思路

有限元法的基本思路可以归结为：将连续系统分割成有限个分区或单元，对每个单元提出一个近似解，再将所有单元按标准方法加以组合，从而形成原有系统的一个数值近似系统，也就是形成相应的数值模型。

下面用在自重作用下的等截面直杆来说明有限元法的思路。

1. 等截面直杆在自重作用下的材料力学解答

受自重作用的等截面直杆如图 1-1 所示，杆的长度为 L ，截面积为 A ，弹性模量为 E ，单位长度的重量为 q ，杆的内力为 N 。试求：杆的位移分布，杆的应变和应力。

$$N(x) = q(L - x)$$

$$dL(x) = \frac{N(x)dx}{EA} = \frac{q(L - x)dx}{EA}$$

$$u(x) = \int_0^x \frac{N(x)dx}{EA} = \frac{q}{EA} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{q}{EA} (L - x)$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{q}{A} (L - x)$$

2. 等截面直杆在自重作用下的有限元法解答

(1) 连续系统离散化。

如图 1-2 所示，将直杆划分成 n 个有限段，有限段之间通过公共点相连接。在有限元法中，将两段之间的公共连接点称为节点，将每个有限段称为单元。节点和单元组成的离散模型就称为对应于连续系统的“有限元模型”。

有限元模型中的第 i 个单元，其长度为 L_i ，包含第 i 和第 $i+1$ 个节点。

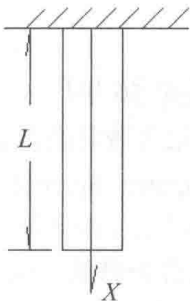


图 1-1 受自重作用的等截面直杆

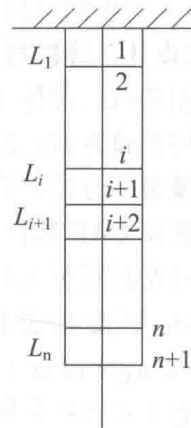


图 1-2 离散后的直杆

(2) 用单元节点位移表示单元内部位移。

第 i 个单元中的位移用所包含的节点位移来表示：

$$u(x) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{L_i}(x - x_i)$$

其中， u_i 为第 i 节点的位移， x_i 为第 i 节点的坐标。第 i 个单元的应变为 ε_i ，应力为 σ_i ，内力为 N_i ，则

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_i}{L_i} \\ \sigma_i &= E\varepsilon_i = \frac{E(u_{i+1} - u_i)}{L_i} \\ N_i &= A\sigma_i = \frac{EA(u_{i+1} - u_i)}{L_i} \end{aligned}$$

(3) 把外载荷归集到节点上。

把第 i 单元和第 $i+1$ 单元重量的一半 $\frac{q(L_i + L_{i+1})}{2}$ 归集到第 $i+1$ 节点上，如图 1-3 所示。

(4) 建立节点的力平衡方程

对于第 $i+1$ 节点，由力的平衡方程可得：

$$N_i - N_{i+1} = \frac{q(L_i + L_{i+1})}{2}$$

令 $\lambda_i = \frac{L_i}{L_{i+1}}$ ，并将式 $N_i = \frac{EA(u_{i+1} - u_i)}{L_i}$ 代入得：

$$-u_i + (1 + \lambda_i)u_{i+1} - \lambda_i u_{i+2} = \frac{q}{2EA} \left(1 + \frac{1}{\lambda_i}\right) L_i^2$$

根据约束条件， $u_1 = 0$ 。

对于第 $n+1$ 个节点，

$$N_n = \frac{qL_n}{2} - u_n + u_{n+1} = \frac{qL_n^2}{2EA}$$

建立所有节点的力平衡方程，可以得到由 $n+1$ 个方程构成的方程组，可解出 $n+1$ 个未知的节点位移。

1.1.2 有限元法的计算步骤

有限元法的计算步骤可归纳为网格划分、单元分析、整体分析。

1. 网格划分

有限元法的基本做法是用有限个单元体的集合来代替原有的连续体。因此首先要对弹性体进行必要的简化，再将弹性体划分为有限个单元组成的离散体。单元之间通过节点相连接。由单元、节点、节点连线构成的集合称为网格。

