智课教育

考研系列专家指导丛书

新大纲+模拟试卷

考研数学三18套模拟试卷高分专项精解

仲毅　方浩 主编

超值赠送：

- 赠送智课网价值199元、75课时的【2018考研】数学基础班线上课程
- 扫描封底二维码，观看名师精彩视频，详解考研数学及合理安排复习计划
- 北京大学、清华大学状元考研数学备战锦囊

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

智课教育

考研系列专家指导丛书

新大纲+模拟试卷

考研数学三18套模拟试卷高分专项精解

仲毅　方浩 主编

超值赠送：

- 赠送智课网价值199元、75课时的【2018考研】数学基础班线上课程
- 扫描封底二维码，观看名师精彩视频，详解考研数学及合理安排复习计划
- 北京大学、清华大学状元考研数学备战锦囊

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学三18套模拟试卷高分专项精解/仲毅主编. --北京:中国石化出版社,2017.3
ISBN 978-7-5114-3561-3

Ⅰ.①考… Ⅱ.①仲… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第046061号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市朝阳区吉市口路9号
邮编:100020 电话:(010)59964500
发行部电话:(010)59964526
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092毫米16开本11印张267千字
2017年3月第1版 2017年3月第1次印刷
定价:26.00元

前　　言

中国加入 WTO 之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高水平人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是“常模参照”考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制定的《考试大纲》，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。

本套丛书包括：

《考研数学一 18 套模拟试卷高分专项精解》

《考研数学二 18 套模拟试卷高分专项精解》

《考研数学三 18 套模拟试卷高分专项精解》

本书的编写特点如下：

1. 18 套标准模拟试卷，反映最新考试大纲变化

本书共包含 18 套标准模拟试卷，试卷严格按照最新考试大纲编写，采用大纲最新题型，难度无限接近研究生入学考试试题，重点针对大纲中的重点、难点、核心考点精心编写，保证试题的高质量、高标准，提高考生复习效率。

2. 注重考试技巧，高效突破难关

本书精辟阐明解题思路，全面展现题型变化，为考生全程领航和理性分析，

引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本书进行考前模拟实战训练，检验自己的学习成果，及时进行查漏补缺，有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练，这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔，编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编写。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作，积累了丰富的教学辅导经验，对历年考试情况比较了解，对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

4. 超值赠送三重好礼

本书超值赠送三重好礼：①赠送智课网价值199元、75课时的2018数学基础班线上课程；②扫描封底二维码，观看名师精彩视频，详解考研数学及合理安排复习计划；③另有北京大学、清华大学状元考研数学备战锦囊，助广大考研学子一臂之力。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序，力求达到完美，但限于时间和水平，仍可能存在不足，纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

模拟试卷(一)

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 设$f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t$，$g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$，则当$x\to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的(　　).

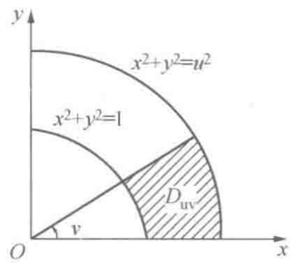
(A)低阶无穷小　　(B)高阶无穷小

(C)等价无穷小　　(D)同阶但不等价的无穷小

2. 设周期函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，周期为4. 又$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线$y=f(x)$在点$(5,f(5))$处的切线的斜率为(　　).

(A) 1/2　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

3. 设函数$f(x)$连续，$F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域$D_{uv}$为图中阴影部分，则$\frac{\partial F}{\partial u}=$(　　).



(A) $vf(u^2)$　　(B) $\frac{v}{u}f(u^2)$

(C) $vf(u)$　　(D) $\frac{v}{u}f(u)$

4. 设$f(x,y)$在点$(0,0)$的某邻域内连续，且满足$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+1-x\sin y}=-3$，则函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处(　　).

