新世纪高等学校规划教材 · 大学公共课系列

高等数学

（上册）

主编◎彭友花　陆万春　文清芝

GAODENG SHUXUE

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校规划教材 · 大学公共课系列

高等数学

（上册）

主编◎彭友花　陆万春　文清芝

GAODENG SHUXUE

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/彭友花,陆万春,文清芝著. —北京:北京师范大学出版社,2018.8

(新世纪高等学校规划教材. 大学公共课系列)

ISBN 978-7-303-23759-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①彭…②陆…③文… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 105306 号

营销中心电话 010-62978190 62979006
北师大出版社科技与经管分社 http://www.jswsbook.com
电子信箱 jswsbook@163.com

出版发行:北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码:100875

印 刷:三河市东兴印刷有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:787 mm×1092 mm 1/16
印 张:13.75
字 数:262 千字
版 次:2018 年 8 月第 1 版
印 次:2018 年 8 月第 1 次印刷
定 价:34.90 元

策划编辑:刘风娟 责任编辑:刘风娟
美术编辑:刘 超 装帧设计:刘 超
责任校对:赵非非 黄 华 责任印制:赵非非

目 录

第2章 一元函数微分学 /50

第 1 章 函数、极限与连续

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学.
——恩格斯

没有任何问题可以像无穷那样深深地触动人的情感，很少有别的观念能像无穷那样激励理智产生富有成果的思想，然而也没有任何其他的概念能像无穷那样需要加以阐明.
——希尔伯特

函数是研究变量与变量之间的依赖关系，是高等数学的主要研究对象. 极限是高等数学的基本概念，极限方法是高等数学的基本方法，高等数学的许多基本概念都是由极限定义的，如连续、导数、定积分等. 函数的连续性是高等数学所研究的函数的基本要求，也是现实生活中大量自然现象的数学表现，如气温的变化、树木的生长等.

1.1 函数

1.1.1 函数的定义

定义 1.1 设 D 为非空数集，如果存在对应关系 f，使得对 D 中的任意一个数 x，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在数集 D 上的函数，记为：$y=f(x)$，$x\in D$. 称 x 为自变量，y 为因变量，数集 D 称为函数 f 的定义域，实数 y 称为函数 f 在 x 处的函数值，全体函数值所组成的集合称为函数 f 的值域，记为：$f(D)=\{y \mid y=f(x),\ x\in D\}$.

在函数定义中，定义域和对应关系是函数的两要素，两个函数只要定义域与对应关系一样，就认为是同一函数，与变量符号无关. 如函数 $y=\sqrt{x^2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$和函数 $s=|t|$，$t\in(-\infty,+\infty)$就表示同一函数.

函数的表示一般有解析式法、表格法和图像法. 其中解析式法是高等数学最常用的表示法. 函数的定义域，如果是实际问题，则需根据其实际意义来确定其定义域，如位移函数 $s=s(t)$，其定义域一般为 $D=[0,$

$+\infty$)；如果不考虑函数的实际意义，只抽象的研究函数，则函数的定义域可以省略不写，此时函数的定义域是指使得解析式有意义的全体实数. 如函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$，其定义域为$[-2,1)\cup(1,2]$.

如果函数在定义域中的不同范围有不同的解析式，我们称这样的函数为**分段函数**. 分段函数在高等数学中是非常重要的，它是许多命题的试金石.

下面我们给出几个重要的分段函数.

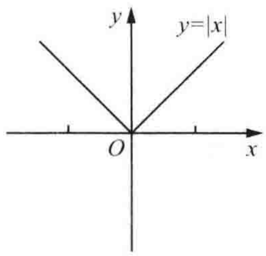


图 1-1

例 1-1 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$(如图 1-1).

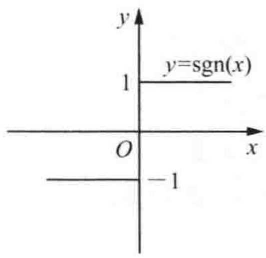


图 1-2

例 1-2 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$(如图 1-2).

