



新世纪高等学校规划教材·大学公共课系列

高等数学

(上册)

主编◎彭友花 陆万春 文清芝

GAODENG SHUXUE



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社



新世纪高等学校规划教材·大学公共课系列

高等数学

(上册)

主编◎彭友花 陆万春 文清芝

GAODENG SHUXUE



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/彭友花,陆万春,文清芝著. —北京:北京师范大学出版社, 2018. 8

(新世纪高等学校规划教材, 大学公共课系列)

ISBN 978-7-303-23759-3

I. ①高… II. ①彭…②陆…③文… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 105306 号

营销中心电话 010-62978190 62979006
北师大出版社科技与经管分社 <http://www.jswsbook.com>
电子信箱 jswsbook@163.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码: 100875

印 刷: 三河市东兴印刷有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 787 mm×1092 mm 1/16
印 张: 13.75
字 数: 262 千字
版 次: 2018 年 8 月第 1 版
印 次: 2018 年 8 月第 1 次印刷
定 价: 34.90 元

策划编辑: 刘风娟

责任编辑: 刘风娟

美术编辑: 刘 超

装帧设计: 刘 超

责任校对: 赵非非 黄 华

责任印制: 赵非非

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-62978190

北京读者服务部电话: 010-62979006-8021

外埠邮购电话: 010-62978190

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-62979006-8006

目 录

第 1 章 函数、极限与连续 /1

1.1 函数	1
1.1.1 函数的定义	1
1.1.2 函数的基本性态	3
1.1.3 初等函数	5
习 题 1.1	9
1.2 函数极限与数列极限	10
1.2.1 函数极限的定义	10
1.2.2 函数极限的性质	13
1.2.3 数列极限	17
1.2.4 两个重要极限	20
习 题 1.2	25
1.3 无穷小量与无穷大量	27
1.3.1 无穷小量的定义与性质	27
1.3.2 无穷大量	28
1.3.3 无穷小量的阶及其比较	29
习 题 1.3	33
1.4 连续函数	34
1.4.1 连续性定义	34
1.4.2 函数的间断点	35
1.4.3 连续函数的性质	37
1.4.4 闭区间上连续函数的性质	38
习 题 1.4	40
知识拓展阅读	41
知识应用训练	44
第 1 章基础测试	46
第 1 章进阶测试	48

第2章 一元函数微分学 /50

2.1 导数	50
2.1.1 引例	50
2.1.2 导数的定义	51
2.1.3 导数的意义	54
习题 2.1	56
2.2 导数的运算	57
2.2.1 导数的四则运算	57
2.2.2 反函数求导运算	59
2.2.3 基本求导公式	59
2.2.4 复合函数求导法则	60
2.2.5 隐函数求导法则	62
2.2.6 参数函数求导法则	64
* 2.2.7 相关变化率	65
习题 2.2	67
2.3 高阶导数	69
2.3.1 显函数的高阶导数	69
2.3.2 隐函数的高阶导数	70
2.3.3 参数函数的二阶导数	71
习题 2.3	73
2.4 微分	74
2.4.1 微分的定义	74
2.4.2 微分基本公式与微分法则	76
2.4.3 微分的几何意义及近似计算	77
习题 2.4	79
2.5 微分中值定理	81
2.5.1 微分中值定理	81
2.5.2 洛必达法则	84
* 2.5.3 泰勒公式及其应用	89
习题 2.5	94
2.6 函数的单调性与极值	97
2.6.1 函数的单调性	97
2.6.2 极值	99
2.6.3 最值及其应用	102
习题 2.6	104
2.7 函数的凹凸性与图像	106

2.7.1 函数的凹凸性	106
2.7.2 曲线的渐近线	108
2.7.3 函数图像	109
习 题 2.7	111
知识拓展阅读	112
知识应用训练	114
第 2 章基础测试	116
第 2 章进阶测试	118

