应用型本科院校“十三五”规划教材/数学

主编 洪 港 于莉琦

线性代数

Linear Algebra

- 适用面广
- 应用性强
- 促进教学
- 面向就业

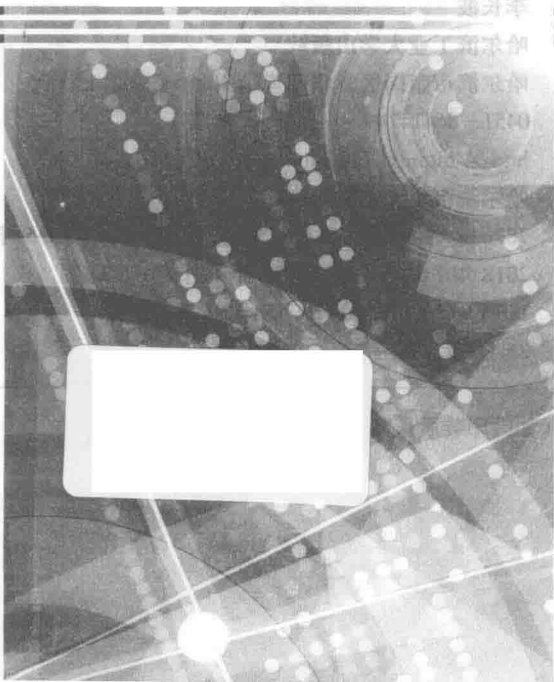
哈爾濱工業大學出版社

应用型本科院校“十三五”规划教材/数学

主　编　洪　港　于莉琦
副主编　高恒嵩　顾　贞　巨小维

线性代数

Linear Algebra



哈爾濱工業大學出版社

内容简介

本书是高等院校应用型本科系列教材，根据编者多年的教学实践，按照新形势教材改革精神，并结合教育部高等院校课程教学指导委员会提出的《线性代数课程教学基本要求》及应用性、职业型、开放式的应用型本科院校培养目标编写而成。本书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵、二次型、应用选讲和上机计算（Ⅲ）。本书附有习题答案与提示，配备了学习指导书，并对全书的习题做了详细解答，同时也配备了多媒体教学课件，方便教学。本书结构严谨，逻辑清晰，叙述详细，通俗易懂，突出了应用性。

本书可供应用型本科院校各专业学生及工程类、经济管理类院校学生使用，也可供科研及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/洪港，于莉琦主编．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.1

应用型本科院校“十三五”规划教材

ISBN 978-7-5603-5909-0

Ⅰ．①线… Ⅱ．①洪…②于… Ⅲ．①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ．①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 062197 号

策划编辑 杜 燕
责任编辑 李长波
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 10.75 字数 255 千字
版 次 2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5909-0
定 价 26.00 元

《应用型本科院校“十三五”规划教材》编委会

序

哈尔滨工业大学出版社策划的《应用型本科院校"十三五"规划教材》即将付梓，诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁，凡百余种，涉及众多学科门类，定位准确，内容新颖，体系完整，实用性强，突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学习，而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位，培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别，其培养的人才特征是：①就业导向与社会需求高度吻合；②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合；③具备良好的人文素质和科学技术素质；④富于面对职业应用的创新精神。因此，应用型本科院校只有着力培养"进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好"的人才，才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减，针对性、应用性不够突出，因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材，以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

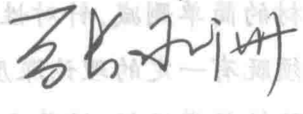
哈尔滨工业大学出版社出版的《应用型本科院校"十三五"规划教材》，在选题设计思路上认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域经济和社会发展需要的"本科应用型高级专门人才"精神，根据前黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见，在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上，特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性，既严格遵照学科体系的知识构成和教材编写的一般规律，又针对应用型本科人才培养目标

及与之相适应的教学特点，精心设计写作体例，科学安排知识内容，围绕应用讲授理论，做到“基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用”。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果，并且制作了与本书配套的PPT多媒体教学课件，形成立体化教材，供教师参考使用。

《应用型本科院校“十三五”规划教材》的编辑出版，是适应“科教兴国”战略对复合型、应用型人才的需求，是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试，在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作，为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中，通过编者、作者和读者的共同努力，厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精，不断丰富、不断完善、不断创新，力争成为同类教材中的精品。



前　言

为了贯彻全国高等院校教育工作会议精神和落实教育部关于抓好教材建设的指示；为了更好地适应培养高等技术应用型人才的需要，促进和加强应用型本科院校“线性代数”的教学改革和教材建设，由黑龙江东方学院、哈尔滨理工大学等院校的部分教师参与编写了本书。