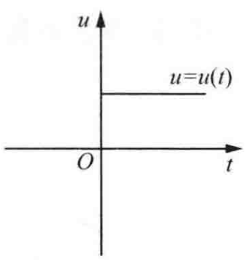


图 1-3

例 1-3 单位跃价函数 $u=u(t)=\begin{cases} 1, & t>0, \\ 0, & t<0 \end{cases}$(如图 1-3).

定义 1.2 若两个函数 $y=f(u)$，$u\in U$ 和 $u=\varphi(x)$，$x\in D$，满足：$\varphi(D)=\{u\,|\,u=\varphi(x),\ x\in D\}\cap U\neq\varnothing$，则对应 D 中的任意一个实数 x，通过 u，都有唯一的一个实数 y 与之对应，这就定义了一个新的函数，称这个函数为 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，记为：$y=f[\varphi(x)]$，$x\in D$.

例如：函数 $y=\ln(1+x^2)$就是由 $y=\ln u$，$u=1+x^2$ 构成的复合函数；函数 $y=\sqrt{\log_a \tan x}$就是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\log_a v$，$v=\tan x$ 构成的复合函数.

定义 1.3 函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 满足：对于值域 $f(D)$中的每一个实数 y，在 D 中都有唯一的一个实数 x，使得 $f(x)=y$. 则按此对应关系就定义了一个在 $f(D)$上的新函数，称为 $y=f(x)$的反函数，记作：$x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$.

由反函数定义可得，函数 $y=f(x)$存在反函数，则 f 必须是 D 与 $f(D)$之间的一一对应关系. 如函数 $y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$不存在反函数，因为这不是一一对应关系；而函数 $y=x^2$，$x\in[0,+\infty)$就存在反函数 $x=\sqrt{y}$，$y\in[0,+\infty)$.

习惯上，我们仍然用 x 表示自变量，y 表示因变量，记反函数为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(D)$．函数与其反函数的图像特征表现为在同一坐标系中关于直线 $y=x$ 对称（如图 1-4）．

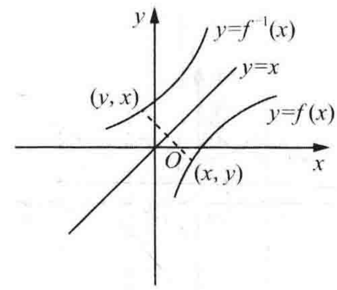


图 1-4

1.1.2　函数的基本性态

1. 单调性

定义 1.4　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，x_1，x_2 是区间 I 内的任意两点，且 $x_1<x_2$，若 $f(x_1)<f(x_2)$（$f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 是区间 I 上的增函数（减函数）．

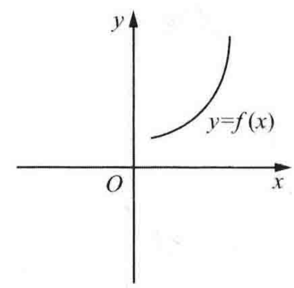


图 1-5

增函数、减函数统称为单调函数．增函数的图像特征为当自变量从左向右变化时，函数图像上升（如图 1-5），减函数的图像特征为当自变量从左向右变化时，函数图像下降（如图 1-6）．

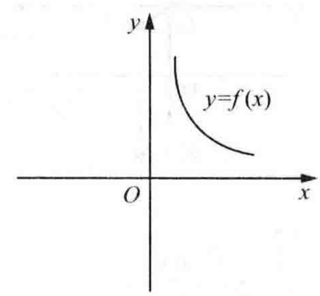
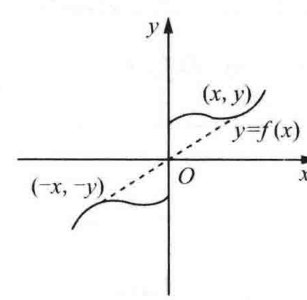


图 1-6

定理 1.1　如果函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 为单调函数，则该函数必有反函数 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$，且函数与其反函数的单调性一致．

证明　不妨设函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 为增函数，由定义 1.4 知，对于任意的 x_1，$x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，有 $y_1=f(x_1)<f(x_2)=y_2$，因此，对于 y_1，$y_2\in f(D)$，且 $y_1<y_2$，都有 $x_1=f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)=x_2$，所以函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(D)$ 也是增函数、同理可以证明减函数的情形．

