国家理科基地大学数学系列教材

线性代数

第二版

陈绍林　唐道远　主编

科学出版社

国家理科基地大学数学系列教材

线性代数

（第二版）

陈绍林　唐道远　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书根据国家教育部关于工科类本科数学基础课程教学的要求编写，也是作者多年讲授线性代数课程的经验总结.

本书共5章，包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性及向量空间、线性方程组、相似矩阵与二次型．“线性代数”课程的特点是概念多，公式多，逻辑性强．本书保持了线性代数经典的内容和传统的体系，叙述通俗易懂，论证简明扼要．为便于学生自学，各章除编入适当的例题和适量的习题外，书末还附有两套综合练习，供学生复习阶段自检使用.

本书可以作为高等学校工科类各专业的本、专科生“线性代数”课程的教材，也可以供工科类各专业本科生、硕士生及高等学校相关教师参考.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/陈绍林，唐道远主编．—2版．—北京：科学出版社，2017.11
国家理科基地大学数学系列教材
ISBN 978-7-03-055696-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①陈… ②唐… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第293327号

责任编辑：吉正霞 曾 莉／责任校对：董艳辉
责任印制：彭 超／封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉市首壹印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2014年10月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2017年11月第 二 版 印张：10 1/2
2017年11月第一次印刷 字数：249 000

定价：28.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

第二版前言

本书第一版自 2014 年出版以来，广大读者和将本书作为教材的同行们，对该书的编写体系是认同的. 用矩阵的秩给出线性方程组解的判定以及齐次线性方程求得基础解系，并将非齐次与齐次线性方程组通解的求法步骤统一起来，使线性方程组的理论讨论和具体求解变得简便和易于掌握. 为此，在这次修订时，仍然保留了原有的体系.

在第二版中，除了对第一版中印刷的错误作了校正外，还根据作者这几年的教学实践结合反馈的信息，重点作了如下修订工作：

一、将第二章中“行阶梯形矩阵”定义第二条“各非零行的第一个不为零的元素(称为行首非零元)的列标不小于行标”修订为“各非零行的第一个不为零的元素(称为行首非零元)的列标严格递增不小于行标”. 使修订后的定义更为严谨.

二、统一解线性方程组的步骤. 即将第五章中方阵的特征向量求解过程中求齐次方程组的一个基础解系统一按第四章中齐次方程组一个基础解系的解法步骤作了修订，使前后一致，计算规范.

本次修订，主要由陈绍林、唐道远完成.

作者

2017 年 10 月

第一版前言

线性代数是代数学的一个分支，主要处理离散的线性关系问题. 线性关系是指数学对象之间的关系是以一次形式来表达的. 含有 n 个未知量的一次方程称为线性方程，关于变量是一次的函数称为线性函数，线性关系问题简称为线性问题，解线性方程组的问题是最简单的线性问题. 作为一个独立的分支，线性代数在 20 世纪才形成，但这一学科的历史却源远流长. 最古老的线性问题是线性方程组的解法，在中国古代的数学著作《九章算术》"方程"一章中，就已经有了比较完整的叙述，其中所述方法相当于对方程组的增广矩阵的行施行初等变换，消去未知量的方法. 线性代数的含义随数学的发展而不断扩大，线性代数的理论和方法渗透到了数学的许多分支. 线性代数在工程技术和国民经济的许多领域都有着广泛的应用. 现在，由于电子计算机技术的飞速发展和广泛应用，线性代数已经成为广大科技工作者不可或缺的数学工具. 因而"线性代数"是我国理工科高等学校各专业本科生及专科生必修的重要基础课程，线性代数也是硕士研究生入学考试必考的内容之一，约占数学考试内容的 20%.

