高等院校高等数学规划教材

文科高等数学引论

程东旭 冯 琪 主 编

郑玉晖 李燕楠 李旭红 陈媛媛 副主编

Wenke Gaodeng Shuxue Yinlun

中山大学出版社
SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS

高等院校高等数学规划教材

文科高等数学引论

程东旭　冯　琪　主　编

郑玉晖　李燕楠　李旭红　陈媛媛　副主编

Wenke Gaodeng Shuxue Yinlun

中山大学出版社
SUN YAT-SEN UNIVERSITY PRESS
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

文科高等数学引论/程东旭，冯琪主编；郑玉晖，李燕楠，李旭红，陈媛媛副主编. —广州：中山大学出版社，2018.7

ISBN 978-7-306-06353-3

Ⅰ. ①文…　Ⅱ. ①程… ②冯… ③郑… ④李… ⑤李… ⑥陈…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 104252 号

出 版 人：王天琪
策划编辑：李　文
责任编辑：李　文
封面设计：曾　斌
责任校对：梁嘉璐　付　辉
责任技编：何雅涛
出版发行：中山大学出版社
电　　话：编辑部 020-84111996，84113349，84111997，84110779
　　　　　发行部 020-84111998，84111981，84111160
地　　址：广州市新港西路 135 号
邮　　编：510275　　　　传　　真：020-84036565
网　　址：http://www.zsup.com.cn　　E-mail：zdcbs@mail.sysu.edu.cn
印 刷 者：湛江日报社印刷厂
规　　格：787mm×1092mm　1/16　16.75 印张　432 千字
版次印次：2018 年 7 月第 1 版　2018 年 7 月第 1 次印刷
定　　价：50.00 元

前　言

大学文科开设高等数学课程的目的是为了让学生摆脱应试教育的束缚，真正认识到数学不仅是一种重要的“工具”或“方法”，同时也是一种思维模式，即数学方式的理性思维（包括抽象思维、逻辑论证思维等）。因此，数学不仅是一门科学，也是一种文化，即数学文化；数学不仅是一类知识的集合，更重要的是它体现了一种基本素质，即数学素质。

包括史、哲、政、法、外语、艺术等的所谓“文科”，由于涉及到的专业众多，对数学的要求各不一样，不同的专业教学计划中“文科高等数学”课程的课时也有多有少，差别很大。由于受应试教育及思想观念等多种原因的影响，我国大学文科学生的数学基础普遍比较薄弱。另外，我国大学的文科高等数学教育起步较晚，各高等院校在大学文科高等数学教学还处于起步探索阶段，多年来一直在努力探寻适合文科类学生的特点和专业要求的教学内容、教学模式和教学方法。

为了充分调动大学文科学生学习数学的兴趣和积极性，我们对大学文科高等数学教学内容进行改革，在传授数学知识的同时，引入大量的扩展阅读资料，通过介绍数学家的故事、数学典故、数学方法以及名家谈数学等内容，有机地渗透和融入了辩证唯物主义、历史唯物主义、爱国主义等数学的人文精神，体现了数学的艺术和内涵，融会基本的数学思想方法和数学文化。

我们在多年教学实践和教学经验的基础上，编写了这本适合大学文科学生使用的高等数学教材。本教材主要涵盖数学史简介，函数、极限与连续性，导数与微分，积分，多元函数微积分，微分方程，线性代数导论和概率论与数理统计初步等八章内容，各章配有少量习题。

本书由程东旭、冯琪任主编，郑玉晖、李燕楠、李旭红、陈媛媛任副主编，王虹教授对全书进行了审阅。

本书的出版得到了“河南省高等学校青年骨干教师培养计划（NO. 2015GGJS-193）项目”的资助，在此表示诚挚的感谢！

限于编者水平有限，编写时间比较仓促，错误不妥之处在所难免，希望广大读者提出批评和指正。

编者

2018 年 4 月

目　　录

第 1 章　数学史简介

数学史的研究对象是数学概念、方法和数学思想的起源与发展，及其与社会、经济和一般文化之间的关系.