2. 奇偶性



定义 1.5　设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称，如果对应定义域中的任意一点 x，都有 $f(-x)=-f(x)$（$f(-x)=f(x)$），则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数（偶函数）．

由奇函数的定义可知，点 (x, y) 在曲线上，则点 $(-x, -y)$ 也一定在曲线上，所以奇函数的图像特征为关于原点对称（如图 1-7）．同理可知偶函数的图像特征为关于 y 轴对称（如图 1-8）．既不是奇函数也不是偶函数的函数称为非奇非偶函数．

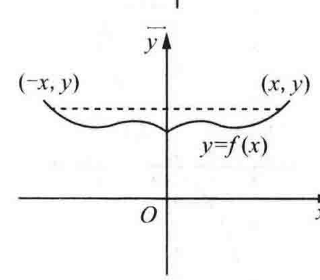


图 1-8

例如：可以验证 $y=x^4\sin x^3$ 为奇函数，$y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为偶函数．

3. 周期性

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，存在正数 T，使得对任意的 $x\in(-\infty, +\infty)$ 都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数.

对于周期函数来说，定义中的 T 有无穷多个，因为 $f(x+T)=f(x)$，则有 $f(x+kT)=f(x)$，$k\in\mathbf{Z}$ 都成立，所以 kT 也是函数 $y=f(x)$ 的周期. 一般地，在所有的这些数 T 中，若存在一个最小的正数，则称这个最小正数为周期函数的最小正周期，简称周期. 周期函数的图像特征表现为在每个周期范围内，函数图像一样(如图 1-9).

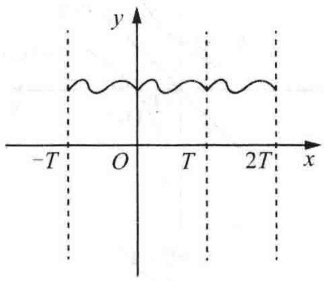


图 1-9

例如：$y=\sin x$，$y=\tan x$ 的周期分别为 2π，π.

4. 有界性

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在正数 M，对于任意的 $x\in I$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界，或者说 $y=f(x)$ 是区间 I 上的有界函数. 否则，就称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上无界，即不论正数 M 多么大，在区间 I 内总找得到这样的点 x，使得 $|f(x)|>M$.

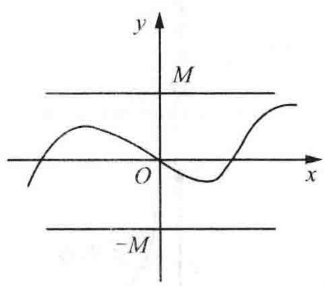


图 1-10

由定义知，有界函数中任意的 $x\in I$，都有 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，有界函数的图像特征表现为夹在两条平行线 $y=\pm M$ 之间的曲线(如图 1-10). 无界函数的图像特征表现为不论这两条平行线 $y=\pm M$ 离 x 轴有多远，函数图像总能在某个地方延伸到平行线所夹条形区域以外.

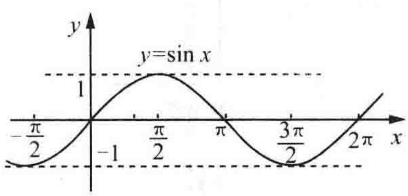


图 1-11

例如：函数 $y=\sin x$，$x\in(-\infty, +\infty)$，有 $|\sin x|\leqslant 1$，函数 $y=\sin x$ 是区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的有界函数(如图 1-11)；函数 $y=\tan x$ 是区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的无界函数；而函数 $y=\tan x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 有 $|\tan x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\tan x$ 是区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上的有界函数(如图 1-12). 因此，函数的有界性是与定义域相关的概念.

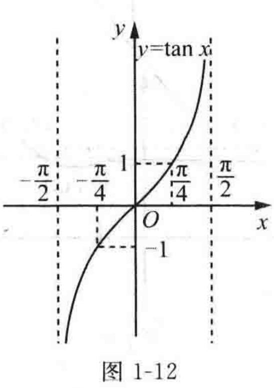


图 1-12

例 1-4 证明：函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内是无界函数.