依照国家教育部关于工科类本科数学基础课程教学的基本要求，为适应教材建设和教学实际的需要，我们编写了《线性代数》新教材. 全书共分 5 章，依次为行列式、矩阵、向量组的线性相关性及向量空间、线性方程组、相似矩阵与二次型. "线性代数"这门数学课程的特点是概念多、公式多、逻辑性强，这一学科是理工科学生进行抽象思维、逻辑推理训练最强的一门课程. 根据作者多年讲授线性代数课程的实践，针对学生中普遍感觉该课程内容抽象、不易理解和掌握的状况，本教材在保持线性代数的经典内容和传统体系的基础上，力求做到叙述通俗易懂，论证简明扼要. 为便于学生自学，除各章编入适当的例题和适量的习题(其中选用部分历年研究生入学考试的经典试题)外，书末还附有两套综合练习，供学生复习阶段自检使用.

本书由陈绍林、唐道远、卞兰芸、李海霞集体编写. 其中李海霞负责第 1 章，卞兰芸负责第 2 章，陈绍林负责第 3～4 章，唐道远负责第 5 章. 全书由陈绍林、唐道远统稿.

在编写过程中，我们参阅了国内外相关教材和专著，在此对相关作者深表感谢！并对一直关心和支持本教材出版的同仁和老师们表示衷心的感谢！由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请专家、同仁和读者批评指正.

作　者

2014 年 9 月

目　　录

第1章 行列式

行列式是研究线性代数的一个重要工具,在数学的其他分支中也有重要作用.本章中心议题为行列式.围绕这个议题,先介绍二阶、三阶行列式,再给出 n 阶行列式的定义及性质,最后作为行列式的应用,给出解线性方程组的克拉默法则.

1.1 二阶与三阶行列式

1.1.1 二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & ② \end{cases} \tag{1.1.1}$$

将方程组(1.1.1)的式②乘 a_{11} 减去式①乘 a_{21} 即可消去未知数 x_1,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

用类似的方法消去 x_2,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,求得方程组(1.1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.1.2}$$

为了便于记忆上述公式,引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \xlongequal{\triangle} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1.3}$$

(符号"$\xlongequal{\triangle}$"表示规定或记作),这样规定的

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式,其中横的为行,竖的为列,二阶行列式有 2 行 2 列.数 a_{ij} $(i=1,2;$ $j=1,2)$ 称为行列式(1.1.3)的元素或元.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行;第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列.位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(1.1.3)的 (i,j) 元.

笔记栏

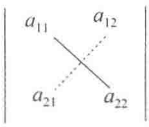

图 1.1.1

式(1.1.3)定义的二阶行列式,可以用对角线法则来记忆.如图 1.1.1所示,把 a_{11} 到 a_{22} 的实线称为主对角线,a_{12} 到 a_{21} 的虚线称为副对角线,于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差(左上、右下两元素乘积取正号,右上、左下两元素乘积取负号).

利用二阶行列式的记号,式(1.1.2)中 x_1,x_2 的分子也可以写成二阶行列式,分别记为 D_1,D_2,即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

方程组(1.1.1)的解式(1.1.2)可以写为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

于是有了下述求方程组(1.1.1)解的法则,如果方程组(1.1.1)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

则解为 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$ $(j=1,2)$,其中 $D_j(j=1,2)$为行列式 D 的第 j 列被方程组(1.1.1)右端常数项替换后的行列式.

例 1.1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1+5x_2=0 \\ 3x_1-\ x_2=6 \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-19\neq 0,\quad D_1=\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}=-30,\quad D_2=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=24$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{30}{19},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{24}{19}$$

1.1.2 三阶行列式

定义 1.1.1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.1.4}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.1.5}$$

笔记栏

式(1.1.5)称为数表(1.1.4)所确定的**三阶行列式**.

这样,对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.1.6}$$

若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

则方程组(1.1.6)有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中 D_j $(j=1,2,3)$为行列式 D 的第 j 列被方程组(1.1.6)右端常数项替换后的行列式.