(A)取极大值　　(B)取极小值

(C)不取极值　　(D)无法确定是否有极值

5. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$均为$n$维列向量，$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，则下列选项正确的是(　　).

(A)若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性相关

(B)若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性无关

(C)若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性相关

(D)若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$线性无关

6. 设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为同阶可逆矩阵，则(　　).

(A)$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$　　(B)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$

(C)存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$，使$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$　　(D)存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$，使$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

7. 设随机变量X服从正态分布$N(0,1)$，对给定的$\alpha\in(0,1)$，数u_α满足$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若$P\{|X|<x\}=\alpha$，则x等于(　　).

(A)$u_{\frac{\alpha}{2}}$　　(B)$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　(C)$u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　(D)$u_{1-\alpha}$

8. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,4)$ 且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则(　　).

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$________.

10. 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$________.

11. 设商品的需求函数为 $Q=100-5P$，其中 Q，P 分别表示需求量和价格，如果商品需求弹性的绝对值大于1，则商品价格的取值范围是________.

12. 若 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\,dx$，则 $\int_0^1 f(x)\,dx=$________.

13. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{bmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1}=$________.

14. 一射手对同一目标独立地进行4次射击，若至少命中一次的概率 $\dfrac{80}{81}$，则该射手的命中率为________.

三、解答题：15～23小题，共94分．请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分10分)

设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，若由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1$，$x=t(t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体积为 $V(t)=\dfrac{\pi}{3}\left[t^2f(t)-f(1)\right]$，试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $\left.y\right|_{x=2}=\dfrac{2}{9}$ 的解.

16. (本题满分10分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq 0$. 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{e^b-e^a}{b-a}\cdot e^{-\eta}$.

17. (本题满分10分)

求连续函数 $f(x)$，使它满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)\,dt=x^2$.

18. (本题满分10分)

将函数 $f(x)=\ln(1-x-2x^2)$ 展开成 x 的幂级数，并指出其收敛区间.

19. (本题满分10分)

设某种商品的单价为 p 时，售出的商品数量 Q 可以表示成 $Q=\dfrac{a}{p+b}-c$，其中 a，b，c 均为正数，且 $a>bc$.

(Ⅰ)求 p 在何范围变化时，使相应销售额增加或减少？

(Ⅱ)要使销售额最大，商品单价 p 应取何值？最大销售额是多少？

20. (本题满分 11 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a\end{bmatrix}_{n\times n}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\ \cdots,\ x_n)^T$，

$\boldsymbol{b}=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$.

(Ⅰ)证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$；

(Ⅱ) a 为何值时，方程组有唯一解？求 x_1；

(Ⅲ) a 为何值时，方程组有无穷多解？求通解.

21. (本题满分 11 分)

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1\end{bmatrix}$

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

22. (本题满分 11 分)

设 X_1，X_2，$\cdots$，X_n 是来自总体 X 的样本，X 的分布密度为 $f(x,\ \theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

试用矩估计法估计总体参数 θ.

23. (本题满分 11 分)

假设随机变量 U 在区间$[-2,\ 2]$上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases}-1, & U\leqslant -1, \\ 1 & U>-1,\end{cases}\quad Y=\begin{cases}-1, & U\leqslant 1, \\ 1 & U>1.\end{cases}$$

试求：(Ⅰ) X 和 Y 的联合概率分布；

(Ⅱ) $D(X+Y)$.

模拟试卷(一)参考答案与解析

一、选择题

1. **【考点提示】**无穷小的阶、洛必达法则、变上限定积分求导

【解题分析】因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=5\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^5}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(1-\cos x)^2\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)^2x}{x^4}=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^4}{4}}{x^3}=0$，所以 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高价无穷小，因而选(B).

2. **【考点提示】**导数的几何意义

【解题分析】由题设，$f(x)$ 的周期为 4，则所求点$(5,\ f(5))$处切线的斜率应该与

$(1, f(1))$处的斜率相同，则由导数定义知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{(-x)}$即为所求斜率，

又由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{(-x)}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-2$，

所以点$(5, f(5))$处切线的斜率为-2. 选(D).