若要全面地了解数学科学，首先得了解数学史. 世界上凡是有真知灼见的数学家在这方面都有真切的体会. 德国数学家外尔（H. Weyl，1885—1955 年）指出："除了天文学以外，数学是所有学科中最古老的一门科学. 如果不去追溯自古希腊以来各个时代所发现与发展起来的概念、方法和结果，我们就不能理解前 50 年数学的目标，也不能理解它的成就."法国数学家庞加莱说："若想预见数学的将来，正确的方法是研究它的历史和现状."英国科学史家丹皮尔说："再没有什么故事能比科学思想发展的故事更有魅力了."事实上，数学史不仅仅具有魅力，而且它对于深刻认识数学科学本身以及全面了解整个人类文明的发展都具有重要的意义.

1.1　世界数学史简介

由于数学的发展是一个错综复杂的知识过程与社会过程，如果采用单一的线索将数学史进行分期难免会有所偏颇，因此，本节将综合考虑，将数学史分为如下几个时期：

(1) 数学的起源与早期发展（公元前 6 世纪前）.

(2) 初等数学时期（公元前 6 世纪—16 世纪）.

1) 古代希腊数学（公元前 6 世纪—6 世纪）.

2) 中世纪东西方数学（3 世纪—15 世纪）.

3) 欧洲文艺复兴时期（15 世纪—16 世纪）.

(3) 近代数学时期，也称变量数学时期（17 世纪—18 世纪）.

(4) 现代数学时期（1820 年—至今）.

下面我们将分时期分阶段具体说明，对于其间出现的三次数学危机将在本节最后单独列出. 本节中为了叙述的连贯性，凡是牵涉到中国数学史的部分我们都放到第二节中国数学史简介中一并讲述.

1.1.1 数学的起源与早期发展

1.1.1.1 数与形概念的产生

从原始的“数”到抽象的“数”概念的形成，是一个缓慢、渐进的过程. 人从生产活动中认识到了具体的数，从而产生了记数法.

以下是后来世界上出现的几种古老文明的早期计数系统：古埃及的象形数字（出现于公元前3400年左右），巴比伦楔形数字（出现于公元前2400年左右），中国甲骨文数字（出现于公元前1600年左右），希腊阿提卡数字（出现于公元前500年左右），中国筹算数码（出现于公元前500年左右），印度婆罗门数字（出现于公元前300年左右）. 其中除了巴比伦楔形数字采用六十进制、玛雅数字采用二十进制外，其余均采用十进制. 世界上不同年代出现了五花八门的进位制和眼花缭乱的记数符号体系，足以证明数学起源的多元性和数学符号的多样性.

1.1.1.2 河谷文明与早期数学

“河谷文明”通常指的是兴起于埃及、美索不达米亚、中国和印度等地的古代文明. 早期数学就是在尼罗河、幼发拉底河与底格里斯河、黄河与长江、印度河与恒河等河谷地带首先发展起来的. 为方便起见，印度数学史部分将放到后文“中世纪东西方数学”中一并讲述.

1. 古埃及数学

现今对古埃及数学的认识，主要是依据两卷用僧侣文写成的纸草书：一卷藏在伦敦，叫作莱因德纸草书；一卷藏在莫斯科，叫作莫斯科纸草书. 这两部纸草书实际上都是各种类型的数学问题集，这些问题大部分来源于现实生活. 这两部纸草书可以说是古埃及最重要的传世数学文献.

单位分数的广泛使用成为埃及数学一个重要而有趣的特色，埃及人将所有的真分数都表示为一些单位分数的和. 在莱因德纸草书中用了很大的篇幅来记载 $2/n$（n 从 5 到 101）型的分数分解成单位分数的结果. 埃及人对单位分数情有独钟的原因尚不清楚，但无论如何，利用单位分数，分数的四则运算就能进行，尽管做起来比较麻烦. 埃及人最基本的算术运算是加法，乘法运算可以通过逐次加倍来实现. 在莱因德纸草书中显示了埃及人在此方面熟练的计算技巧.

