



教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会规划教材
高等学校电子信息类专业系列教材

信息与通信工程

Digital Signal Processing: Learning Guide and Problem Solution

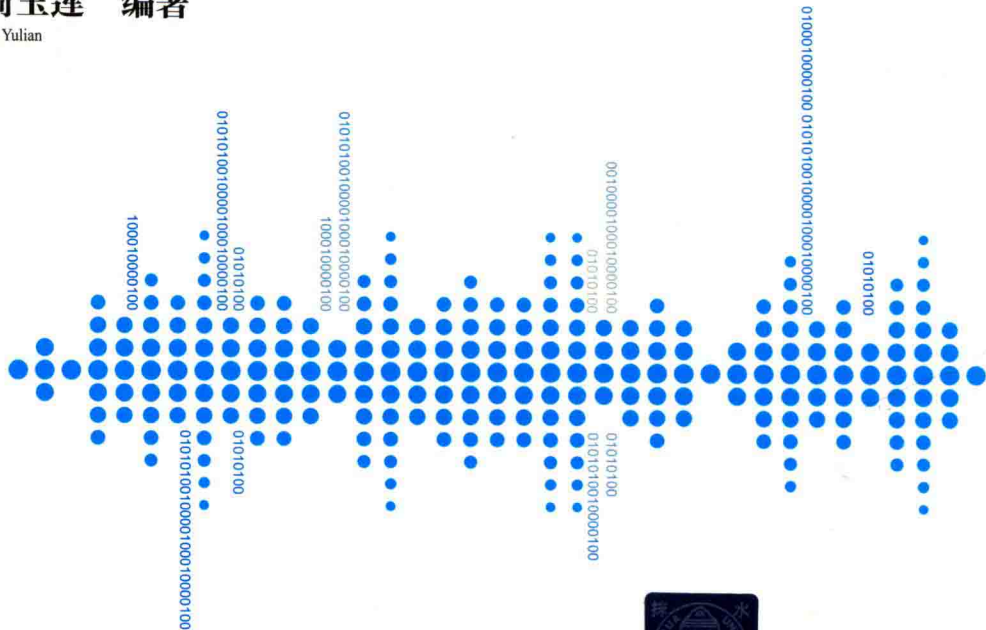
数字信号处理原理 和算法实现

(第3版)

学习指导与习题解答

李莉 胡之惠 俞玉莲 编著

Li Li Hu Zhihui Yu Yulian



清华大学出版社

非外借



教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会规划教材
高等学校电子信息类专业系列教材

Digital Signal Processing: Learning Guide and Problem Solution

数字信号处理原理 和算法实现

(第3版)

学习指导与习题解答

李莉 胡之惠 俞玉莲 编著

Li Li Hu Zhihui Yu Yulian

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是《数字信号处理原理和算法实现(第3版)》(李莉主编,清华大学出版社,以下简称“教材”)一书的配套辅导材料,与教材各章对应,又相对独立。除绪论外,其余各章分“重点内容”和“习题解答”两部分。“重点内容”部分简要归纳了教材各章的主要内容、应掌握的基本概念和算法。“习题解答”部分给出了教材习题的详细参考解答,对进一步理解和巩固所学理论、提高分析解决问题的能力有很大帮助。

本书可作为通信工程、电子信息、计算机应用技术、自动控制等相关专业本科生教学用书,也可作为教师教学和从事数字信号处理工作的工程技术人员的参考书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理原理和算法实现(第3版)学习指导与习题解答/李莉,胡之惠,俞玉莲编著. —北京:清华大学出版社,2019

(高等学校电子信息类专业系列教材)

ISBN 978-7-302-50025-4

I. ①数… II. ①李… ②胡… ③俞… III. ①数字信号处理—高等学校—教学参考资料
IV. ①TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 081269 号

责任编辑:梁 颖

封面设计:李召霞

责任校对:焦丽丽

责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课件下载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 装 者:北京富博印刷有限公司

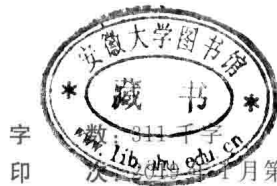
装 订 者:北京市密云县京文制本装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:12.75