3.【考点提示】积分的坐标变换

【解题分析】在极坐标系下，$F(u, v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^u\mathrm{d}v\int_1^u\dfrac{f(\rho^2)}{\rho}\rho\mathrm{d}\rho=v\int_1^u f(\rho^2)\mathrm{d}\rho$，

则$\dfrac{\partial F}{\partial u}=v\left(\int_1^u f(\rho^2)\mathrm{d}\rho\right)'=vf(u^2)$，故应选(A).

4.【考点提示】多元函数的极值

【解题分析】因为$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x, y)-f(0, 0)}{x^2+1-x\sin y}=-3$，根据极限保号性，存在$\delta>0$，

当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，有$\dfrac{f(x, y)-f(0, 0)}{x^2+1-x\sin y}<0$，

而$x^2+1-x\sin y>x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，

所以当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，有$f(x, y)-f(0, 0)<0$，即$f(x, y)<f(0, 0)$，

所以$f(x, y)$在点$(0, 0)$处取极大值，选(A).

5.【考点提示】向量组的线性相关性

【解题分析】用秩的方法判断线性相关性.

因为$(\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_s)=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$，所以$r(\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$.

又若$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$线性相关，则$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)<s$，从而$r(\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_s)<s$.

所以$\boldsymbol{A\alpha}_1, \boldsymbol{A\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{A\alpha}_s$线性相关，故选(A).

6.【考点提示】可逆矩阵、相似矩阵、合同

【解题分析】由题设，选项(A)表示可逆矩阵乘法满足交换律，显然不能成立；(B)表示$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似，(C)表示$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同，这都是不成立的，所以(A)，(B)，(C)皆可排除；关于(D)，设$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$的逆矩阵分别为$\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^{-1}$，则有$\boldsymbol{BAA}^{-1}=\boldsymbol{B}$，取$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}^{-1}$，则$\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$，从而(D)成立. 综上，选(D).

7.【考点提示】正态分布

【解题分析】由题设，$X\sim N(0, 1)$则$P\{X>u_\alpha\}=1-\Phi(u_\alpha)=\alpha$，即$\Phi(u_\alpha)=1-\alpha$，其中$\Phi(x)$为$N(0, 1)$的分布函数，从而$P\{|X|<x\}=2\Phi(x)-1=\alpha$，

即$\Phi(x)=\dfrac{1+\alpha}{2}=1-\dfrac{1-\alpha}{2}$，综上知$x=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$，选(C).

8.【考点提示】随机变量的数字特征

【解题分析】设$Y=aX+b$，因为相关系数$\rho_{XY}=1$，所以X，Y正相关，即有$a>0$. 又$X\sim N(0, 1)$，$Y\sim N(1, 4)$，则$E(X)=0$，$D(X)=1$，$E(Y)=1$，$D(Y)=4$，

从而$E(Y)=E(aX+b)=aE(X)+b=b=1$，$D(Y)=D(aX+b)=a^2D(X)=a^2=4$.

解得$a=2$，$b=1$. 故应选(D).

二、填空题

9.【考点提示】导数的几何意义

【解题分析】由题设，曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，设切点为$(x_0,0)$，

则 $y'\Big|_{x=x_0}=3x_0^2-3a^2=0$，即 $x_0^2=a^2$. 又由切点在曲线上，则 $0=x_0^3-3a^2x_0+b$，

因而 $b=2x_0^3\Rightarrow b^2=4x_0^6=4a^6$，所以 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=4a^6$.

10.【考点提示】利用复合函数的求导法则可得到正确答案

【解题分析】由 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$且$f'(x)=\arctan x^2$，

得$\dfrac{dy}{dx}=f'\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\dfrac{3(3x+2)-(3x-2)\cdot 3}{(3x+2)^2}=\dfrac{12}{(3x+2)^2}\arctan\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^2$，

故$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=3\arctan 1=\dfrac{3\pi}{4}$.