第 3 章 一元函数积分学 /120

3.1 不定积分的概念与性质	120
3.1.1 原函数与不定积分的概念	120
3.1.2 不定积分的性质	123
习 题 3.1	126
3.2 不定积分的换元法	127
3.2.1 第一类换元法	127
3.2.2 第二类换元法	132
习 题 3.2	135
3.3 不定积分的分部积分法	136
习 题 3.3	140
3.4 有理函数的积分	141
3.4.1 有理函数的积分	141
3.4.2 三角函数有理式的积分	142
3.4.3 简单无理函数的积分	143
习 题 3.4	146
3.5 定积分概念与性质	147
3.5.1 定积分问题举例	147
3.5.2 定积分定义	148
3.5.3 定积分的性质	151
习 题 3.5	155
3.6 微积分基本公式	156
3.6.1 变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系	156
3.6.2 积分上限函数及其导数	156
3.6.3 牛顿—莱布尼茨公式	158
习 题 3.6	161
3.7 定积分的换元法和分部积分法	162

3.7.1 换元积分法	162
3.7.2 分部积分法	165
习 题 3.7	168
3.8 反常积分	170
3.8.1 无穷限的反常积分	170
3.8.2 无界函数的反常积分	172
习 题 3.8	174
3.9 定积分的应用	175
3.9.1 定积分的元素法	175
3.9.2 定积分在几何上的应用	175
3.9.3 定积分在物理上应用	182
习 题 3.9	186
知识拓展阅读	188
知识应用训练	191
第3章基础测试	194
第3章进阶测试	196

附录 常用的积分公式 /198

习题参考答案 /207

第1章 函数、 极限与连续

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。——恩格斯

没有任何问题可以像无穷那样深深地触动人的情感，很少有别的观念能像无穷那样激励理智产生富有成果的思想，然而也没有任何其他的概念能像无穷那样需要加以阐明。——希尔伯特

函数是研究变量与变量之间的依赖关系，是高等数学的主要研究对象。极限是高等数学的基本概念，极限方法是高等数学的基本方法，高等数学的许多基本概念都是由极限定义的，如连续、导数、定积分等。函数的连续性是高等数学所研究的函数的基本要求，也是现实生活中大量自然现象的数学表现，如气温的变化、树木的生长等。

1.1 函数

1.1.1 函数的定义

定义 1.1 设 D 为非空数集，如果存在对应关系 f ，使得对 D 中的任意一个数 x ，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在数集 D 上的函数，记为： $y = f(x)$ ， $x \in D$ 。称 x 为自变量， y 为因变量，数集 D 称为函数 f 的定义域，实数 y 称为函数 f 在 x 处的函数值，全体函数值所组成的集合称为函数 f 的值域，记为： $f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 。

在函数定义中，定义域和对应关系是函数的两要素，两个函数只要定义域与对应关系一样，就认为是同一函数，与变量符号无关。如函数 $y = \sqrt{x^2}$ ， $x \in (-\infty, +\infty)$ 和函数 $s = |t|$ ， $t \in (-\infty, +\infty)$ 就表示同一函数。

函数的表示一般有解析式法、表格法和图像法。其中解析式法是高等数学最常用的表示法。函数的定义域，如果是实际问题，则需根据其实际意义来确定其定义域，如位移函数 $s = s(t)$ ，其定义域一般为 $D = [0,$

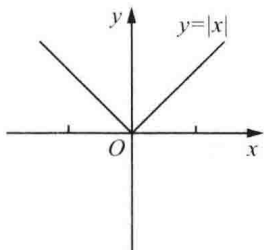


图 1-1

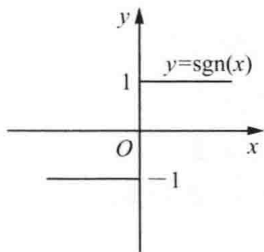


图 1-2

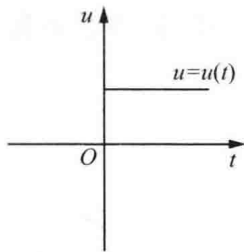


图 1-3

$+\infty$); 如果不考虑函数的实际意义, 只抽象的研究函数, 则函数的定义域可以省略不写, 此时函数的定义域是指使得解析式有意义的全体实数. 如函数 $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$, 其定义域为 $[-2, 1) \cup (1, 2]$.

如果函数在定义域中的不同范围有不同的解析式, 我们称这样的函数为分段函数. 分段函数在高等数学中是非常重要的, 它是许多命题的试金石.

下面我们给出几个重要的分段函数.

例 1-1 绝对值函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ (如图 1-1).