版 次:2019年1月第1版

定 价:39.00元



字 数:311千字
印 次:2019年1月第1次印刷

产品编号:078380-01

高等学校电子信息类专业系列教材

一 顾问委员会

谈振辉	北京交通大学 (教指委高级顾问)	郁道银	天津大学 (教指委高级顾问)
廖延彪	清华大学 (特约高级顾问)	胡广书	清华大学 (特约高级顾问)
华成英	清华大学 (国家级教学名师)	于洪珍	中国矿业大学 (国家级教学名师)
彭启琮	电子科技大学 (国家级教学名师)	孙肖子	西安电子科技大学 (国家级教学名师)
邹逢兴	国防科技大学 (国家级教学名师)	严国萍	华中科技大学 (国家级教学名师)

一 编审委员会

主 任	吕志伟	哈尔滨工业大学		
副主任	刘 旭	浙江大学	王志军	北京大学
	隆克平	北京科技大学	葛宝臻	天津大学
	秦石乔	国防科技大学	何伟明	哈尔滨工业大学
	刘向东	浙江大学		
委 员	王志华	清华大学	宋 梅	北京邮电大学
	韩 焱	中北大学	张雪英	太原理工大学
	殷福亮	大连理工大学	赵晓晖	吉林大学
	张朝柱	哈尔滨工程大学	刘兴钊	上海交通大学
	洪 伟	东南大学	陈鹤鸣	南京邮电大学
	杨明武	合肥工业大学	袁东风	山东大学
	王忠勇	郑州大学	程文青	华中科技大学
	曾 云	湖南大学	李思敏	桂林电子科技大学
	陈前斌	重庆邮电大学	张怀武	电子科技大学
	谢 泉	贵州大学	卞树檀	火箭军工程大学
	吴 瑛	解放军信息工程大学	刘纯亮	西安交通大学
	金伟其	北京理工大学	毕卫红	燕山大学
	胡秀珍	内蒙古工业大学	付跃刚	长春理工大学
	贾宏志	上海理工大学	顾济华	苏州大学
	李振华	南京理工大学	韩正甫	中国科学技术大学
	李 晖	福建师范大学	何兴道	南昌航空大学
	何平安	武汉大学	张新亮	华中科技大学
	郭永彩	重庆大学	曹益平	四川大学
	刘缠牢	西安工业大学	李儒新	中国科学院上海光学精密机械研究所
	赵尚弘	空军工程大学	董友梅	京东方科技集团股份有限公司
	蒋晓瑜	陆军装甲兵学院	蔡 毅	中国兵器科学研究院
	仲顺安	北京理工大学	冯其波	北京交通大学
	黄翊东	清华大学	张有光	北京航空航天大学
	李勇朝	西安电子科技大学	江 毅	北京理工大学
	章毓晋	清华大学	张伟刚	南开大学
	刘铁根	天津大学	宋 峰	南开大学
	王艳芬	中国矿业大学	靳 伟	香港理工大学
	苑立波	哈尔滨工程大学		
丛书责任编辑	盛东亮	清华大学出版社		

序

FOREWORD

我国电子信息产业销售收入总规模在 2013 年已经突破 12 万亿元,行业收入占工业总体比重已经超过 9%。电子信息产业在工业经济中的支撑作用凸显,更加促进了信息化和工业化的高层次深度融合。随着移动互联网、云计算、物联网、大数据和石墨烯等新兴产业的爆发式增长,电子信息产业的发展呈现了新的特点,电子信息产业的人才培养面临着新的挑战。

(1) 随着控制、通信、人机交互和网络互联等新兴电子信息技术不断发展,传统工业设备融合了大量最新的电子信息技术,它们一起构成了庞大而复杂的系统,派生出大量新兴的电子信息技术应用需求。这些“系统级”的应用需求,迫切要求具有系统级设计能力的电子信息技术人才。

(2) 电子信息系统的功能越来越复杂,系统的集成度越来越高。因此,要求未来的设计者应该具备更扎实的理论基础知识和更宽广的专业视野。未来电子信息系统的设计越来越要求软件和硬件的协同规划、协同设计和协同调试。

(3) 新兴电子信息技术的发展依赖于半导体产业的不断推动,半导体厂商为设计者提供了越来越丰富的生态资源,系统集成厂商的全方位配合又加速了这种生态资源的进一步完善。半导体厂商和系统集成厂商所建立的这种生态系统,为未来的设计者提供了更加便捷却又必须依赖的设计资源。

教育部 2012 年颁布了新版《高等学校本科专业目录》,将电子信息类专业进行了整合,为各高校建立系统化的人才培养体系,培养具有扎实理论基础和宽广专业技能的、兼顾“基础”和“系统”的高层次电子信息人才给出了指引。