通常把三维实体划分成四面体或六面体单元的实体网格，平面问题划分成三角形或四边形单元的面网格，如图 1-4 至图 1-6 所示。

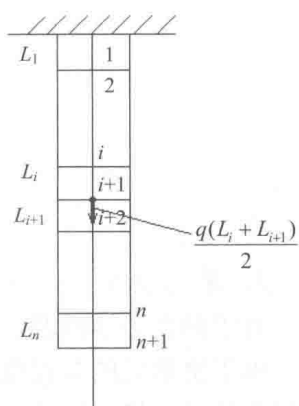


图 1-3 集中单元重量

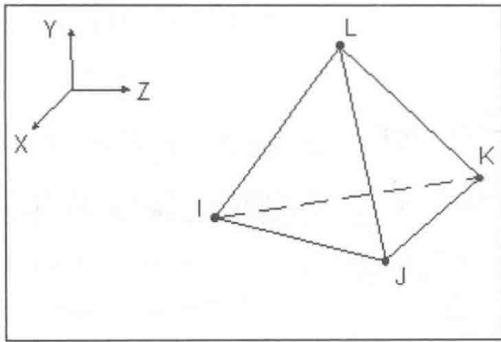


图 1-4 四面体四节点单元

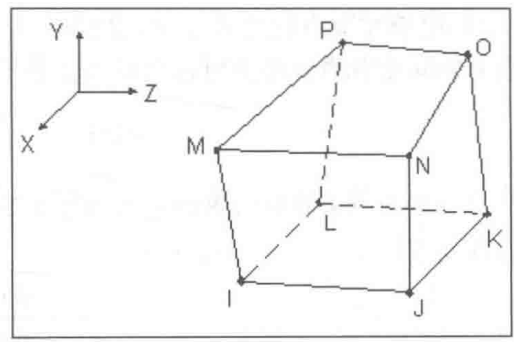


图 1-5 六面体八节点单元

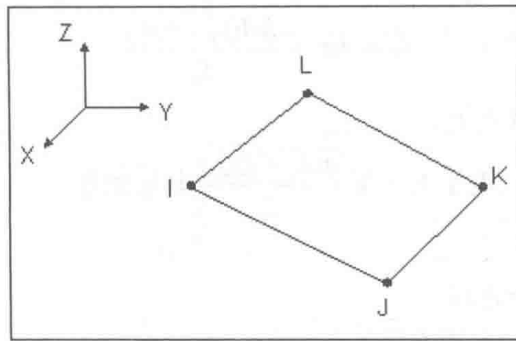


图 1-6 四边形四节点单元

2. 单元分析

对于弹性力学问题，单元分析就是建立各个单元的节点位移和节点力之间的关系式。

由于将单元的节点位移作为基本变量，进行单元分析时首先要为单元内部的位移确定一个近似表达式，然后计算单元的应变、应力，再建立单元中节点力与节点位移的关系式。

以平面问题的三角形三节点单元为例，如图 1-7 所示。单元有三个节点 I 、 J 、 M ，每个节点有两个位移 u 、 v 和两个节点力 U 、 V 。

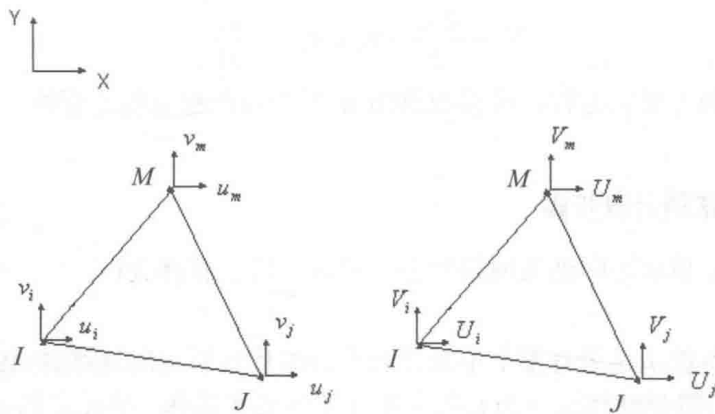


图 1-7 三角形三节点单元

单元所有节点位移和节点力可以表示为节点位移向量和节点力向量 (vector):

$$\text{节点位移 } \{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}, \quad \text{节点力 } \{F\}^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix}$$

单元的节点位移和节点力之间的关系用张量 (tensor) 来表示:

$$\{F\}^e = [K]^e \{\delta\}^e$$

3. 整体分析

对由各个单元组成的整体进行分析, 建立节点外载荷与节点位移的关系, 以解出节点位移, 这个过程称为整体分析。同样以弹性力学的平面问题为例, 如图 1-8 所示, 在边界节点 i 上受到集中力 P_x^i 、 P_y^i 作用。节点 i 是三个单元的结合点, 因此要把这三个单元在同一节点上的节点力汇集在一起建立平衡方程。