例 1-2 符号函数 $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ (如图 1-2).

例 1-3 单位跃价函数 $u = u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ (如图 1-3).

定义 1.2 若两个函数 $y = f(u)$, $u \in U$ 和 $u = \varphi(x)$, $x \in D$, 满足: $\varphi(D) = \{u | u = \varphi(x), x \in D\} \cap U \neq \emptyset$, 则对应 D 中的任意一个实数 x , 通过 u , 都有唯一的一个实数 y 与之对应, 这就定义了一个新的函数, 称这个函数为 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 构成的复合函数, 记为: $y = f[\varphi(x)]$, $x \in D$.

例如: 函数 $y = \ln(1+x^2)$ 就是由 $y = \ln u$, $u = 1+x^2$ 构成的复合函数; 函数 $y = \sqrt{\log_a \tan x}$ 就是由 $y = \sqrt{u}$, $u = \log_a v$, $v = \tan x$ 构成的复合函数.

定义 1.3 函数 $y = f(x)$, $x \in D$ 满足: 对于值域 $f(D)$ 中的每一个实数 y , 在 D 中都有唯一的一个实数 x , 使得 $f(x) = y$. 则按此对应关系就定义了一个在 $f(D)$ 上的新函数, 称为 $y = f(x)$ 的反函数, 记作: $x = f^{-1}(y)$, $y \in f(D)$.

由反函数定义可得, 函数 $y = f(x)$ 存在反函数, 则 f 必须是 D 与 $f(D)$ 之间的一一对应关系. 如函数 $y = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 不存在反函数, 因为这不是一一对应关系; 而函数 $y = x^2$, $x \in [0, +\infty)$ 就存在反函数 $x = \sqrt{y}$, $y \in [0, +\infty)$.

习惯上, 我们仍然用 x 表示自变量, y 表示因变量, 记反函数为 $y=f^{-1}(x)$, $x \in f(D)$. 函数与其反函数的图像特征表现为在同一坐标系中关于直线 $y=x$ 对称(如图 1-4).

1.1.2 函数的基本性态

1. 单调性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, x_1, x_2 是区间 I 内的任意两点, 且 $x_1 < x_2$, 若 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $y=f(x)$ 是区间 I 上的增函数(减函数).

增函数、减函数统称为单调函数. 增函数的图像特征为当自变量从左向右变化时, 函数图像上升(如图 1-5), 减函数的图像特征为当自变量从左向右变化时, 函数图像下降(如图 1-6).

定理 1.1 如果函数 $y=f(x)$, $x \in D$ 为单调函数, 则该函数必有反函数 $x=f^{-1}(y)$, $y \in f(D)$, 且函数与其反函数的单调性一致.

证明 不妨设函数 $y=f(x)$, $x \in D$ 为增函数, 由定义 1.4 知, 对于任意的 $x_1, x_2 \in D$, 且 $x_1 < x_2$, 有 $y_1=f(x_1) < f(x_2)=y_2$, 因此, 对于 $y_1, y_2 \in f(D)$, 且 $y_1 < y_2$, 都有 $x_1=f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)=x_2$, 所以函数 $y=f(x)$, $x \in D$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$, $y \in f(D)$ 也是增函数、同理可以证明减函数的情形.

2. 奇偶性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称, 如果对应定义域中的任意一点 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$ ($f(-x) = f(x)$), 则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数(偶函数).

由奇函数的定义可知, 点 (x, y) 在曲线上, 则点 $(-x, -y)$ 也一定在曲线上, 所以奇函数的图像特征为关于原点对称(如图 1-7). 同理可知偶函数的图像特征为关于 y 轴对称(如图 1-8). 既不是奇函数也不是偶函数的函数称为非奇非偶函数.

例如: 可以验证 $y=x^4 \sin x^3$ 为奇函数, $y=x \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 为偶函数.