传统的电子信息学科专业课程体系呈现“自底向上”的特点,这种课程体系偏重对底层元器件的分析与设计,较少涉及系统级的集成与设计。近年来,国内很多高校对电子信息类专业课程体系进行了大力度的改革,这些改革顺应时代潮流,从系统集成的角度,更加科学合理地构建了课程体系。

为了进一步提高普通高校电子信息类专业教育与教学质量,贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020 年)》和《教育部关于全面提高高等教育质量若干意见》(教高【2012】4 号)的精神,教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会开展了“高等学校电子信息类专业课程体系”的立项研究工作,并于 2014 年 5 月启动了《高等学校电子信息类专业系列教材》(教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会规划教材)的建设工作。其目的是为推进高等教育内涵式发展,提高教学水平,满足高等学校对电子信息类专业人才培养、教学改革与课程改革的需要。

本系列教材定位于高等学校电子信息类专业的专业课程,适用于电子信息类的电子信

息工程、电子科学与技术、通信工程、微电子科学与工程、光电信息科学与工程、信息工程及其相近专业。经过编审委员会与众多高校多次沟通,初步拟定分批次(2014—2017年)建设约100门课程教材。本系列教材将力求在保证基础的前提下,突出技术的先进性和科学的前沿性,体现创新教学和工程实践教学;将重视系统集成思想在教学中的体现,鼓励推陈出新,采用“自顶向下”的方法编写教材;将注重反映优秀的教学改革成果,推广优秀的教学经验与理念。

为了保证本系列教材的科学性、系统性及编写质量,本系列教材设立顾问委员会及编审委员会。顾问委员会由教指委高级顾问、特约高级顾问和国家级教学名师担任,编审委员会由教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会委员和一线教学名师组成。同时,清华大学出版社为本系列教材配置优秀的编辑团队,力求高水准出版。本系列教材的建设,不仅有众多高校教师参与,也有大量知名的电子信息类企业支持。在此,谨向参与本系列教材策划、组织、编写与出版的广大教师、企业代表及出版人员致以诚挚的感谢,并殷切希望本系列教材在我国高等学校电子信息类专业人才培养与课程体系建设中发挥切实的作用。

吕志伟 教授

前言

PREFACE

随着信息技术的发展,数字信号处理基础知识已成为通信工程、电子信息、计算机应用技术等相关专业本科学生必须学习和掌握的专业基础知识。许多院校都在相关学科、专业开设了数字信号处理类课程。本书是《数字信号处理原理和算法实现(第3版)》(李莉主编,清华大学出版社,以下简称“教材”)的配套辅导材料,以方便学习这类课程、参考这类教材的人员更好地掌握教材基础知识并学习用基础理论分析问题的方法和基本运算技能。本书也可作为教师授课时的教学参考书。

本书各章与教材各章一一对应。除绪论外,本书其余各章分“重点内容”和“习题解答”两部分。其中“重点内容”部分的公式、图、表等以本书的章节为序编号,使本书既与教材有密切关系,又具有相对的独立性;“习题解答”部分给出了教材中所有习题的参考解答,许多习题都通过 MATLAB 软件编程实现计算和绘图,希望起到抛砖引玉的作用,提倡读者去探索其他多种解法。

本书由李莉负责统稿、审阅,其中“重点内容”部分由胡之惠编写,“习题解答”部分由俞玉莲编写。

由于编者水平有限,书中难免有疏漏和不妥之处,敬请使用本书的老师和读者不吝指正。

编 者

2018年2月于上海

目录

CONTENTS

绪论	1
0.1 概述	1
0.2 数字信号处理的特点	1
0.3 数字信号处理学科的内容	1
0.4 数字信号处理的实现	2
0.5 数字信号处理系统的应用领域	2
第 1 章 离散时间信号和系统	3
1.1 重点内容	3
1.1.1 概述	3
1.1.2 时域离散信号	3
1.1.3 离散时间系统	7
1.1.4 系统的线性常系数差分方程及其求解	9
1.1.5 模拟信号数字处理方法	10
1.2 习题解答	13
第 2 章 离散时间信号和系统的变换域分析	24
2.1 重点内容	24
2.1.1 概述	24
2.1.2 序列的离散时间傅里叶变换	24
2.1.3 周期序列的离散傅里叶级数与 DTFT	26
2.1.4 DTFT 和连续时间傅里叶变换之间的关系	27
2.1.5 z 变换	27
2.1.6 用 ZT 分析系统的因果性、稳定性和频响特性	31
2.2 习题解答	33
第 3 章 离散傅里叶变换	45
3.1 重点内容	45
3.1.1 引言	45
3.1.2 离散傅里叶变换的定义	46
3.1.3 离散傅里叶变换的性质	47
3.1.4 频域采样	51
3.1.5 用 DFT 对连续时间信号进行谱分析	51
3.1.6 用 DFT 对离散时间信号进行谱分析	52
3.1.7 DFT 应用中的问题与参数选择	53
3.2 习题解答	54