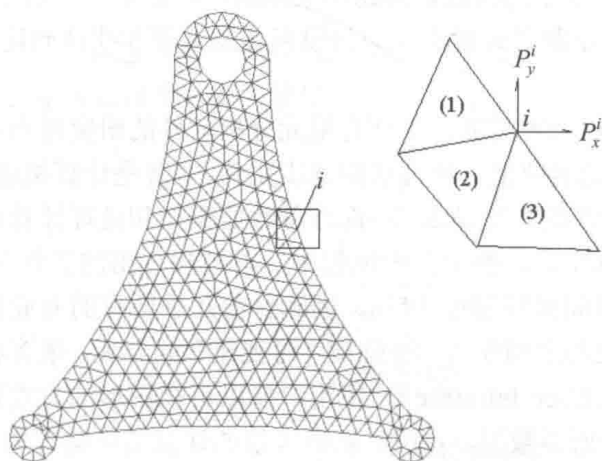


图 1-8 整体分析

i 节点的节点力:

$$\begin{aligned} U_i^{(1)} + U_i^{(2)} + U_i^{(3)} &= \sum_e U_i^{(e)} \\ V_i^{(1)} + V_i^{(2)} + V_i^{(3)} &= \sum_e V_i^{(e)} \end{aligned}$$

i 节点的平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} \sum_e U_i^{(e)} &= P_x^i \\ \sum_e V_i^{(e)} &= P_y^i \end{aligned} \right\}$$

1.1.3 有限元法的进展与应用

有限元法不仅能应用于结构分析, 还能解决归结为场问题的工程问题。20 世纪 60 年代中

期以来,有限元法得到了巨大的发展,为工程设计和优化提供了有力的工具。当今国际上 FEA 方法和软件发展呈现出以下趋势特征:

(1) 从单纯的结构力学计算发展到求解许多物理场问题。有限元分析法最早是从结构化矩阵分析发展而来的,逐步推广到板、壳和实体等连续体固体力学分析。实践证明,这是一种非常有效的数值分析方法。而且从理论上也已经证明,只要用于离散求解对象的单元足够小,所得的解就可足够逼近于精确值。所以近年来有限元方法已发展到流体力学、温度场、电传导、磁场、渗流和声场等问题的求解计算,最近又发展到求解多个交叉学科的问题。例如比较常见的是将温度场和结构场之间进行耦合计算,确定由温度场分布不均匀引起的结构应力和变形等。

(2) 由求解线性工程问题进展到分析非线性问题。随着科学技术的发展,线性理论已经远远不能满足设计的要求。例如建筑行业中的高层建筑和大跨度悬索桥的出现,就要求考虑结构的大位移和大应变等几何非线性问题;航天和动力工程的高温部件存在热变形和热应力,也要考虑材料的非线性问题;诸如塑料、橡胶和复合材料等各种新材料的出现,仅靠线性计算理论不足以解决遇到的问题,只有采用非线性有限元算法才能解决。众所周知,非线性的数值计算是很复杂的,它涉及到很多专门的数学问题和运算技巧,很难为一般工程技术人员所掌握。为此,近年来国外一些公司花费了大量的人力和投资开发求解非线性问题的分析功能,并广泛应用于工程实践。

(3) 增强可视化的前后处理功能。早期有限元分析软件的研究重点在于推导新的高效率求解方法和高精度的单元。随着数值分析方法的逐步完善,尤其是计算机运算速度的飞速发展,整个计算系统用于求解运算的时间越来越少,而准备数值模型和处理计算结果的时间占整个分析工程的比例越来越高。据统计,整个分析流程中,前处理占用的工作时间大致在 80%,而加上后处理部分,占用的时间就要超过 95%。因此目前几乎所有的商业化有限元程序系统都有功能很强的前后处理模块与之相配合。在强调“可视化”的今天,很多程序都建立了对用户非常友好的 GUI (Graphics User Interface),使用户能以可视图形的方式直观快速地进行网格自动划分,生成有限元分析所需数据,并按要求将大量的计算结果整理成变形图、等值分布云图,便于极值搜索和所需数据的列表输出。

(4) 与 CAD 软件的无缝集成。当今有限元分析系统的另一个特点是与通用 CAD 软件的集成使用——在用 CAD 软件完成部件和零件的造型设计后,自动生成有限元网格并进行计算,如果分析的结果不符合设计要求则重新进行造型和计算,直到满意为止,从而极大地提高了设计水平和效率。如今,工程师可以在集成的 CAD 和 FEA 软件环境中快捷地解决一个在以前无法应付的复杂工程分析问题。所以当今所有的商业化有限元系统商都开发了著名的 CAD 软件(如 Unigraphics、Pro/ENGINEER、SolidEdge、SolidWorks 等)的接口。