埃及地处尼罗河两岸，由于尼罗河定期泛滥，淹没全部谷地，水退后，要重新丈量居民的耕地面积，因此，多年积累起来的测地知识便逐渐发展成为几何学. 可以说，埃及的几何学是尼罗河的赠礼. 现存的纸草书中可以找到求解正方形、矩形、等腰梯形等图形面积的正确公式. 此外，埃及人对圆面积也给出了很好的诠释，在体积计算中也达到了很高的水平.

总之，古代埃及人积累了一定的实践经验，但是在一些计算中对于精确计算和近似计算不作区分使得埃及的这种实用几何带有粗糙的色彩，这都阻碍了埃及数学向更高层

次发展．到公元前 4 世纪希腊人征服埃及以后，这一古老的数学完全被蒸蒸日上的希腊数学所取代．

2．美索不达米亚数学

西亚美索不达米亚地区（即底格里斯河与幼发拉底河流域）是人类早期文明发祥地之一．一般称公元前 19 世纪至公元前 6 世纪间该地区的文化为巴比伦文化，相应的数学称为巴比伦数学．对巴比伦数学的了解，依据是 19 世纪初考古发掘出来的楔形文字泥板，约有 300 块是纯数学内容的，其中约有 200 块是各种数表，包括乘法表、倒数表、平方和立方表等．在公元前 1600 年的一块泥板上，记录了许多组毕达哥拉斯三元数组（即勾股数组）．美索不达米亚数学在代数领域已经达到了相当的高度．埃及代数主要讨论线性方程，对于二次方程仅涉及最简单的情形，而巴比伦人却能够有效地处理某些三次方程和可化为二次方程的四次方程．

总的来说，古代美索不达米亚数学和古代埃及数学一样，主要是解决各类具体问题的实用知识，处于原始算法的积累时期，几何学还不能称之为一门独立的学问．向理论数学的过渡，大概是从公元前 6 世纪地中海沿岸开始，在那里迎来了初等数学的第一个黄金时代——以论证几何为主的希腊数学时代．

1.1.2　初等数学时期

1.1.2.1　古代希腊数学

希腊人从埃及和巴比伦人那里学习了代数和几何的原理，但是，埃及和巴比伦人的数学基本上是经验的总结，是零散的．希腊人将这些零散的知识组成一个有序的、系统的整体并努力使数学更加深刻、抽象和理性化．

公元前 3 世纪，出现了欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯三位大数学家，他们的成就标志着古典希腊数学进入了巅峰时代，但是，终止于公元 6 世纪．欧几里得是希腊论证几何学的集大成者，他所著的《几何原本》是数学史上一个伟大的里程碑．这部著作一直流传至今，其影响远远超出了数学本身，对整个人类文明都产生了重大影响．阿基米德的著述极为丰富，主要集中探讨了与面积和体积计算相关的问题，他对数学作出的最突出的贡献是积分方法的早期发展．阿波罗尼奥斯的贡献涉及几何学和天文学，但是，最重要的数学成就是在前人的基础上创立了非常完美的圆锥曲线理论．

公元前 30 年到公元 6 世纪这段时期被称为希腊数学的“亚历山大后期”，这一时期的希腊数学的一个重要特征就是突破之前以几何学为中心的传统，使算数和代数成为独立的学科．后来由于历史变迁，古希腊学术中心亚历山大城几经战火，使得古希腊数学至此落下帷幕．

1.1.2.2　中世纪东西方数学

古印度数学的最高成就是婆什迦罗的两部数学著作《算法本源》和《莉拉沃蒂》．其中《算法本源》主要探讨了代数问题，《莉拉沃蒂》则从一个印度教信徒的祈祷开始展开，探

讨的是算术问题.

印度数学始终保持着东方数学以计算为中心这一实用化的特点. 现代初等算术运算方法的发展, 起始于印度, 后被阿拉伯人采用, 又传到欧洲, 在那里, 它们被改造成了现在的形式.

正如埃及人发明了几何学, 阿拉伯人命名了代数学并且远比希腊人和印度人的著作更接近于近代初等代数. 阿拉伯人对于三角学理论最突出的贡献是利用二次插值法制定了正弦、正切函数表, 并证明了一些我们现在熟知的三角公式, 如正弦公式、和差化积公式等.