第 4 章 快速傅里叶变换	78
4.1 重点内容.....	78
4.1.1 概述	78
4.1.2 基-2 FFT	78
4.1.3 矩阵形式的 FFT	82
4.1.4 FFT 应用于长序列卷积	85
4.1.5 线性调频- z 变换	87
4.1.6 离散哈特莱变换	90
4.2 习题解答.....	92
第 5 章 数字滤波器的结构	98
5.1 重点内容.....	98
5.1.1 概述	98
5.1.2 信号流图表示网络结构	99
5.1.3 IIR 滤波器的基本网络结构	100
5.1.4 FIR 滤波器的基本结构	104
5.1.5 格型结构.....	110
5.2 习题解答	111
第 6 章 IIR 数字滤波器设计	124
6.1 重点内容	124
6.1.1 基本概念.....	124
6.1.2 模拟滤波器的设计.....	126
6.1.3 IIR LPF 设计: 脉冲响应不变法	134
6.1.4 IIR LPF 设计: 双线性变换法	136
6.1.5 IIR HPF、BPF、BSF 设计	137
6.1.6 IIR 滤波器直接设计法	138
6.2 习题解答	140
第 7 章 FIR 数字滤波器设计	161
7.1 重点内容	161
7.1.1 FIR 滤波器的线性相位条件和特点	161
7.1.2 窗函数法设计 FIR 滤波器	163
7.1.3 频率采样法设计 FIR 滤波器	168
7.1.4 优化技术设计.....	169
7.1.5 IIR 和 FIR 滤波器的比较	172
7.2 习题解答	173
参考文献	194

绪 论

数字信号处理(digital signal processing, DSP),是把信号用数字或符号表示成序列,通过计算机或通用(专用)信号处理设备,用数值计算方法进行各种处理,以达到提取有用信息便于应用的目的。

关于 DSP,可狭义理解为 digital signal processor(数字信号处理器);广义理解为 digital signal processing(数字信号处理技术)。本书讨论的 DSP 是指广义的理解。

0.1 概述

信号(signal)是一种物理体现,或是传递信息的函数。信息是信号的具体内容。

数字信号:时间和幅度都经过“量化”的信号。

数字系统:反映或表示数字信号处理输入输出(I/O)关系的器件或运算的物理设备。

数字信号处理系统的基本组成如图 0-1 所示,系统首先把模拟信号变换成数字信号,之后用数字技术进行处理,然后再还原成模拟信号。其中,“数字信号处理器”模块中的核心内容为数字滤波器和(或)快速傅里叶变换(fast Fourier transformation,FFT)算法。



图 0-1 数字信号处理系统的基本组成

0.2 数字信号处理的特点

由于数字信号在数字芯片、计算机中用有限位的编码序列表述,可以根据应用需要选定合适的字长等;而特定功能的数字信号处理算法可用数字器件构成合适的数字处理系统,所以数字信号处理具有灵活性强、高精度性和稳定性特点。随着大规模集成电路技术的发展,数字信号处理器便于大规模集成,可用于对数字信号进行存储、传输和处理。

0.3 数字信号处理学科的内容

广义上讲,数字信号处理可涵盖的内容如下:

- 信号的采集:包括模拟/数字(A/D)转换技术与数字/模拟(D/A)转换技术、采样定

理和量化噪声理论等。

- 离散时间信号分析：离散时间信号时域及频域分析、离散傅里叶变换(DFT)理论。
- 离散时间系统分析与设计。
- 信号处理的快速算法：谱分析与快速傅里叶变换(FFT),快速卷积与相关算法。
- 滤波技术。
- 信号的估计：各种估值理论、相关函数与功率谱估计。
- 信号的压缩：语音压缩、图像压缩、视频压缩和多媒体数据压缩。
- 随机信号的建模：包括自回归(auto-regressive, AR)模型,滑动平均(moving average, MA)模型,自回归滑动平均(auto-regressive and moving average, ARMA)模型等。
- 其他特殊算法：同态处理、抽取与内插和信号重建等。
- 数字信号处理的实现。
- 数字信号处理的应用。