1.2 动力学分析概述

1.2.1 动力分析过程浏览

动力分析过程如图 1-9 所示。

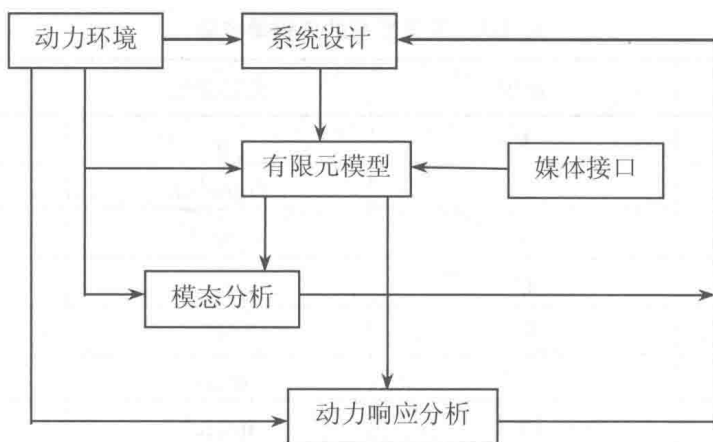


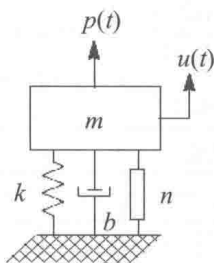
图 1-9 动力分析过程

1.2.2 单自由度系统

1. 动力学方程

$$m\ddot{u}(t) + b\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) + n(\dot{u}, u)$$

式中： m 为质量（惯性）； b 为阻尼（能量耗散）； k 为刚度（恢复力）； n 为非线性恢复力； p 为作用力； u 为位移； \ddot{u} 为加速度； \dot{u} 为速度。



通常，作用力 p 、位移 u 、速度 \dot{u} 、加速度 \ddot{u} 为时间函数， m 、 b 、 k 为常数，非线性恢复力 n 为 u 、 \dot{u} 的函数。

2. 单位

(1) 基本单位。

基本单位：长度 L （英寸，米），质量 M （SLUG，千克），时间 T （秒）。

基本单位和推导单位的量纲如下：

m	M
b	MT^{-1}
k	MT^{-2}
p	MT^{-2}
u	L
\dot{u}	LT^{-1}
\ddot{u}	LT^{-2}

(2) 常用变量的工程单位制。

常用变量的工程单位制如表 1-1 所示。

表 1-1 常见变量的工程单位制

变量	量纲	英制单位	国际单位
长度	L	in	m
质量	M	lb-sec ² /in	kg
时间	T	sec	sec
面积	L ²	in ²	m ²
体积	L ³	in ³	m ³
速度	LT ⁻¹	in/sec	m/sec
加速度	LT ⁻²	in/sec ²	m/sec ²
转角	—	rad	rad
角速度	T ⁻¹	rad/sec	rad/sec
角加速度	T ⁻²	rad/sec ²	rad/sec ²
圆频率	T ⁻¹	rad/sec	rad/sec
频率	T ⁻¹	rad/sec	rad/sec
特征值	T ⁻²	rad ² /sec ²	rad ² /sec ²
相角	—	deg	deg
力	MLT ⁻²	lb	N
重力	MLT ⁻²	lb	N
弯矩	ML ² T ⁻²	in-lb	N-m
密度	ML ⁻³	lb-sec ² /in ⁴	kg/m ³
杨氏模量	ML ⁻¹ T ⁻²	lb/in ²	Pa; N/m ²
泊松比	—	—	—
剪切模量	ML ⁻¹ T ⁻²	lb/in ²	Pa; N/m ²
面积惯量	L ⁴	in ⁴	m ⁴
扭转常量	L ⁴	in ⁴	m ⁴
质量惯量	ML ²	in-lb-sec ²	kg·m ²
刚度	MT ⁻²	lb/in	N/m
粘性阻尼系数	MT ⁻¹	lb-sec/in	N·sec/m
扭转常量	—	—	—

注 L 表示长度, M 表示质量, T 表示时间, — 表示无量纲。

注意: 首先, 计算中注意单位制要统一; 其次, 动力学分析中质量与阻尼单位制最容易出错; 最后, MSC Nastran 不内置检验单位的功能, 分析人员需要自行核实单位的统一性。

1.2.3 单自由度系统无阻尼自由振动

1. 动力学方程

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$$