中世纪的欧洲数学经历了黑暗时期和科学复苏时期. 中世纪基督教日益封建化并且战火连绵, 使黑暗时代的欧洲在数学领域毫无成就. 欧洲黑暗时期过后第一位有影响力的数学家是斐波那契 (意大利, 1170—1250 年), 代表作是《算盘书》, 对改变欧洲数学的面貌产生了很大的影响. 科学在欧洲的复苏, 加速了欧洲手工业、商业的发展, 最终引起了文艺复兴时期欧洲数学的高涨.

1.1.2.3 欧洲文艺复兴时期

欧洲人在数学上的推进是从代数学开始的, 它是文艺复兴时期成果最突出、影响最深远的领域, 拉开了近代数学的序幕, 主要包括三、四次方程的求解与符号代数的引入这两个方面. 在 16 世纪, 三角学从天文学中分离出来, 成为了一个独立的数学分支. 欧洲第一部脱离天文学的三角学专著是雷格蒙塔努斯 (德国, 1436—1476 年) 的《论各种三角形》. 文艺复兴时期绘画艺术的盛行产生了透视学, 从而诞生了射影几何学. 由于天文和航海计算的需要, 欧洲人把实用的算术计算放在数学的首位, 计算技术最大的改进是对数的发明与应用. 到 16 世纪末、17 世纪初, 整个初等数学的主要内容已基本定型, 文艺复兴促进了东西方数学的融合, 为近代数学的兴起及发展奠定了基础.

1.1.3 近代数学时期

近代数学本质上可以说是变量数学. 它产生于 17 世纪, 大体上经历了两个决定性的重大步骤: 第一步是解析几何的产生; 第二步是微积分的创立.

变量数学建立的第一个决定性步骤出现在 1637 年法国数学家笛卡儿的著作《几何学》, 这本书奠定了解析几何的基础. 解析几何将变量引进了数学, 为微积分的创立奠定了基础.

变量数学发展的第二个决定性步骤是英国科学家牛顿和德国学者莱布尼茨在 17 世纪后半叶建立了微积分. 他们使微积分成为能普遍适用的算法, 同时又将面积、体积等问题归结为微分运算. 随着微积分的发展, 一系列新的数学分支在 18 世纪成长起来, 如常微分方程、偏微分方程、变分法、微分几何和概率论等.

1.1.4　现代数学时期

现代数学发展的特征是它的主要分支——几何学、代数和分析发生了深刻的变化. 几何学研究的空间变为无限多，而现实世界的某些形式成为几何学的研究对象，因而出现了高维欧几里得空间、射影空间、拓扑空间等等. 现代代数不仅仅研究数及一般性质的量，还研究向量及其不同种类的移动的运算. 代数运算范围已扩大到其运算对象既不是数，也不是量. 代数的现代方法的应用逐步渗透到分析、物理、结晶学等学科中，同时它也在发展中得到更广泛的应用，如代数方程和微分方程. 现代分析的形成深受集合论的影响，实变函数论、泛函分析等新的数学分支得到了很大发展. 以哲学历史和逻辑原理为基础的数理逻辑正在科学和技术中得到应用.

以上是世界数学的一个大致发展历程，从中可以看出，数学在人类社会的发展中起的作用是巨大的，可以说数学是人类科学中最基础的学科. 但在数学的发展史中，并不是那么一帆风顺的，下面将简要叙述一下历史上的三次数学危机.

第一次数学危机发生在公元前 5 世纪的古希腊，由于不可通约量的发现导致了毕达哥拉斯悖论. 当时的毕达哥拉斯学派重视自然及社会中不变因素的研究，他们认为：宇宙间一切事物都可归结为整数或整数之比. 毕达哥拉斯学派的一项重大贡献是证明了勾股定理，但由此也发现了一些直角三角形的斜边不能表示成整数或整数之比（不可通约)的情形，如直角边长均为 1 的直角三角形就是如此. 这一悖论直接触犯了毕氏学派的根本信条，导致了当时认识上的“危机”，从而产生了第一次数学危机.