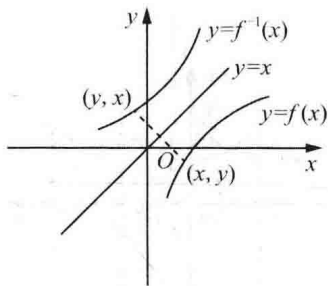


图 1-4

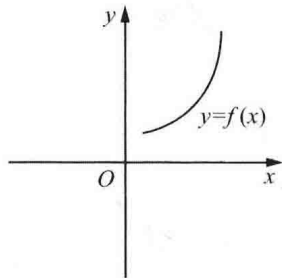


图 1-5

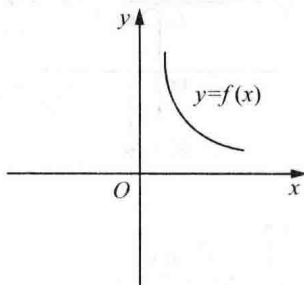


图 1-6

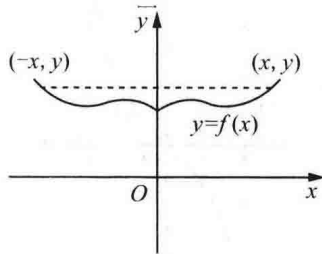
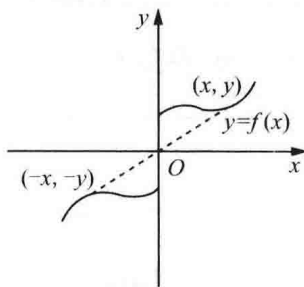


图 1-8

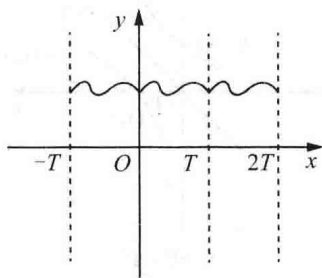


图 1-9

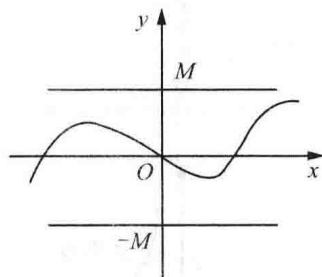


图 1-10

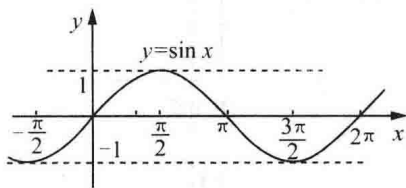


图 1-11

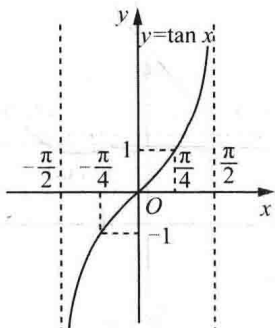


图 1-12

3. 周期性

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 存在正数 T , 使得对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都有 $f(x+T)=f(x)$, 则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数.

对于周期函数来说, 定义中的 T 有无穷多个, 因为 $f(x+T)=f(x)$, 则有 $f(x+kT)=f(x)$, $k \in \mathbb{Z}$ 都成立, 所以 kT 也是函数 $y=f(x)$ 的周期. 一般地, 在所有的这些数 T 中, 若存在一个最小的正数, 则称这个最小正数为周期函数的最小正周期, 简称周期. 周期函数的图像特征表现为在每个周期范围内, 函数图像一样 (如图 1-9).

例如: $y=\sin x$, $y=\tan x$ 的周期分别为 2π , π .

4. 有界性

定义 1.7 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若存在正数 M , 对于任意的 $x \in I$ 都有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有界, 或者说 $y=f(x)$ 是区间 I 上的有界函数. 否则, 就称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上无界, 即不论正数 M 多么大, 在区间 I 内总找得到这样的点 x , 使得 $|f(x)| > M$.

由定义知, 有界函数中任意的 $x \in I$, 都有一 $M \leq f(x) \leq M$, 有界函数的图像特征表现为夹在两条平行线 $y=\pm M$ 之间的曲线 (如图 1-10). 无界函数的图像特征表现为不论这两条平行线 $y=\pm M$ 离 x 轴有多远, 函数图像总能在某个地方延伸到平行线所夹条形区域以外.

例如: 函数 $y=\sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $|\sin x| \leq 1$, 函数 $y=\sin x$ 是区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的有界函数 (如图 1-11); 函数 $y=\tan x$ 是区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内的无界函数; 而函数 $y=\tan x$, $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 有 $|\tan x| \leq 1$, 所以函数 $y=\tan x$ 是区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的有界函数 (如图 1-12). 因此, 函数的有界性是与定义域相关的概念.