0.4 数字信号处理的实现

软件实现方法：按原理和方法编程序在通用计算机上实现。

硬件实现方法：按要求和算法,设计硬件结构图,用数字乘法器、数字加法器、延时器,辅以控制器、存储器,I/O接口实现。

上述两大类数字信号处理的实现,具体方案主要特点:

- 采用大、中型计算机和微机：在工作站和微机上安装有关厂家的数字信号处理软件,如各种图像压缩和解压软件。
- 用单片机：可根据不同环境配不同单片机,实现实时控制,但数据运算量不能太大。
- 利用通用 DSP 芯片：DSP 芯片较之单片机有突出优点。如内部带有乘法器,累加器,采用流水线工作方式及并行结构,多总线速度快。配有适于信号处理的指令(如 FFT 指令)等。国内外许多芯片厂商生产各自特点的通用 DSP 芯片。
- 利用特殊用途的 DSP 芯片：市场上推出专门用于 FFT,有限脉冲响应(FIR)数字滤波器,卷积运算、相关运算等专用数字芯片。芯片内部已经用硬件电路实现了软件算法,使用者只需给出输入数据,就可在输出端直接得到所需数据。

0.5 数字信号处理系统的应用领域

数字信号处理大致可分为信号分析和信号滤波。

信号分析涉及信号特性的测量,主要应用于：谱(频率和/或相位)分析、语音分析和识别、目标检测等；最基本的信号特性是其频域特性。

信号滤波就是在形形色色的信号中提取所需要的信号,抑制不需要的信号或干扰信号。例如消除信息在传输过程中由于信道不理想所产生的失真；滤除不需要的背景噪声；去除干扰；频带分割；信号谱的成形。

数字信号处理广泛地应用于数字通信,雷达,遥感,声呐,语音合成,图像处理,测量与控制,高清晰度电视,多媒体物理学,生物医学,机器人,地球物理,地质勘探,航空航天等领域,并有效地推动了众多工程技术领域的技术进步和学科发展。

1.1 重点内容

1.1.1 概述

信号通常是一个自变量或几个自变量的函数。

- 一维信号：仅有一个自变量。
- 多维信号：有两个及以上的自变量。
- 离散时间信号：时间域离散的信号，如对连续信号时域采样所得的信号。
- 数字信号：信号的函数值被量化，并用一定比特的编码表示的时域离散信号；或由数字传感器直接采集得到的数字信号。例如，数字序列 $x(n)$ 、电荷耦合元件 (charge-coupled device, CCD) 得到的图像信号等。

1.1.2 时域离散信号

1. 模拟信号的采样、序列

对模拟信号 $x_a(t)$ ，在时刻 $t=nT$ 进行理想采样 (T 为采样时间间隔)，采样输出就是时域离散信号：

$$x(n) \equiv x_a(nT) = x_a(t) \big|_{t=nT}, \quad -\infty < n < \infty \quad (1.1.1)$$

$x_a(nT)$ 称为模拟信号的采样，是一个有序的离散时间序列： $\dots, x_a(-T), x_a(0), x_a(T), \dots, nT$ 代表前后顺序。当忽略模拟信号数字化过程中的量化误差、编码误差时， $x_a(nT)$ 可理想地定义为数字信号 $x(n)$ ，并简称为“序列”。

特别提示： n 是采样信号的顺序号，是整数，无量纲。理想条件下，序列的值等于模拟信号 $x_a(t)$ 的采样值，可以有量纲。

2. 常用典型序列

1) 单位采样脉冲序列 (单位脉冲序列, 时域离散冲激) $\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (1.1.2)$$