在编写中，我们依据教育部课程教学委员会提出的《线性代数教学基本要求》，结合应用性、职业型、开放式的应用型本科院校的培养目标，努力体现以应用为目的，以掌握概念、强化应用为教学重点，以必需够用为度的原则，并根据我们的教改与科研实践，在内容上进行了适当的取舍。在保证科学性的基础上，注意处理基础与应用、经典与现代、理论与实践、手算与电算的关系；注意讲清概念，建立数学模型，适当削弱数理论证，注重两算（笔算与上机计算）能力以及分析问题、解决问题能力的培养；重视理论联系实际，叙述通俗易懂，既便于教师教，又便于学生学。

本书是在哈尔滨工业大学出版社《线性代数》（孔繁亮主编）的基础上，根据近几年教学改革实践，为进一步适应应用性科技大学总体培养目标的需要，进行全面修订而成的。在修订中，我们保留了原教材的系统与独特风格，既将数学的相关知识与实际应用联系起来，在每一部分数学知识的讲述中引进应用模型，同时注意吸收当前教材改革中一些成功的改革经验及一线教师的反馈意见与建议，摒弃一些陈旧的例子及复杂运算过程，而引入计算机数学软件。

本书 40 学时可讲完主要部分，加 * 号的部分可根据专业需要选用（另加学时），或供学生自学。本书除供高等工科院校工程类、经济类、管理类等专业的教学使用外，也可供成人教育学院等其他院校作为教材，还可作为工程技术人员、企业管理人员的参考书。

本书由洪港、于莉琦任主编，高恒嵩、顾贞、巨小维任副主编，哈尔滨理工大学王树忠教授任主审。

由于水平有限，书中难免有疏漏或不足之处，敬请广大师生、社会各界读者不吝指正。

编　者

2017 年 10 月

目　　录

第 1 章

行列式

1.1 行列式的定义

无论在数学本身，还是在其他科学领域中，行列式都有着广泛的应用. 它是一种基本的数学工具，本章将给出 n 阶行列式的概念、性质、计算方法及在解线性方程组方面的某些应用.

1. 二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

式(1) $\times a_{22}$ - 式(2) $\times a_{12}$，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

式(2) $\times a_{11}$ - 式(1) $\times a_{21}$，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，有唯一解，且其解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

若采用下面记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

则上述方程组的解可写为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为二阶行列式.

定义 1　由 2^2 个数排成 2 行 2 列得到如下算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{3}$$

式(3) 称为二阶行列式,记为 D.

数 $a_{ij}(i,j = 1,2)$ 称为二阶行列式的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行;第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列. a_{ij} 表示行列式第 i 行第 j 列相交处的元素.

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 可以看作是两项的和,$a_{11}a_{22} + (-a_{12}a_{21})$ 称为行列式的展开式. 第一项 $a_{11}a_{22}$ 可以看作是二阶行列式的第 1 行第 1 列的元素 a_{11} 与划去该元素所在的第 1 行和第 1 列后余下的元素之积，符号为$(-1)^{1+1}$;第二项 $-a_{12}a_{21}$ 可以看作是第 1 行第 2 列的元素 a_{12} 与划去该元素所在的第 1 行和第 2 列后余下的元素之积，符号为$(-1)^{1+2}$. 二阶行列式展开式有 2!项.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ (-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}\ (-1)^{1+2}a_{21}$$

例 1　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

解　因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21$$

因此　$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2,\quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3$$

2. 三阶行列式与 n 阶行列式

类似地,对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

可以定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

记作 D,该三阶行列式是方程组的系数行列式.

定义 2　由 3^2 个数排成 3 行 3 列得到如下算式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{4}$$

式(4) 称为三阶行列式. 三阶行列式展开式共有 3!项.

利用数学归纳法,可得到 n 阶行列式的定义.

定义 3 由 n^2 个数排成 n 行 n 列得到如下算式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} \tag{5}$$

式(5) 称为 n 阶行列式.

其中

$$A_{1j}=(-1)^{1+j}\begin{vmatrix}a_{21}&\cdots&a_{2\ j-1}&a_{2\ j+1}&\cdots&a_{2n}\\a_{31}&\cdots&a_{3\ j-1}&a_{3\ j+1}&\cdots&a_{3n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n\ j-1}&a_{n\ j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

这个算式表示所有位于不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和. 即等式右侧每项是原行列式中第 1 行的元素 a_{1j} 与划去该元素所在的第 1 行和第 j 列后的一个 $n-1$ 阶行列式之积,再乘上符号为$(-1)^{i+j}$,其中$j(j=1,2,\cdots,n)$ 为该元素所在列数. 再由 $n-1$ 阶行列式的定义继续展开下去,直至二阶行列式展开后得 n 阶行列式所有项,共有 n!项. 它的每一项一般形式可表示为

$$\pm a_{1\ i_1}a_{2\ i_2}\cdots a_{n\ i_n}$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一种排列.