例 1-4 证明: 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内是无界函数.

证明 对于任意的正数 M , 都存在 $x = \frac{1}{M+1} \in (0, 1)$, 使得 $|f(x)| = M+1 > M$, 所以函数 $y = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$ 是无界函数(如图 1-13).

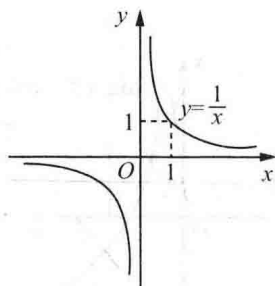


图 1-13

1.1.3 初等函数

在中学阶段, 我们学习过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数, 我们把这几个函数统称为**基本初等函数**. 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算得到的函数称为**初等函数**. 在我们高等数学所研究的函数中, 基本上都是初等函数. 前面介绍的分段函数一般就不是初等函数. 下面我们复习一些有关于基本初等函数的知识, 便于今后的学习.

1. 幂函数: $y = x^\alpha$ (α 为常数)

幂函数的定义域、单调性、奇偶性与 α 有关.

当 $\alpha \in \mathbf{Z}^+$ 时, 其定义域为 $\mathbf{R}$, 当 $\alpha \in \mathbf{Z}^-$ 时, 其定义域为 $\mathbf{R}$ 且不为 0.

当 $\alpha = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$ 时, 幂函数为偶函数, 当 $\alpha = 2k+1$, $k \in \mathbf{Z}$ 时, 幂函数为奇函数.

当 $\alpha > 0$ 时, 幂函数在 $(0, +\infty)$ 内是增函数, 当 $\alpha < 0$ 时, 幂函数在 $(0, +\infty)$ 内是减函数.

对于其他的一些情形, 这里不一一列举, 具体见图 1-14.

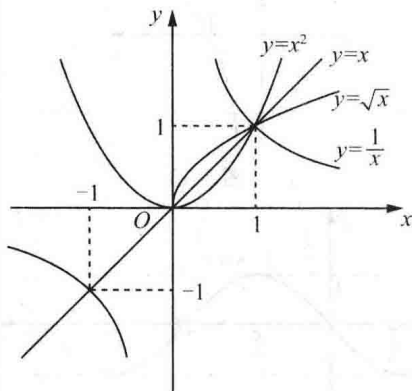


图 1-14

2. 指数函数: $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

指数函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都有 $a^x > 0$, 即指数函数的图像在 x 的上方, 且经过点 $(0, 1)$.

当 $0 < a < 1$ 时, 指数函数 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为减函数(如图 1-15), 当 $a > 1$ 时, 指数函数 $y = a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内为增函数(如图 1-16).

特别地, 当 $a = e = 2.718\ 281\ 8\cdots$ 指数函数 $y = e^x$ 称为自然指数函数, 自然指数函数在工程技术领域经常用到.

指数运算规律: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $a^x \div a^y = a^{x-y}$.