证明　对于任意的正数 M，都存在 $x=\dfrac{1}{M+1}\in(0,\ 1)$，使得 $|f(x)|=M+1>M$，所以函数 $y=\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,\ 1)$是无界函数(如图 1-13).

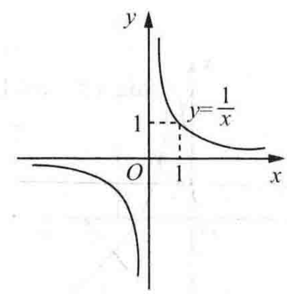


图 1-13

1.1.3　初等函数

在中学阶段，我们学习过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，我们把这几个函数统称为**基本初等函数**. 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算得到的函数称为**初等函数**. 在我们高等数学所研究的函数中，基本上都是初等函数. 前面介绍的分段函数一般就不是初等函数. 下面我们复习一些有关于基本初等函数的知识，便于今后的学习.

1. 幂函数：$y=x^{\alpha}$(α 为常数)

幂函数的定义域、单调性、奇偶性与 α 有关.

当 $\alpha\in\mathbf{Z}^{+}$ 时，其定义域为 $\mathbf{R}$，当 $\alpha\in\mathbf{Z}^{-}$ 时，其定义域为 $\mathbf{R}$ 且不为 0.

当 $\alpha=2k$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，幂函数为偶函数，当 $\alpha=2k+1$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，幂函数为奇函数.

当 $\alpha>0$ 时，幂函数在$(0,\ +\infty)$内是增函数，当 $\alpha<0$ 时，幂函数在$(0,\ +\infty)$内是减函数.

对于其他的一些情形，这里不一一列举，具体见图 1-14.

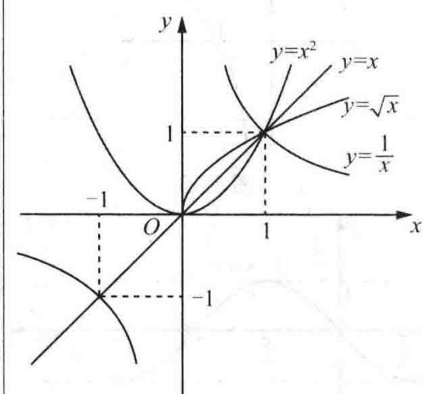


图 1-14

2. 指数函数：$y=a^{x}$($a>0$ 且 $a\neq1$)

指数函数的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，且对于任意的 $x\in(-\infty,\ +\infty)$都有 $a^{x}>0$，即指数函数的图像在 x 的上方，且经过点$(0,\ 1)$.

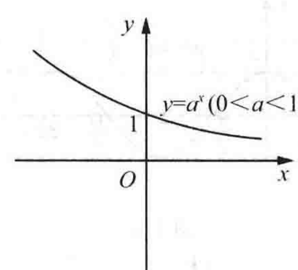


图 1-15

当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^{x}$ 在$(-\infty,\ +\infty)$内为减函数(如图 1-15)，当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^{x}$ 在$(-\infty,\ +\infty)$内为增函数(如图 1-16).

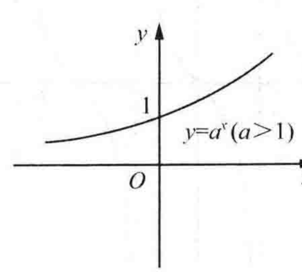


图 1-16

特别地，当 $a=\mathrm{e}=2.718\ 281\ 8\cdots$ 指数函数 $y=\mathrm{e}^{x}$ 称为自然指数函数，自然指数函数在工程技术领域经常用到.

指数运算规律：$a^{x}\cdot a^{y}=a^{x+y}$，$a^{x}\div a^{y}=a^{x-y}$.

3. 对数函数：$y=\log_{a}x$($a>0$ 且 $a\neq1$)

对数函数的定义域为$(0,\ +\infty)$，即对数函数的图

像在 y 轴的右边，且经过点(1，0).