11.【考点提示】由需求弹性公式求出需求弹性，即可确定价格的取值范围

【解题分析】由 $Q=100-5P$，得 $Q'(P)=-5$.

需求弹性为 $\varepsilon=P\cdot\dfrac{Q'(P)}{Q(P)}=P\cdot\dfrac{-5}{100-5P}$.

令$|\varepsilon|=\left|\dfrac{-5P}{100-5P}\right|=\left|\dfrac{5P}{100-5P}\right|>1$，即$\dfrac{5P}{100-5P}<-1$或$\dfrac{5P}{100-5P}>1$，

解得 $P>20$ 或 $10<P<20$，又由 $Q(P)=1000-5P=0$，得最高价格为 $P=20$.

所以商品价格的取值范围是$(10,20]$.

12.【考点提示】定积分

【解题分析】由题设，令 $\int_0^1 f(x)\,dx=A$，A 为常数，则$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+A\sqrt{1-x^2}$，

从而 $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}dx+A\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx\Rightarrow$

$A=\arctan x\Big|_0^1+\dfrac{A}{2}\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}A$

于是 $A=\dfrac{\frac{\pi}{4}}{1-\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi}{4-\pi}$，即 $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{\pi}{4-\pi}$.

13.【考点提示】涉及 $\boldsymbol{A}^*$ 的问题，一般从公式 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 着手分析

【解题分析】因为 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，

从而$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{10}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{10}&0&0\\ \frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\ \frac{3}{10}&\frac{2}{5}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

14.【考点提示】这是一个 4 重贝努利概型试验，从而可利用二项分布求解

【解题分析】设该射手的命中率为 p，X 表示射手对同一目标独立地进行 4 次射击中命中

目标的次数，则 $X \sim B(4,\ p)$，由题设：$P\{X \geqslant 1\} = \dfrac{80}{81}$，

而 $P\{X \geqslant 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - (1-p)^4$，故 $(1-p)^4 = 1 - \dfrac{80}{81} = \dfrac{1}{81}$，

解得 $p_1 = \dfrac{2}{3}$，$p_2 = \dfrac{4}{3}$（舍去），故应填 $\dfrac{2}{3}$.

三、解答题

15.【考点提示】旋转体的体积、一阶微分方程

【解题分析】由题设，旋转体体积应为 $\pi \int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x$，

则 $\pi \int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{3}\left[t^2 f(t) - f(1)\right]$，从而 $\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\left[t^2 f(t) - f(1)\right]$

两边对 t 求导，得 $f^2(t) = \dfrac{1}{3}\left[2tf(t) + t^2 f'(t)\right]$，即 $t^2 f'(t) - 3f^2(t) + 2tf(t) = 0$.

令 $\dfrac{f(t)}{t} = u$，则 $t\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 3u(u-1)$. 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u(u-1)} = \dfrac{3}{t}\mathrm{d}t$，

积分得 $\dfrac{u-1}{u} = Ct^3$，因此 $f(t) = t \cdot \dfrac{1}{1-Ct^3} = \dfrac{t}{1-Ct^3}$.

又由已知 $f(2) = \dfrac{2}{9}$，则可解出 $C = -1$，从而 $f(t) = \dfrac{t}{1+t^3}$，所以 $y = f(x) = \dfrac{x}{1+x^3}$.

16.【考点提示】微分中值定理

【解题分析】由题设，引入辅助函数，即 $g(x) = e^x$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上满足柯西中值定理的条件，所以知存在一点 $\eta \in (a,\ b)$，使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a} = \frac{f'(\eta)}{\mathrm{e}^\eta} \tag{1}$$

又 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，则存在一点 $\xi \in (a,\ b)$，使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式可得 $\dfrac{b-a}{\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a} \cdot f'(\xi) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^\eta} f'(\eta)$，

整理得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \dfrac{\mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a}{b-a} \cdot \mathrm{e}^{-\eta}$，$\xi,\ \eta \in (a,\ b)$. 证毕.