3. 对数函数: $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

对数函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 即对数函数的图

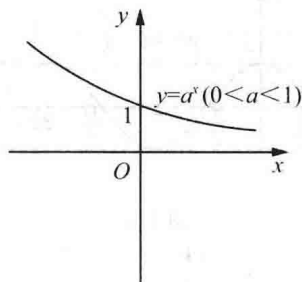


图 1-15

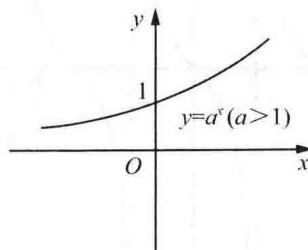


图 1-16

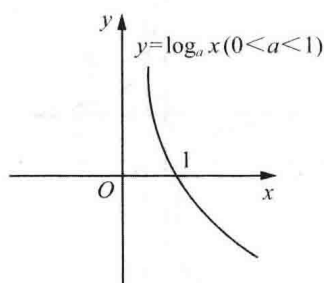


图 1-17

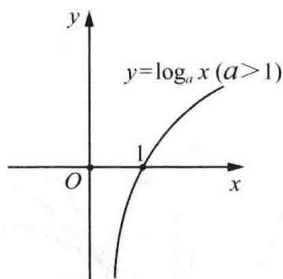


图 1-18

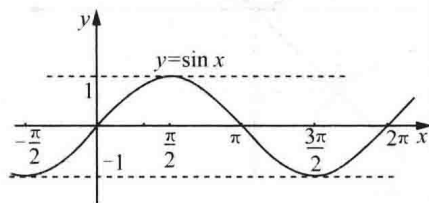


图 1-19

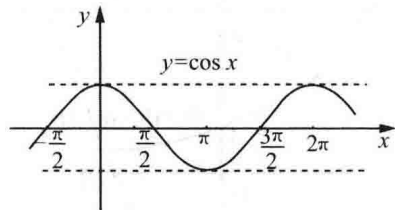


图 1-20

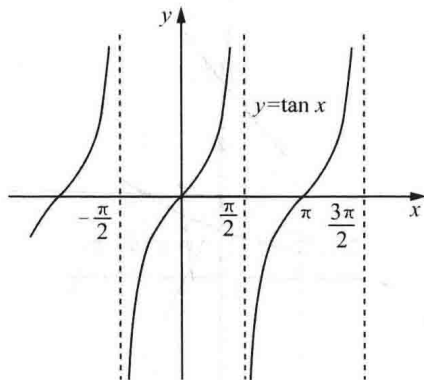


图 1-21

像在 y 轴的右边, 且经过点 $(1, 0)$.

当 $0 < a < 1$ 时, 对数函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 内为减函数(如图 1-17), 当 $a > 1$ 时, 对数函数 $y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 内为增函数(如图 1-18).

特别地, 当 $a = e = 2.718\ 281\ 8\cdots$, 对数函数 $y = \ln x$ 称为自然对数函数, 自然对数函数在工程技术领域也经常用到.

对数函数 $y = \log_a x$ 与指数函数 $y = a^x$ 互为反函数, 它们的图像关于直线 $y = x$ 对称.

对数运算规律: $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$,

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y},$$

$$\log_a x^b = b \log_a x, a^{\log_a x} = x, e^{\ln x} = x.$$

4. 三角函数

正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数和余割函数统称为三角函数.

正弦函数 $y = \sin x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 奇函数; 是以 2π 为周期的周期函数; 在区间 $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}) (k \in \mathbf{Z})$ 为增函数, 在区间 $(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}) (k \in \mathbf{Z})$ 为减函数; 且有 $|\sin x| \leq 1$, 正弦函数为有界函数(如图 1-19).

余弦函数 $y = \cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 偶函数; 是以 2π 为周期的周期函数; 在区间 $(2k\pi, 2k\pi + \pi) (k \in \mathbf{Z})$ 为减函数, 在区间 $(2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi) (k \in \mathbf{Z})$ 为增函数; 且有 $|\cos x| \leq 1$, 余弦函数为有界函数(如图 1-20).

正切函数 $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, 其定义域为 $\{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{ 且 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$; 函数为奇函数; 是以 π 为周期的周期函数; 在区间 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}) (k \in \mathbf{Z})$ 为增函数(如图 1-21).

余切函数 $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, 其定义域为 $\{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{ 且 } x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$; 函数为奇函数; 是以 π 为周期的周期函数; 在区间 $(k\pi, k\pi + \pi) (k \in \mathbf{Z})$ 为减函数(如图 1-22).

正割函数 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ 、余割函数 $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$ 的性质可类似讨论, 函数图像分别见图 1-23、图 1-24.

关于三角函数有以下恒等式.

平方关系: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x,$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x.$$

两角和与差: $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$,

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

二倍角: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x,$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

万能公式: $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$, $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$,

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

积化和差: $\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$,

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)],$$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)].$$

和差化积: $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$,

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

5. 反三角函数

反三角函数包括反正弦函数、反余弦函数、反正切函数和反余切函数.