上述定义的三阶行列式是一个实数,式(1.1.5)中的每项均为不同行不同列的 3 个元素的乘积再冠以正负号,其中 3 项取正号、3 项取负号,共 6 项,其计算遵循图 1.1.2 中的法则:先将行列式的第 1 列、第 2 列依次摆在行列式第 3 列的右边成第 4 列、第 5 列,其中实线上三元素的乘积的项(即从左上到右下三元素乘积)取正号,而虚线上三元素的乘积的项(即从右上到左下三元素乘积)取负号,D 就是这 6 项的和.

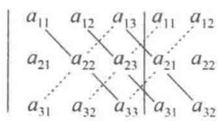

图 1.1.2

例 1.1.2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解 按计算三阶行列式的法则

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} D &= 1\times 1\times(-1) + (-1)\times 2\times 1 + (-1)\times 2\times 1 - (-1)\times 1\times 1 \\ &\quad - 1\times 2\times 1 - (-1)\times 2\times(-1) = -8 \end{aligned}$$

例 1.1.3 求解方程

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2 & -1 \\ 2 & x+1 & 1 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

解 方程左端的三阶行列式

$$\begin{aligned} D &= (x+1)^3 - 2 - 2 - (x+1) - (x+1) - 4(x+1) \\ &= (x+1)^3 - 6(x+1) - 4 \end{aligned}$$

笔记栏

由$(x+1)^3-6(x+1)-4=0$,解得$x_1=-3, x_2=\sqrt{3}, x_3=-\sqrt{3}$.

上述计算行列式的法则只适合于二阶与三阶行列式,四阶以上的高阶行列式下面先给出定义.

1.2 $\boldsymbol{n}$ 阶行列式

1.2.1 全排列及逆序数

在给出 n 阶行列式的定义之前,先介绍排列和逆序.

例 1.2.1 用 1,2,3 三个数字,可以组成多少个数字不重复的三位数?

这个答案是 $3!=6$ 个.

这 6 个不同的三位数是 123,132,213,231,312,321.

通常把考察的对象称为元素,例 1.2.1 中就是把 3 个不同的元素排成一列,共有 6 种不同的排法问题.

一般地,把 n 个不同的元素排成一列,共有几种不同的排法? 这里给出如下定义.

定义 1.2.1 把 n 个不同的元素排成一列,称为这 n 个元素的**全排列**(简称排列).

n 个不同元素的所有排列的种数记为 P_n,P_n 可以作如下计算:

从 n 个元素中任取一个放在第 1 个位置上,有 n 种取法;又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取 1 个放在第 2 个位置上,有 $n-1$ 种取法;如此继续下去,直到最后只剩 1 个元素放在第 n 个位置上,只有 1 种取法,由乘法原理,得

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

如例 1.2.1 中 $P_3=3\times2\times1=3!=6$.

对于 n 个不同的元素的 n 级全排列规定一个标准排列(例如 n 个不同的自然数,可以规定由小到大的排列为标准排列).

定义 1.2.2 在 n 个元素的任一排列中,当某两个元素的先后次序与标准排列不同时,就称为有 1 个逆序. 一个排列中所有逆序的总数称为该排列的**逆序数**.

定义 1.2.3 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数或零的排列称为**偶排列**,标准排列为偶排列.

如排列 54321 中 54 为一个逆序,该排列的逆序数为 10. 故该排列为偶排列.

对于一个 n 级排列的逆序数,可以这样求:

设 $i_1 i_2\cdots i_n$ 为 n 个自然数的一个排列,考虑 i_k $(k=1,2,\cdots,n)$,若比 i_k 大且排在 i_k 左边的元素有 t_k 个,就说 i_k 这个元素的逆序数是 t_k,所有元素的逆序数之总和

$$\tau = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{k=1}^{n} t_k \tag{1.2.1}$$

为该排列的逆序数.

因此,一个排列的逆序数由其中每一个元素的逆序个数相加得到.

例 1.2.2 求排列 34215 的逆序数.

解 3 排在最前面,3 前面没有数,故其逆序数为 0,$t_1=0$.