当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 内为减函数(如图 1-17)，当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 内为增函数(如图 1-18).

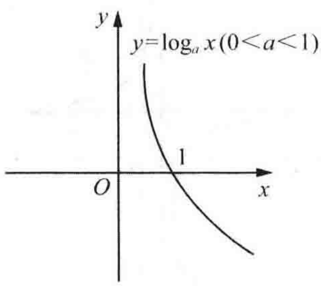


图 1-17

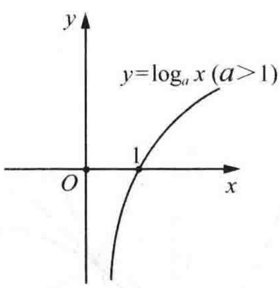


图 1-18

特别地，当 $a=\mathrm{e}=2.718\ 281\ 8\cdots$，对数函数 $y=\ln x$称为自然对数函数，自然对数函数在工程技术领域也经常用到.

对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

对数运算规律：$\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)$，

$$\log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y},$$

$$\log_a x^b=b\log_a x,\ a^{\log_a x}=x,\ \mathrm{e}^{\ln x}=x.$$

4. 三角函数

正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数和余割函数统称为三角函数.

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，奇函数；是以 2π 为周期的周期函数；在区间 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 为增函数，在区间 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 为减函数；且有 $|\sin x|\leqslant 1$，正弦函数为有界函数(如图 1-19).

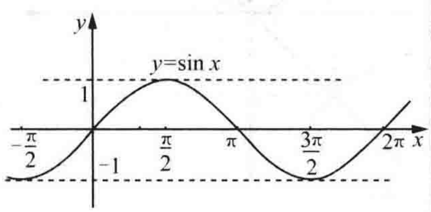


图 1-19

余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，偶函数；是以 2π 为周期的周期函数；在区间 $(2k\pi, 2k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 为减函数，在区间 $(2k\pi+\pi, 2k\pi+2\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 为增函数；且有 $|\cos x|\leqslant 1$，余弦函数为有界函数(如图 1-20).

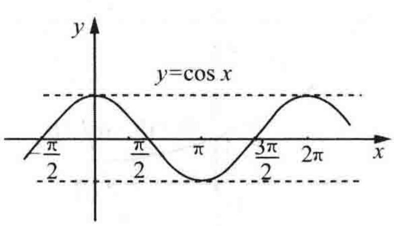


图 1-20

正切函数 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，其定义域为 $\{x \mid x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\}$；函数为奇函数；是以 π 为周期的周期函数；在区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 为增函数(如图 1-21).

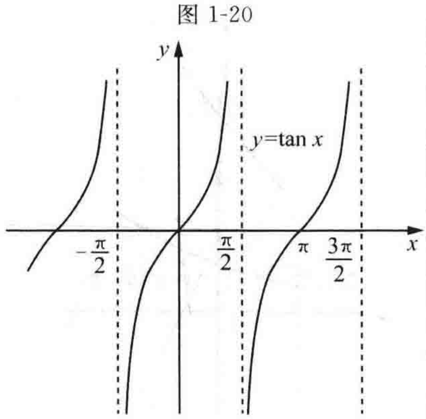


图 1-21

余切函数 $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，其定义域为 $\{x \mid x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$；函数为奇函数；是以 π 为周期的周期函数；在区间 $(k\pi, k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 为减函数(如图 1-22).

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$、余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$ 的性质可类似讨论，函数图像分别见图 1-23、图 1-24.