第二次数学危机发生在 17 世纪. 对于无穷小量究竟是不是零这一问题，数学界出现了混乱的局面，即第二次数学危机. 微积分的主要创始人牛顿在一些典型的推导过程中，第一步用了无穷小量作分母进行除法，当然无穷小量不能为零；第二步牛顿又把无穷小量看作零，去掉那些包含它的项，从而得到所要的公式. 由力学和几何学的应用证明了这些公式是正确的，但它的数学推导过程却在逻辑上自相矛盾，焦点是：无穷小量是零还是非零？如果是零，怎么能用它做除数？如果不是零，又怎么能把包含着无穷小量的那些项去掉呢？直到 19 世纪，法国数学家柯西详细而又系统地发展了极限理论，他认为无穷小量应该是要怎样小就怎样小的量，因此本质上它是变量，而且是以零为极限的量，至此柯西澄清了前人的无穷小的概念，而且把无穷小量从形而上学的束缚中解放出来，第二次数学危机基本得到了解决.

第三次数学危机出现在 19 世纪末，它是在康托的一般集合理论的边缘发现悖论造成的. 1897 年，福尔蒂揭示了集合论中的第一个悖论. 两年后，德国数学家康托发现了与此很相似的悖论. 1902 年，英国数学家罗素又发现了一个悖论，它除了涉及集合概念本身外不涉及别的概念. 罗素悖论曾被以多种形式通俗化. 其中最著名的是罗素于 1919 年给出的，它涉及某村理发师的困境. 理发师宣布了这样一条原则：他给所有不给自己刮脸的人刮脸，并且，只给村里这样的人刮脸. 当人们试图回答下列疑问时，就认识到了这种情况的悖论性质：“理发师是否自己给自己刮脸?”如果他不给自己刮脸，那么他按

原则就该为自己刮脸；如果他给自己刮脸，那么他就不符合他的原则. 罗素悖论动摇了整个数学的根基. 尽管悖论可以消除，矛盾可以解决，然而数学的确定性却在一步一步地丧失. 第三次危机表面上是解决了，但实质上是更深刻地以其他形式延续着.

这三次数学危机从某种意义上来说并不是什么坏事，我们应该用辩证的观点去看待它们. 实际上它们给数学发展带来了新的动力，推进了科学的进程.

1.2 中国数学史简介

数学在中国不仅历史悠久，而且也取得了辉煌的成就. 纵观整个中国数学发展历程，可将中国数学史分为以下几个阶段：①中国数学的起源与早期发展；②中国古代数学体系的形成与奠基；③中国古代数学的稳定发展；④中国古代数学发展的高峰；⑤中国古代数学的衰落与中西合璧；⑥近现代数学的引进与开拓.

1.2.1 中国数学的起源与早期发展

先秦典籍中有“隶首作数”“结绳记事”的记载，说明我们的先民在生产和生活的实践中，从判别事物的多寡中逐渐认识了数. 从有文字记载开始，我国的计数法就遵循十进制. 算筹是中国古代的计算工具，而这种计算方法称为筹算. 中国古代数学的光辉成就，大都得益于筹算的便利. 筹算为建立高效的加、减、乘、除等运算方法奠定了基础，直到15世纪元朝末才逐渐被珠算所取代. 这个时期的测量数学由于在生产上有着广泛应用，因此也有了很大的发展. 战国时期的百家争鸣也促进了数学的发展，一些学派还总结和概括出与数学有关的许多抽象概念与思想，如“圆：一中同长也”,“一尺之棰，日取其半，万世不竭”等. 几何概念的定义、极限思想和其他数学命题等，这些宝贵的数学思想对中国古代数学理论的发展是很有意义的.

1.2.2 中国古代数学体系的形成与奠基

这一时期包括从秦汉、魏晋到南北朝共400年间的数学发展历史.