$\delta(n)$ 波形如图 1-1 所示，仅在 $n=0$ 时取值为 1，其他序号处均为零。

2) 单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (1.1.3)$$

$u(n)$ 波形如图 1-2 所示。

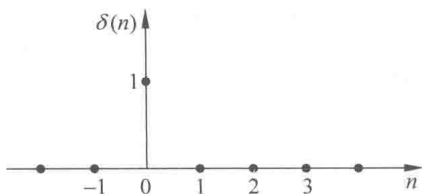


图 1-1 单位采样脉冲序列

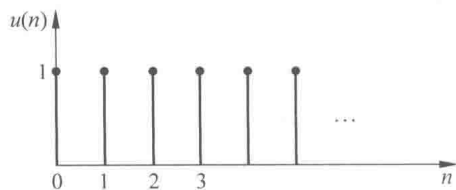


图 1-2 单位阶跃序列

3) 单位矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n < 0, n \geq N \end{cases} \quad (1.1.4)$$

其中, N 为 $R_N(n)$ 的长度。

当 $N=4$ 时, 序列 $R_4(n)$ 的波形如图 1-3 所示。

4) 实指数序列

$$x(n) = a^n u(n), \quad a \text{ 为实数} \quad (1.1.5)$$

实指数序列波形示例如图 1-4 所示。

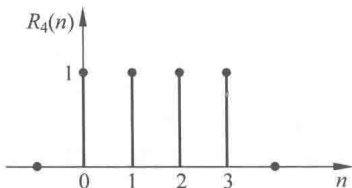
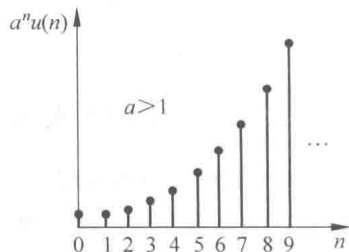
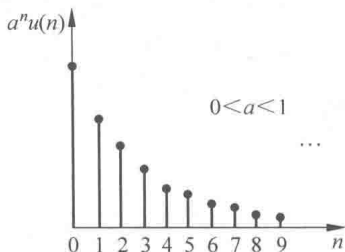
图 1-3 单位矩形序列 $R_4(n)$ 

图 1-4 实指数序列

5) 正弦序列

正弦序列 $x(n)$ 的基本形式如式(1.1.6), A 为振幅; ω_0 称为正弦序列的数字域频率, 简称“数字频率”, 单位是弧度(rad), φ_0 为初始相位。

$$x(n) = A \sin(n\omega_0 + \varphi_0) \quad (1.1.6)$$

序列 $x(n) = \sin\left(\frac{1}{4}\pi n\right)$ 的波形如图 1-5 所示。

6) 复指数序列

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n} \quad (1.1.7)$$

其中, ω_0 为数字域频率, 单位为弧度。因 n 为整数, 当 $\sigma=0$ 时, 复指数序列有恒等关系:

$$e^{j(\omega_0 + 2\pi M)n} = e^{j\omega_0 n}, \quad M \text{ 为整数}$$

即纯虚复指数序列在“数字频率域”是周期性的, 周期为 2π 。复指数序列 $x(n) = e^{-j\frac{\pi}{4}n}$ 前 8 个数据点在复平面上的位置如图 1-6 所示, 可理解为复指数序列值的极坐标表示。

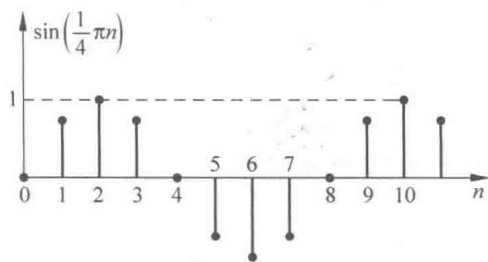
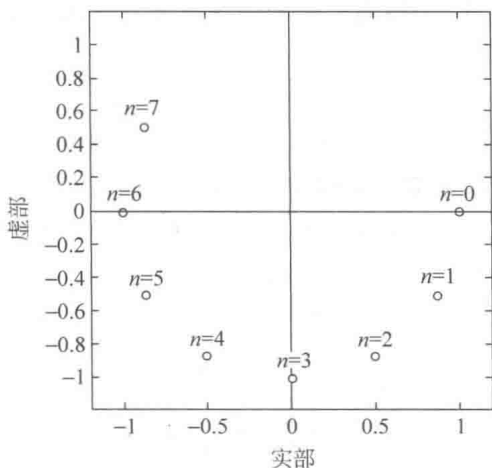


图 1-5 正弦序列

图 1-6 $x(n) = e^{-j\frac{\pi}{6}n}$ 复指数序列(在复平面上的前 8 个值)