17.【考点提示】先在等式两边对 x 求导，消去变限积分，将原方程化为关于未知函数 $f(x)$ 的微分方程，再求解该微分方程.

【解题分析】方程 $f(x) + 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x^2$ 两边对 x 求导得 $f'(x) + 2f(x) = 2x$，

令 $x = 0$，由原方程得 $f(0) = 0$.

于是，原问题就转化为求微分方程 $f'(x) + 2f(x) = 2x$ 满足初始条件 $f(0) = 0$ 的特解.

由一阶线性微分方程的通解公式，

得 $f(x) = \mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}\left(\int 2x \cdot \mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = \mathrm{e}^{-2x}\left(\int 2x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x + C\right) = C\mathrm{e}^{-2x} + x - \dfrac{1}{2}$.

代入初始条件 $f(0) = 0$，得 $C = \dfrac{1}{2}$，从而 $f(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + x - \dfrac{1}{2}$.

18.【考点提示】幂级数的收敛区间

【解题分析】由于 $f(x) = \ln(1 - x - 2x^2) = \ln(1+x) + \ln(1-2x)$，

而 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}(-1<x\leqslant 1)$,

$\ln(1-2x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(-2x)^{n+1}}{n+1}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{n+1}}{n+1}x^{n+1}\left(-\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2}\right)$,

所以 $f(x)=\ln(1-x-2x^2)=\ln(1+x)+\ln(1-2x)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n-2^{n+1}}{n+1}x^{n+1},$$

易求得其收敛区间为 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

19. **【考点提示】**由经济意义知销售额为 $R=pQ$,销售额的增减性可由 $R'(p)$ 的符号来确定.

【解题分析】(Ⅰ)设售出商品的销售额为 R,则 $R=pQ=p\left(\dfrac{a}{p+b}-c\right)$,$R'=\dfrac{ab-c(p+b)^2}{(p+b)^2}$.

令 $R'=0$,得 $p_0=\sqrt{\dfrac{ab}{c}}-b=\sqrt{\dfrac{b}{c}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)>0$.

当 $0<p<\sqrt{\dfrac{b}{c}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)$ 时,有 $R'>0$,所以随单价 p 的增加,相应的销售额也增加.

当 $p>\sqrt{\dfrac{b}{c}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)$ 时,有 $R'<0$,所以随单价 p 的增加,相应的销售额将减少.

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知,当 $p=\sqrt{\dfrac{b}{c}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)$ 时,销售额 R 取得最大值,

最大销售额为 $R_{\max}=\left(\sqrt{\dfrac{ab}{c}}-b\right)\left(\dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{ab}{c}}}-c\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{bc}\right)^2$.

20. **【考点提示】**线性方程组解的结构和通解

【解题分析】(Ⅰ)利用行列式性质,有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2a&1&&&\\a^2&2a&1&&0\\&a^2&2a&1&\\&&\ddots&\ddots&\ddots\\&0&&a^2&2a&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a&1&&&\\0&\frac{3a}{2}&1&&0\\&a^2&2a&1&\\&&\ddots&\ddots&\ddots\\&0&&a^2&2a&1\\&&&&a^2&2a\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=\begin{vmatrix}2a&1&&&\\0&\frac{3a}{2}&1&&0\\&0&\frac{4a}{3}&1&\\&&\ddots&\ddots&\ddots\\&0&&0&\frac{na}{n-1}&1\\&&&&0&\frac{(n+1)a}{n}\end{vmatrix}$$

$$= 2a \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{4a}{3} \cdots \frac{na}{n-1} \cdot \frac{(n+1)a}{n} = (n+1)a^n.$$