在秦汉时期经济文化发展迅速，中国古代数学体系就是形成于这个时期，它的主要标志是算术作为一个专门学科而出现. 形成于西汉初年的竹简著作《算数书》，内容包括整数和分数四则运算、比例问题、面积和体积问题等，是目前所知道的中国传统数学最早的著作. 编纂于西汉末年的《周髀算经》，反映了中国古代数学与天文学的密切联系，但从数学上看，它的主要成就是分数运算，勾股定理及其在天文测量中的应用，其中关于勾股定理的论述最为突出. 成书于东汉初年的《九章算术》是从先秦至西汉中叶的长时期里经众多学者编纂修改而成的古代数学经典著作，它的出现标志着中国古代数学体系的形成. 它的成就是多方面的：在算数方面给出了世界上最早的系统分数理论；在代数方面，主要有线性方程组的解法，不定方程及其解、开平方、开立方、一元二次方程解法

等；在几何方面，主要是提出了各种平面图形的面积和多面体体积的计算公式，给出了重要的“以盈补虚”的方法和勾股理论的应用. 就《九章算术》的特点来说，它注重应用，注重理论联系实际，形成了以筹算为中心的数学体系，在中国数学史和世界数学史上都影响深远.

1.2.3　中国古代数学的稳定发展

魏晋时期中国数学在理论上有了较大的发展，其中三国吴人赵爽和三国魏人刘徽的工作被认为是中国古代数学理论体系的开端. 赵爽是中国古代对数学定理和公式进行证明与推导的最早的数学家之一. 他在《周髀算经》中补充的“勾股圆方图及注”和“日高图及注”都是十分重要的数学文献. 在“勾股圆方图及注”中他用几何方法严格证明了勾股定理，体现了割补原理的思想. 在“日高图及注”中，他用图形面积证明了汉代普遍应用的重差公式. 刘徽注释了《九章算术》，他主张对一些数学名词特别是重要的数学概念给以严格的定义. 在《九章算术注》中，他不仅对原书的方法、公式和定理进行一般的解释和推导，而且在论述的过程中做了很大的改进. 例如，刘徽从“率”（后称为比）的定义出发论述了“分数运算”和“今有术”的道理，并推广“今有术”得到合比定理，他又根据率、线性方程组和正负数的定义阐明方程组解法中消元的道理；在卷1《方田》中创立“割圆术”(即用圆内接正多边形面积无限逼近圆面积的方法)，为圆周率的研究奠定理论基础并提供了科学的算法，他运用“割圆术”得出圆周率的近似值为 3 927/1 250（即 3.1416）；在《商功》章中，为解决球体积公式的问题而构造了“牟合方盖”的几何模型，为彻底解决球的体积寻找到了正确的途径.

南北朝时期的社会长期处于战争和分裂状态，但由于社会的需要，数学仍在发展，在此期间出现了《孙子算经》《夏侯阳算经》《张丘建算经》等算学著作. 公元5世纪，祖冲之、祖暅父子的工作在这一时期最具代表性，他们在刘徽的《九章算术注》的基础上，将传统数学大大向前推进了一步，成为重视数学思维和数学推理的典范. 他们的数学工作主要有下列几项：①祖冲之得到 $3.1415926 < \pi < 3.1415927$，后来又创造了新的方法，得到圆周率的两个分数值，即约率 22/7 和密率 355/113. 他的这一工作，使中国在圆周率计算方面，比西方领先了1000年之久. ②祖暅总结了刘徽的有关工作，提出“幂势既同，则积不容异”，即二立体等高处截面积均相等则二体体积相等，这就是著名的祖暅公理. 祖暅应用这个公理和刘徽的“牟合方盖”模型，解决了刘徽尚未解决的球体积公式. ③发展了二次与三次方程的解法.

隋朝隋炀帝大兴土木，在客观上促进了数学的发展. 唐初王孝通的《缉古算经》，主要是通过土木工程中计算土方、工程的分工与验收以及仓库和地窖计算等实际问题，讨论如何以几何方式建立三次多项式方程，发展了《九章算术》中的《少广》《勾股》章中的开方理论. 由于南北朝时期的一些重大天文发现在隋唐之交开始落实到历法编算中，这使得唐代历法中出现了一些重要的数学成果. 公元600年，隋代刘焯在制订《皇极历》时，在世界上最早提出了等间距二次内插公式，唐代僧一行在其《大衍历》中将其发展为不等间距二次内插公式. 唐朝后期，计算技术有了进一步的改进和普及，它使乘除法