7) 周期序列

给定序列 $x(n)$, 对所有整数 n 存在满足式(1.1.8)的最小正整数 N , 则称 $x(n)$ 是周期为 N 的周期序列。

$$x(n) = x(n + N), \quad -\infty < n < \infty \quad (1.1.8)$$

特别提示:

- 连续时间域中, 模拟正弦信号在时域总是周期的。
- 离散时间域中, 正弦序列并不都是周期序列。

(1) 正弦序列的周期性。设正弦序列存在关系式:

$$\sin[\omega_0(n + N)] = \sin(\omega_0 n + \omega_0 N) \quad (1.1.9)$$

当 $|\omega_0|N = 2\pi k$ (k 为某最小的非零正整数时), 该序列是周期性的, 周期是 $N = \frac{2\pi}{|\omega_0|}k$,

N, k 均为正整数, 且是互质的。

当整数 N 不存在时, 该正弦序列是非周期的。

(2) 复指数序列的周期性。因为任意复指数序列 $x(n)$ 可写成:

$$x(n) = e^{(\sigma + j\omega_0)n} = e^{\sigma n} (\cos\omega_0 n + j\sin\omega_0 n) \quad (1.1.10)$$

$\sigma \neq 0$ 时, $x(n)$ 不是时域周期序列。 $\sigma = 0$ 时, $x(n)$ 周期性判别原则同正弦序列。

特别提示:

- 对正弦序列、复指数序列, 不管序列在时域是否有周期性, 参数 ω_0 均称为序列的“数字频率”, 单位为弧度(rad)。
- 因为正弦序列、纯虚指数序列在“数字频率域”有 2π 的周期性, 故不失一般地, 研究这两类信号的频域特性只须取 $0 \leq \omega_0 \leq 2\pi$ 。

3. 序列的运算

1) 乘法、加减法

序列之间的乘法、加减法, 是指同一序号的序列值对应相乘或相加减得到新序列。

2) 移位、翻转、尺度变换

(1) 移位:

$$y(n) = x(n - n_0), \quad n_0 \text{ 为整数} \quad (1.1.11)$$

$n_0 > 0$, 序列 $x(n)$ 右移 n_0 个采样时间间隔(延时);

$n_0 < 0$, 序列 $x(n)$ 左移 $|n_0|$ 个采样时间间隔(超前)。

基于序列移位运算, 单位采样脉冲序列 $\delta(n)$ 与单位阶跃序列 $u(n)$ 的关系如式(1.1.12)和式(1.1.13)所示。

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \quad (1.1.12)$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \quad (1.1.13)$$

单位矩形序列 $R_N(n)$ 与单位阶跃序列 $u(n)$ 、单位采样脉冲序列 $\delta(n)$ 的关系如式(1.1.14a)和式(1.1.14b)。

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) \quad (1.1.14a)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \delta(n-k) \quad (1.1.14b)$$

任意序列 $x(n)$ 可表示为:

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (1.1.15)$$

式(1.1.15)中加权系数是序列各序号点的函数值 $x(m)$ 。其中

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (1.1.16)$$

(2) 翻转:

$$y(n) = x(-n) \quad (1.1.17)$$

翻转序列 $y(n)$ 是将序列 $x(n)$ 以纵轴为对称线, 左右翻转。

(3) 尺度变换:

尺度变换包括尺度压缩和尺度扩展两类。式(1.1.18)表示尺度压缩变换, 式(1.1.19)表示尺度扩展变换, 其中 m 为正整数。

$$y(n) = x(mn) \quad (1.1.18)$$

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{m}\right), & \frac{n}{m} \text{ 为整数} \\ 0, & \frac{n}{m} \text{ 不是整数} \end{cases} \quad (1.1.19)$$

式(1.1.18)中, $y(n)$ 是对 $x(n)$ 每隔 m 点取一点的所得; 在尺度变换前后采样时间间隔相等的前提下, 相当于时间轴(尺度)压缩成原来尺度的 $\frac{1}{m}$ 。

式(1.1.19)中, $y(n)$ 是在 $x(n)$ 的相邻样值序号之间均匀插入 $m-1$ 个序号, 且插入序号的序列值为零时的所得; 在尺度变换前后采样时间间隔相等的前提下, 相当于时间轴(尺度)扩展成原来尺度的 m 倍。

3) 累加

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k) \quad (1.1.20)$$

$y(n_0)$ 等于在这一个 n_0 处的 $x(n_0)$ 值与 n_0 以前所有 $k < n_0$ 处的 $x(k)$ 之和。

序列的能量 ϵ : 序列各采样值的平方和, 如式(1.1.21)所示。

$$\epsilon = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 \quad (1.1.21)$$