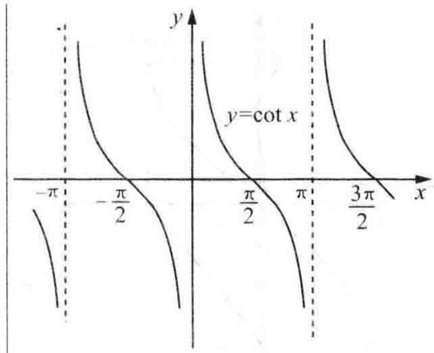


图 1-22

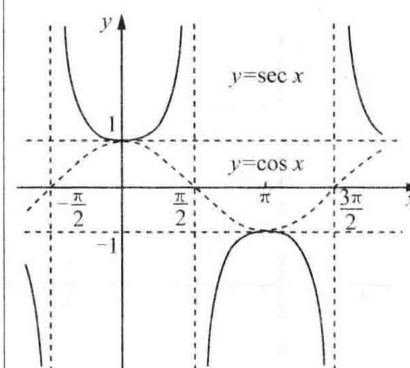


图 1-23

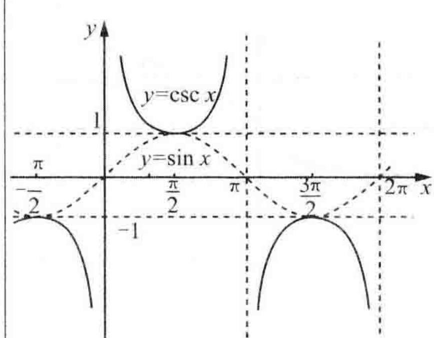


图 1-24

关于三角函数有以下恒等式.

平方关系：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$,

$1+\tan^2 x=\sec^2 x$,

$1+\cot^2 x=\csc^2 x$.

两角和与差：$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$,

$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$,

$\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$.

二倍角：$\sin 2x=2\sin x\cos x$,

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$,

$\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

万能公式：$\sin 2x=\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$，$\cos 2x=\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$,

$\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

积化和差：$\sin x\cos y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$,

$\cos x\sin y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$,

$\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$,

$\sin x\sin y=-\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$.

和差化积：$\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$,

$\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$,

$\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$,

$\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

5. 反三角函数

反三角函数包括反正弦函数、反余弦函数、反正切函数和反余切函数.

反正弦函数 $y=\arcsin x$，是正弦函数 $y=\sin x$,

$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$的反函数．它的定义域为$[-1,\ 1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$，反正弦函数为奇函数，在定义域内为增函数(如图 1-25)．

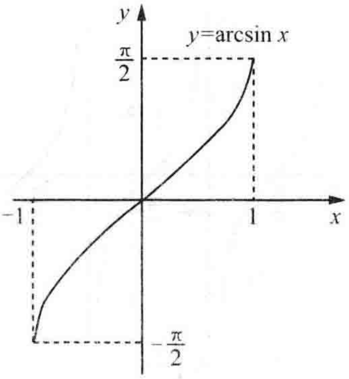


图 1-25

反余弦函数 $y=\arccos x$，是余弦函数 $y=\cos x$，$x\in[0,\ \pi]$的反函数．它的定义域为$[-1,\ 1]$，值域为$[0,\ \pi]$，在定义域内为减函数(如图 1-26)．

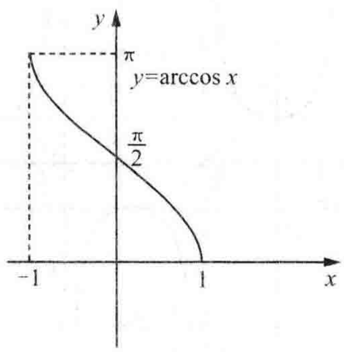


图 1-26

反正切函数 $y=\arctan x$，是正切函数 $y=\tan x$，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$的反函数．它的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$，反正切函数为奇函数，在定义域内为增函数(如图 1-27)．

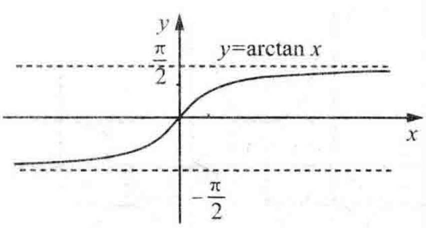


图 1-27

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，是余切函数 $y=\cot x$，$x\in(0,\ \pi)$的反函数．它的定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，值域为 $x\in(0,\ \pi)$，在定义域内为减函数(如图 1-28)．

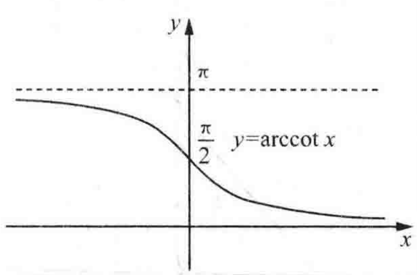


图 1-28

习　题　1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$；　(2) $y=\sqrt{3x-x^2}$；

(3) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}$；　(4) $y=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$；

(5) $y=f(x^2+1)$，其中 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$；

(6) $y=f(\sin x)+f(\ln x)$，其中 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1)$.