反正弦函数 $y = \arcsin x$, 是正弦函数 $y = \sin x$,

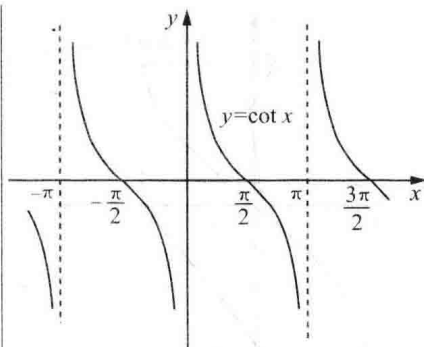


图 1-22

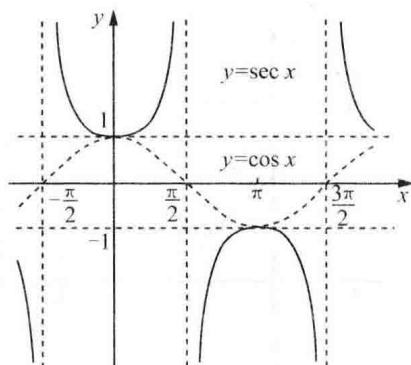


图 1-23

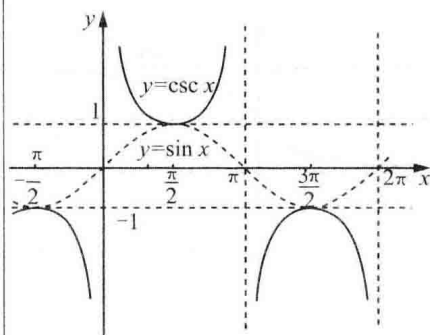


图 1-24

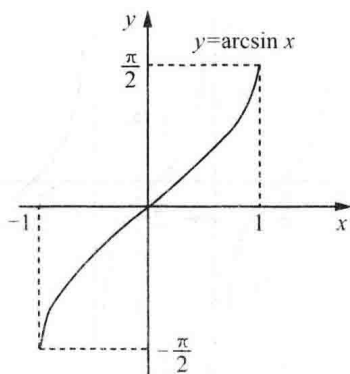


图 1-25

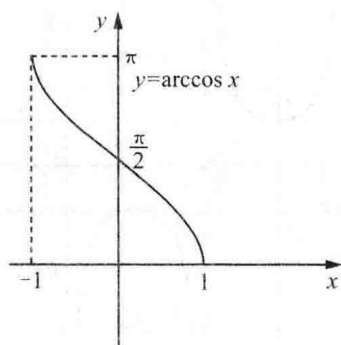


图 1-26

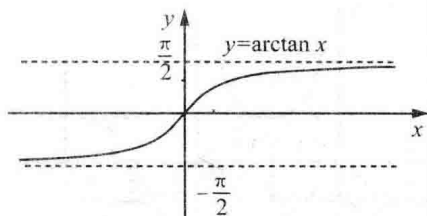


图 1-27

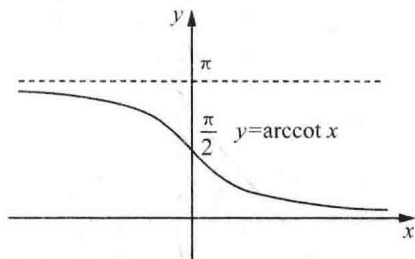


图 1-28

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数. 它的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 反正弦函数为奇函数, 在定义域内为增函数(如图 1-25).

反余弦函数 $y = \arccos x$, 是余弦函数 $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ 的反函数. 它的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$, 在定义域内为减函数(如图 1-26).

反正切函数 $y = \arctan x$, 是正切函数 $y = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数. 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 反正切函数为奇函数, 在定义域内为增函数(如图 1-27).

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$, 是余切函数 $y = \cot x$, $x \in (0, \pi)$ 的反函数. 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $x \in (0, \pi)$, 在定义域内为减函数(如图 1-28).