例 2 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&3&-1\\3&6&1\end{vmatrix}$.

解 根据三阶行列式的定义,得

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&3&-1\\3&6&1\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&-1\\6&1\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&-1\\3&1\end{vmatrix}+0\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&3\\3&6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}3&-1\\6&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&-1\\3&1\end{vmatrix}=-1$$

例 3　计算 n 阶下三角形行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

解　连续用行列式的定义,得到

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

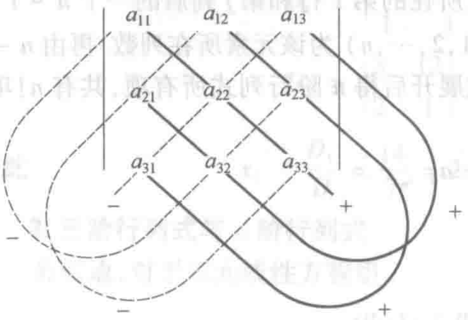
$$=a_{11}a_{22}\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

注:类似可得对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

3. 三阶行列式的其他计算方法

(1) 对角线法则.



$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

(2) 沙路法则.

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

例 4　计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0-3\times0\times(-1)-1\times5\times0-2\times4\times6=-10-48=-58$$

例5 求解方程 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0$.

解 方程左端

$$D=3x^2+4x+18-12-9x-2x^2=x^2-5x+6$$

由 $x^2-5x+6=0$,解得 $x=2$ 或 $x=3$.

4.三元线性方程组

类似于二元线性方程组的讨论,对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

若系数行列式 $D\neq0$,则该方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

例6 解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2 \\ 2x_1+x_2-3x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$.

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1-1\times1\times(-1)-1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1)$$

$$=-5\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\2&1&1\\-1&1&0\end{vmatrix}=-5$$

故所求方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1$$

5. 行列式的展开法则

三阶行列式展开得

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

再根据二阶行列式的定义，得

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

将上式按照此行列式第 2 行元素进行分组，得到

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=(a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})+(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})+(a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32})$$

$$=-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-a_{23}(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})$$

$$=-a_{21}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{23}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

$$=a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

据此，三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$ 还可以表示为

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

由此可见，三阶行列式不仅可以通过第 1 行用二阶行列式表示，而且还可以借助于第 2 行用二阶行列式表示.

同样地，三阶行列式还可以借助于其他行或列用二阶行列式表示. 为了刻画这个结论，先引入下面的定义.

定义4 n阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第i行和第j列的元素,余下的元素按照原来位置构成的 $n-1$ 阶行列式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}，称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

定理1 三阶行列式等于它任意一行(列) 的所有元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij}\quad(i=1,2,3)$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij}\quad(j=1,2,3)\tag{6}$$

证 仅证式(6) 中 $i=2$ 时情况,其余证法相同.

由二、三阶行列式定义得三阶行列式的展开式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=(a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})+(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})+(a_{12}a_{23}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32})$$

$$=-a_{21}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-a_{23}(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})$$

$$=a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$$

这就是三阶行列式的按行(列) 展开法则.

对于 n 阶行列式也有一样的结论.

定理2 n 阶行列式等于它任意一行(列) 的所有元素与其对应的代数余子式乘积之和. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n)\tag{7}$$

证明略.

式(7) 也称为拉普拉斯展开式.

例7 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix}$.

解 根据三阶行列式的按行(列)展开法则,将此行列式按第 1 列展开,得到

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 4 & 7\\0 & -1 & -5\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & 7\\-1 & -5\end{vmatrix}=-13$$

例 8 计算 n 阶上三角形行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$.

解 连续用行列式的按行(列)展开法则,将此行列式按第 1 列展开,得到

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n}\\0 & a_{44} & \cdots & a_{4n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

习 题 1.1

1. 计算下列二阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 4\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix}a & b\\a^2 & b^2\end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix}x-1 & 1\\x^2 & x^2+x+1\end{vmatrix}$; (5) $\begin{vmatrix}\dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2}\\\dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix}1 & \log_b a\\\log_a b & 1\end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\\2 & 3 & 1\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\3 & 1 & 4\\8 & 9 & 5\end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\3 & 5 & 0\\0 & 4 & 1\end{vmatrix}$;