4 前面只有 3,也没有比 4 大的数,故其逆序数为 0,$t_2=0$.

2 前面比 2 大的数有 2 个(3,4),故其逆序数为 2,$t_3=2$.

1 前面比 1 大的数有 3 个(3,4,2),故其逆序数为 3,$t_4=3$.

5 最大,前面没有比 5 大的,故其逆序数为 0,$t_5=0$.

于是该排列的逆序数为 $\tau=0+0+2+3+0=5$.

1.2.2 n 阶行列式的定义

二阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.2.2}$$

(1) 每一项都是不同行不同列两个元素的乘积;

(2) 正、负项各一半;

(3) 行标为标准排列,则列标为偶排列的项取正号,而列标为奇排列的项取负号.

三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.2.3}$$

从中可以看出:

(1) 三阶行列式共 3! =6 项.

(2) 式(1.2.3)右边的每一项恰是位于不同行不同列 3 个元素的乘积,故式(1.2.3)右边的任意项除正、负号外可以统写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 或 $a_{p_1 1}a_{p_2 2}a_{p_3 3}$.

(3) 当行标为标准排列时:

取正号的三项列标排列是 123,231,312,为偶排列;

取负号的三项列标排列是 132,213,321,为奇排列.

故各项所取的正、负号可以表示为$(-1)^t$,其中 t 是列标排列的逆序数.

三阶行列式用和式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1.2.4}$$

其中 t 为排列 $j_1j_2j_3$ 的逆序数,$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

推广到一般有 n 阶行列式的定义.

定义 1.2.4 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的表(横排为行,纵排为列)

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^{\tau}$ 得到形如

$$(-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.2.5}$$

的项,其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,τ 为这个排列的逆序数,由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如式(1.2.5)的项共有 $n!$ 项,所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.2.6}$$

称为 **n 阶行列式**,记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.2.7}$$

即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.2.8}$$

其中 $\sum$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ (n 个数)的所有 n 级排列 $j_1 j_2 j_3 \cdots j_n$ 取和.

行列式 D 可简记为 $\det(a_{ij})$,数 a_{ij} 称为行列式 D 的元素.

当 $n=1$ 时,$|a|=a$,注意不要与绝对值记号相混淆.

例 1.2.3 证明:对角形行列式(其中对角线上的元素是 λ_i,未写出的都是 0)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \quad \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

证 由定义 1.2.4,第 1 式显然成立,证明第 2 式.

记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$,则由行列式的定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\tau} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

笔记栏

因为在 n 个元素中,若有一个以上元素不在对角线上取,则所取到的元素至少有一个为 0,这 n 个元素的乘积也为 0,因此,除了

$$(-1)^{\tau}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} == (-1)^{\tau}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

这一项外,其余($n!\ -1$)项均为 0.

其中 τ 为排列 $n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$ 的逆序数,故

$$\tau = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

称对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式为上(下)三角行列式.

例 1.2.4 证明:下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证 由于当 $j>i$ 时(列标大于行标),$a_{ij}=0$,故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ij_i} 的下标应为 $j_i\leqslant i$,即 $j_1\leqslant 1, j_2\leqslant 2,\cdots,j_n\leqslant n$.

对自然数来说,$j_1\leqslant 1$ 即 $j_1=1$,取过 $j_1=1$ 后,只能取 $j_2=2$……一般地 j_i 只能取 i,即 $j_i=i\ (i=1,2,\cdots,n)$. 因此在所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中,能满足上述关系的排列只有自然排列 $1\ 2\ \cdots\ n$,所以在 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$,此时 $\tau=0$,符号取“+”.

故 $D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$(对角线元素的乘积).

用类似的方法,可以证明上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & b_{nn} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}$$

1.3 对换及行列式的性质

先讨论对换以及对换与排列的奇偶性的关系.

1.3.1 对换

定义 1.3.1 将一个排列中的任意两个元素对调,其余的元素不动,这种作出新排列的手续称为**对换**.