习 题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{x^2}{x-1};$$

$$(2) y = \sqrt{3x-x^2};$$

$$(3) y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}};$$

$$(4) y = \ln \frac{1}{1-x} + \sqrt{x+2};$$

$$(5) y = f(x^2+1), \text{ 其中 } f(x) \text{ 的定义域为 } [1, 2];$$

$$(6) y = f(\sin x) + f(\ln x), \text{ 其中 } f(x) \text{ 的定义域为 } [0, 1].$$

2. 求对应函数解析表达式.

$$(1) f(x) = \frac{1}{1-x}, \text{ 求 } f[f(x)] \text{ 和 } f\{f[f(x)]\};$$

$$(2) f\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2x^2-2x+1} (x \neq 0), \text{ 求 } f(x);$$

$$(3) \text{ 已知 } f(x) \text{ 是二次多项式, 且 } f(x+1) - f(x) = 8x+3, \text{ 求 } f(x);$$

$$(4) \text{ 已知 } f(\sin x) = \cos 2x + 1, \text{ 求 } f(\cos x).$$

3. 判断下列函数的奇偶性.

$$(1) y = \frac{a^x - a^{-x}}{2} (a > 1);$$

$$(2) y = \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(3) y = \cos(\sin x);$$

$$(4) y = x^3 + 3x^2 + 7x;$$

$$(5) y = \ln(x + \sqrt{1+x^2});$$

$$(6) y = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1} (a > 1).$$

4. 指出下列函数的复合过程.

$$(1) y = \cos 5x;$$

$$(2) y = A \sin^2(\omega x + \varphi);$$

$$(3) y = a^{1-x};$$

$$(4) y = e^{\sin 3x};$$

$$(5) y = \ln(\arctan \sqrt{1+x^2});$$

$$(6) y = \frac{1}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}.$$

5. 证明函数 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 在定义区域内为有界函数.

6. 证明函数 $y = \frac{x}{1-x^2}$ 在 $(-1, 1)$ 内是无界函数.

7. 在半径为 r 的球内嵌入一个内接圆柱, 试将圆柱的体积 V 表示为其高 h 的函数.

8. 设火车从甲站出发, 以 0.5 km/min^2 的加速度匀加速前进, 经过 2 min 后开始匀速行驶, 再经过 7 min 后以 0.5 km/m^2 加速度匀减速到达乙站, 试将火车在这段时间内所行驶的路程 s 表示为时间 t 的函数.

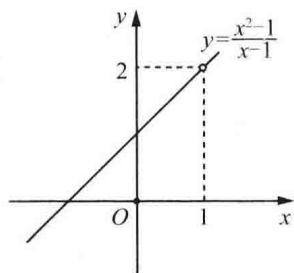


图 1-29

电子课件

函数极限

教学视频

函数极限

1.2 函数极限与数列极限

1.2.1 函数极限的定义

我们在中学简单介绍过函数极限的定义：当自变量 x 无限接近于常数 x_0 但不等于 x_0 时，函数值 $f(x)$ 会无限接近常数 A ，那么就称 A 是函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限，记作为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。这样的定义是描述性的，并不严谨，无限接近是指接近到什么程度呢？

我们先来看一个引例： $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ (如图 1-29)。

当 x 无限接近 1 但不等于 1 时， $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$

1. 我们知道，两点间的距离可以用绝对值来表示，且有 $|f(x) - 2| = |x - 1|$ ，如表 1-1 所示。

表 1-1

$ f(x) - 2 < \epsilon$	$ x - 1 < \delta$
$\epsilon = 0.1$	$\delta = 0.1$
$\epsilon = 0.01$	$\delta = 0.01$
$\epsilon = 0.000\ 1$	$\delta = 0.000\ 1$
ϵ 为任意正数	存在 $\delta = \epsilon$

可以看出，当 x 无限接近 1 时 (δ 越小)，函数值 $f(x)$ 就无限接近 2 (ϵ 越小)。或者说，要 $|f(x) - 2| < \epsilon$ (ϵ 为任意正数，不论多么小)，只要取 $\delta = \epsilon$ ，当 $|x - 1| < \delta$ 时，就能保证 $|f(x) - 2| < \epsilon$ 成立。

这样就引出了函数极限的“ $\epsilon - \delta$ ”定义：

定义 1.8 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的 δ_0 空心邻域 $U^\circ(x_0, \delta_0)$ 有定义，如果存在常数 A ，对于任意的正数 $\epsilon > 0$ ，总存在正数 $\delta_0 > \delta > 0$ ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，都有 $|f(x) - A| < \epsilon$ ，那么就称函数 $f(x)$ 在 x_0 处极限存在， A 是函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限，记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A, (x \rightarrow x_0)$ 。

一定义 1.8 也可简单记为：

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 都有 } |f(x) - A| < \epsilon.$