4) 卷积和

序列 $x(n)$ 与 $h(n)$ 的卷积和 $y(n)$ 是指两个序列的离散卷积, 如式(1.1.22)所示。

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (1.1.22)$$

卷积和的基本运算是翻转、延时、乘、加, 具体步骤如下:

(1) 画出 $x(m)$ 和 $h(m)$; $h(m)$ 相对 $m=0$ 的垂直轴反褶后, 得 $h(-m)$;

(2) $h(-m)$ 移位 $|n|$ 个时间间隔, 得 $h(n-m)$, $n > 0$ 时序列 $h(-m)$ 右移, $n < 0$ 时序列 $h(-m)$ 左移;

(3) $x(m)$ 、 $h(n-m)$ 序列对应 m 点的序列值分别相乘;

(4) 步骤(3)中的各 m 点相乘结果相加得到当前移位 n 时的卷积值 $y(n)$;

(5) 改变移位 n 数值, 重复步骤(2)~步骤(4), 得完整的序列线性卷积 $y(n)$ 。

1.1.3 离散时间系统

1. 线性

设

$$y_1(n) = T[x_1(n)], \quad y_2(n) = T[x_2(n)]$$

当且仅当 $T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$ 成立, 系统是线性的。

2. 时不变性

设 $T[x(n)] = y(n)$, 当且仅当 $T[x(n-k)] = y(n-k)$ 成立, 系统是时不变的。

系统时不变性的物理意义是: 输入序列先移位后变换的结果和先变换再移位的结果是一样的。

3. 系统输入输出关系

1) 单位采样脉冲响应

线性时不变系统的输入为单位采样脉冲 $\delta(n)$ 时, 对应的输出称为系统的“单位采样脉

冲响应” $h(n)$ 。

当线性时不变系统输入任意序列 $x(n)$ 时, 相应的输出 $y(n)$ 等于输入序列 $x(n)$ 和该系统的单位采样脉冲响应 $h(n)$ 的卷积和, 如式(1.1.23)所示。

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) \quad (1.1.23)$$

2) 结合 LTI 系统单位采样脉冲响应定义, 线性卷积和的基本规律总结如下

(1) 交换律:

$$h(n) * x(n) = x(n) * h(n) \quad (1.1.24)$$

(2) 结合律:

$$\begin{aligned} [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) &= [x(n) * h_2(n)] * h_1(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

式(1.1.25)表明: 若设 $h_1(n)$ 、 $h_2(n)$ 是两个子系统的单位采样脉冲响应, $x(n)$ 是输入序列, 则级联(串联)系统的变换结果与各级联子系统的次序无关。

级联(串联)系统总的单位采样脉冲响应等于各子系统单位采样脉冲响应的线性卷积。

(3) 分配律:

$$y(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n) \quad (1.1.26)$$

式(1.1.26)表明: 若设 $h_1(n)$ 、 $h_2(n)$ 是两个子系统的单位采样脉冲响应, $x(n)$ 是输入序列, 并联系统总的单位采样脉冲响应等于各并联子系统单位采样脉冲响应的和。

特别提示:

- 上述规律中给出的子系统及其串联、并联系统单位采样脉冲响应间的关系, 仅对线性时不变系统成立。
- 因任意序列可用单位采样脉冲序列的移位加权和表示, 如式(1.1.27a)所示, 这也是卷积和的定义。可见序列与单位采样脉冲序列的卷积为序列本身, 可理解为单位采样脉冲序列 $\delta(n)$ 对 $x(n)$ 的“采样”结果, 如式(1.1.28)所示。

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \quad (1.1.27a)$$

$$= x(n) * \delta(n) \quad (1.1.27b)$$

$$x(n-n_0) = x(n) * \delta(n-n_0) \quad (1.1.28)$$

4. 系统的因果性和稳定性

1) 因果性

系统在加入输入序列后才有输出序列, 称系统是因果的。线性时不变(LTI)系统具有因果性的充要条件为

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \quad (1.1.29)$$

2) 稳定性

若系统输入信号是有界的, 则系统输出信号也是有界的, 称系统是稳定的。LTI 系统稳定的充要条件是系统的单位采样脉冲响应绝对可和, 如式(1.1.30)所示。

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \quad (1.1.30)$$