(Ⅱ)若使方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解，则 $|\boldsymbol{A}| = (n+1)a^n \neq 0$，即 $a \neq 0$. 则由克莱姆法则得

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & 0 & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{1 \times na^{n-1}}{(n+1)a^n} = \frac{n}{(n+1)a}.$$

(Ⅲ)若使方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $|\boldsymbol{A}| = (n+1)a^n = 0$，即 $a=0$

把 $a=0$ 代入到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，显然有 $r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B}) = r(\boldsymbol{A}) = n-1$，

方程组的基础解系含一个解向量，它的基础解系为 $k(1, 0, 0, \cdots, 0)^T$（k 为任意常数）.

代入 $a=0$ 后方程组化为 $\begin{cases} x_2 = 1, \\ x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0, \end{cases}$ 特解取为 $(0, 1, 0, \cdots, 0)^T$，

则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $k(1, 0, 0, \cdots, 0)^T + (0, 1, 0, \cdots, 0)^T$，其中的 k 为任意常数.

21. **【考点提示】**特征值、特征向量、矩阵对角化

【解题分析】(Ⅰ)由题设，先由特征值多项式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=0$ 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，即

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & b & \cdots & b \\ b & 1-\lambda & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 1-\lambda+(n-1)b & 1-\lambda & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-\lambda+(n-1)b & b & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= [1-\lambda+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & 1-\lambda & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= [1-\lambda+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & 1-\lambda-b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda-b \end{vmatrix}$$

$$= [1-\lambda+(n-1)b](1-\lambda-b)^{n-1},$$

因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 1+(n-1)b$，$\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 1-b$.

当 $b \neq 0$ 时，对应于 $\lambda_1 = 1+(n-1)b$，

$$\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} (1-n)b & b & \cdots & b \\ b & (1-n)b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & (1-n)b \end{bmatrix},$$

不难求出 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ 是 $(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，从而属于 λ_1 的特征向量为

$C\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}C\\C\\\vdots\\C\end{bmatrix}$，其中 C 为任意非 0 常数．对应于 $\lambda_2=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$，

$$\boldsymbol{A}-(1-b)\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}b&b&\cdots&b\\b&b&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix},$$

易得出基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\\vdots\\0\end{bmatrix}$，…，$\boldsymbol{\xi}_n=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\-1\end{bmatrix}$，

从而特征向量为 $C_2\boldsymbol{\xi}_2+C_3\boldsymbol{\xi}_3+\cdots+C_n\boldsymbol{\xi}_n$，其中 C_2，C_3，…，C_n 是不全为 0 的常数．

当 $b=0$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}$，从而 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，任意非零向量皆为其特征向量．

(Ⅱ)由前述已知，当 $b\neq0$，$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n)$，

则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1+(n-1)b&0&\cdots&0\\0&1-b&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1-b\end{bmatrix}$，

而当 $b=0$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，任取 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，都有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{E}$.

22. **【考点提示】**矩估计的计算

【解题分析】$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,\theta)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}\mathrm{d}x=\dfrac{\theta}{\theta+1}$

$\because \hat{\mu}_1=A_1\quad\therefore\dfrac{\theta}{\theta+1}=A_1=\overline{X}\quad\therefore\hat{\theta}_1=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$

23. **【考点提示】**联合概率分布、方差

【解题分析】(Ⅰ)由题设，(X,Y)的取值有四种可能．即$(-1,-1)$，$(-1,1)$，$(1,-1)$，$(1,1)$，由已知 U 在$[-2,2]$上均匀分布，即 $P(U\leqslant-1)=\dfrac{1}{4}$，$P(U>-1)=\dfrac{3}{4}$；$P(U\leqslant1)=\dfrac{3}{4}$，$P(U>1)=\dfrac{1}{4}$.