2. 求对应函数解析表达式.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$ 和 $f\{f[f(x)]\}$；

(2) $f\left(\dfrac{1-x}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^2}{2x^2-2x+1}(x\neq 0)$，求 $f(x)$；

(3) 已知 $f(x)$ 是二次多项式，且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$，求 $f(x)$；

(4) 已知 $f(\sin x)=\cos 2x+1$，求 $f(\cos x)$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}(a>1)$；　(2) $y=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}$；

(3) $y=\cos(\sin x)$；　(4) $y=x^3+3x^2+7x$；

(5) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　(6) $y=x\dfrac{a^x-1}{a^x+1}(a>1)$.

4. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\cos 5x$；　(2) $y=A\sin^2(\omega x+\varphi)$；

(3) $y=a^{1-x}$；　(4) $y=e^{\sin 3x}$；

(5) $y=\ln(\arctan\sqrt{1+x^2})$；　(6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

5. 证明函数 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义区域内为有界函数.

6. 证明函数 $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ 在 $(-1,1)$ 内是无界函数.

7. 在半径为 r 的球内嵌入一个内接圆柱，试将圆柱的体积 V 表示为其高 h 的函数.

8. 设火车从甲站出发，以 0.5 km/min² 的加速度匀加速前进，经过 2 min 后开始匀速行驶，再经过 7 min 后以 0.5 km/m² 加速度匀减速到达乙站，试将火车在这段时间内所行驶的路程 s 表示为时间 t 的函数.

1.2 函数极限与数列极限

1.2.1 函数极限的定义

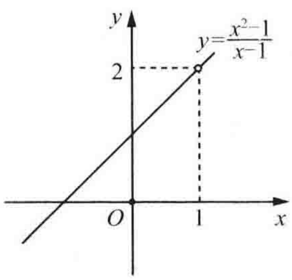


图 1-29

电子课件
函数极限
教学视频
函数极限

我们在中学简单介绍过函数极限的定义：当自变量 x 无限接近于常数 x_0 但不等于 x_0 时，函数值 $f(x)$ 会无限接近常数 A，那么就称 A 是函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限，记作为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 这样的定义是描述性的，并不严谨，无限接近是指接近到什么程度呢？

我们先来看一个引例：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$(如图 1-29).

当 x 无限接近 1 但不等于 1 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$. 我们知道，两点间的距离可以用绝对值来表示，且有 $|f(x)-2|=|x-1|$，如表 1-1 所示.

表 1-1

$\lvert f(x)-2\rvert<\varepsilon$	$\lvert x-1\rvert<\delta$
$\varepsilon=0.1$	$\delta=0.1$
$\varepsilon=0.01$	$\delta=0.01$
$\varepsilon=0.000\,1$	$\delta=0.000\,1$
ε 为任意正数	存在 $\delta=\varepsilon$

可以看出，当 x 无限接近 1 时(δ 越小)，函数值 $f(x)$ 就无限接近 2(ε 越小). 或者说，要 $|f(x)-2|<\varepsilon$(ε 为任意正数，不论多么小)，只要取 $\delta=\varepsilon$，当 $|x-1|<\delta$ 时，就能保证 $|f(x)-2|<\varepsilon$ 成立.

这样就引出了函数极限的“$\varepsilon-\delta$”定义：

定义 1.8 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的 δ_0 空心邻域 $U^\circ(x_0,\delta_0)$ 有定义，如果存在常数 A，对于任意的正数 $\varepsilon>0$，总存在正数 $\delta_0>\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么就称函数 $f(x)$ 在 x_0 处极限存在，A 是函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$，$(x\to x_0)$.

定义 1.8 也可简单记为：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.