将相邻两个元素对调,称为相邻对换.

下面讨论对换与排列奇偶性的关系.

定理 1.3.1 一个排列中的任意两个元素对调,排列改变奇偶性. 即对某排列每经过一个对换,就改变一次排列的奇偶性.

笔记栏

推论 1.3.1 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数,偶排列调成标准排列的对

换次数为偶数.

证 由定理 1.3.1 知对换的次数就是排列奇偶性变化的次数,而标准排列是偶排列,因此推论成立.

利用定理 1.3.1,可以推出 n 阶行列式定义的另一种表示法.

定理 1.3.2 n 阶行列式也可以定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n} \tag{1.3.1}$$

其中 τ 为行标排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

即行列式也可以用每一项元素的列标为标准排列,而行标 $j_1j_2\cdots j_n$ 为正整数 1, 2,…,n 的一个 n 级排列来定义.

1.3.2 行列式的性质

定义 1.3.2 记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1.3.1 行列式与其自身的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 记 D 的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ij}=a_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$,按定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{\tau}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}=\sum(-1)^{\tau}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}$$

由定理 1.3.2,$D=\sum(-1)^{\tau}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}$,故 $D^{\mathrm{T}}=D$.

由性质 1.3.1 知,行列式中的行与列具有同等地位,凡是对行成立的性质,对列也同样成立;反之亦然.

性质 1.3.2 互换行列式的两行(列),行列式变号.

证 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 交换 l,m 两行得到的，即当 $k\neq l,m$ 时，$b_{kj}=a_{kj}$，当 $k=l,m$ 时，$b_{lj}=a_{mj}$，$b_{mj}=a_{ij}$. 由定义

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^t b_{1j_1}\cdots b_{lj_l}\cdots b_{mj_m}\cdots b_{nj_n} = \sum(-1)^t a_{1j_1}\cdots a_{mj_l}\cdots a_{lj_m}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum(-1)^\tau a_{1j_1}\cdots a_{lj_m}\cdots a_{mj_l}\cdots a_{nj_n} \quad (\text{交换}) \end{aligned}$$

其中 $1\cdots l\cdots m\cdots n$ 为标准排列，τ 为排列 $j_1\cdots j_l\cdots j_m\cdots j_n$ 的逆序数，若记排列 $j_1\cdots j_m\cdots j_l\cdots j_n$ 的逆序数为 τ_1，则 $(-1)^\tau=-(-1)^{\tau_1}$，故

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum\left[-(-1)^{\tau_1} a_{1j_1}\cdots a_{lj_m}\cdots a_{mj_l}\cdots a_{nj_n}\right] \\ &= -\sum(-1)^{\tau_1} a_{1j_1}\cdots a_{lj_m}\cdots a_{mj_l}\cdots a_{nj_n} = -D \end{aligned}$$

交换 D 中的 i,j 两行记为 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 D 中的 i,j 两列记为 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 1.3.2 如果行列式有两行(列)完全相同，则该行列式为 0.

证 互换相同的两行，由性质 1.3.2，$D=-D$，即 $2D=0$，故 $D=0$.

性质 1.3.3 行列式中某一行(列)中有公因数 k，则 k 可以提取到行列式符号的外面(第 i 行提出公因子 k，记为 $r_i\div k$). 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{ii} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1.3.2)$$

性质 1.3.3 说明，行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘以该行列式(第 i 行乘以 k，记为 $r_i\times k$). 性质 1.3.3 可以用定义进行证明.

推论 1.3.3 行列式中如果一行(列)的所有元素全为 0，则该行列式为 0.

性质 1.3.4 行列式如果有两行(列)元素对应成比例，则该行列式为 0.

如 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0$.

性质 1.3.5 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和(如第 i 列的元素都是两数之和)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a'_{1i}+a_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a'_{2i}+a_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a'_{ni}+a_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两行列式之和，即