$P\{(X, Y)=(-1, -1)\}=P\{U\leqslant -1, U\leqslant 1\}=P\{U\leqslant -1\}=\frac{1}{4}$,

$P\{(X, Y)=(-1, 1)\}=P\{U\leqslant -1, U>1\}=0$,

$P\{(X, Y)=(1, -1)\}=P\{U>-1, U\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$,

$P\{(X, Y)=(1, 1)\}=P\{U>-1, U>1\}=P\{U>-1\}=\frac{1}{4}$,

从而(X, Y)的分布是：

$(-1, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	$(1, 1)$
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

由此，$X+Y$ 的分布是

-2	0	2
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

且$(X+Y)^2$ 的分布是

0	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

(Ⅱ)$E(X+Y)=-\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=0$，从而 $D(X+Y)=E[(X+Y)^2]=2$.

模拟试卷(二)

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A)极限不存在　　(B)极限存在但不连续

(C)连续但不可导　　(D)可导

2. 设 $g(x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x^2+1), & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{3}(x-1), & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，则 $g(x)$ 在区间(0, 2)内(　　).

(A)无界　　(B)递减　　(C)不连续　　(D)连续

3. 设 y 是由方程 $\int_0^y e^t\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^x \sin t\mathrm{d}t=0$ 所确定的 x 的函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$(　　).

(A)$\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$　　(B)$-\dfrac{\sin x}{\cos x+1}$　　(C)$\dfrac{\cos x}{e^y}$　　(D)$-\dfrac{\cos x}{e^y}$

4. 设可微函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处取得极小值，则下列结论正确的是(　　).

(A)$f(x_0, y)$ 在 $y=y_0$ 处导数为零　　(B)$f(x_0, y)$ 在 $y=y_0$ 处导数大于零

(C)$f(x_0, y)$ 在 $y=y_0$ 处导数小于零　　(D)$f(x_0, y)$ 在 $y=y_0$ 处导数不存在

5. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=1$，则下列结论不正确的是(　　).

(A)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可逆

(B)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹为零

(C)特征值 -1，1 对应的特征值向量正交

(D)方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有一个线性无关的解向量

6. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　　).

(A)合同，且相似　　(B)合同，但不相似

(C)不合同，但相似　　(D)既不合同，也不相似

7. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，则必有(　　).

(A)$\sigma_1<\sigma_2$　　(B)$\sigma_1>\sigma_2$　　(C)$\mu_1<\mu_2$　　(D)$\mu_1>\mu_2$

8. 对于任意两个随机变量 X 和 Y，若 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$，则(　　).

(A)$D(XY)=D(X)\cdot D(Y)$　　(B)$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(C)X 和 Y 独立　　(D) X 和 Y 不独立

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

9. 设方程 $e^{xy}+y^2=\cos x$ 确定 y 为 x 的函数，则 $\frac{dy}{dx}=$ ________.

10. $\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}dx=$ ________.

11. 函数 $f(u, v)$ 由关系式 $f[xg(y), y]=x+g(y)$ 确定，其中函数 $g(y)$ 可微，且 $g(y)\neq 0$，则 $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$ ________.

12. 交换积分次序 $\int_0^{\frac{1}{4}}dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)dx=$ ________.

13. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^3$ 的秩为________.

14. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X, Y\}\leqslant 1\}=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$

16. (本题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近的凹凸性.

17. (本题满分 10 分)

已知 $f(x, y)=x^2\arctan\frac{y}{x}-y^2\arctan\frac{x}{y}$，求 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

18. (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$，已知 $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)dx$ 的值.

19. (本题满分 10 分)

设 $a_0=1$，$a_1=\frac{7}{2}$，$a_{n+1}=-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)a_n$，$n\geqslant 2$，证明：当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，并求其和函数 $S(x)$.

20. (本题满分 11 分)

设 4 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1+a, 1, 1, 1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2, 2+a, 2, 2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3, 3, 3+a, 3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4, 4, 4, 4+a)^T$，问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.