京师 数学教育丛书

（第2版）

数学教学心理学

SHUXUE JIAOXUE XINLIXUE

曹一鸣 王光明 代 钦◎丛书主编
喻平◎著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

京师 数学教育丛书

（第2版）

数学教学心理学

SHUXUE JIAOXUE XINLIXUE

曹一鸣 王光明 代 钦◎丛书主编

喻平◎著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学教学心理学/喻平著. —2版. —北京：北京师范大学出版社，2018.5
(数学教育丛书)
ISBN 978-7-303-23439-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①喻… Ⅲ. ①数学教学—教学心理学—中小学 Ⅳ. ①G633·602

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第021598号

营销中心电话 010-62978190 62979006
北师大出版社科技与经管分社 www.jswsbook.com
电子信箱 jswsbook@163.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：730 mm×980 mm 1/16
印　　张：24.75
字　　数：390千字
版　　次：2018年5月第2版
印　　次：2018年5月第1次印刷
定　　价：49.80元

策划编辑：刘风娟 梁志国　　责任编辑：刘风娟 梁志国
美术编辑：刘 超　　装帧设计：刘 超
责任校对：赵非非 黄 华　　责任印制：赵非非

数学教育丛书

顾　　问　徐利治　张景中　张奠宙
　　　　　张英伯

主　　编　曹一鸣　王光明　代　钦

丛书编委会（按姓氏笔画为序）

马云鹏　王光明　孔凡哲　代　钦
宁连华　宋乃庆　张生春　张英伯
张春莉　张景中　张奠宙　松宫哲夫
徐利治　徐斌艳　高　夯　涂荣豹
黄秦安　曹一鸣　喻　平

第2版总序

现代社会的发展与进步离不开教育，教师是影响教育水平、“办好人民满意的教育”的一个关键因素。因此，教师的质量在很大程度上决定了教育的质量。2018 年 2 月，在教育部等五部门印发的《教师教育振兴行动计划(2018—2022 年)》中，明确提出：“全面提高师范生的综合素养与能力水平。根据各地实际，为义务教育学校培养更多接受过高质量教师教育的素质全面、业务见长的本科层次教师，为普通高中培养更多专业突出、底蕴深厚的研究生层次教师”“满足保障国民教育和创新人才培养的需要。”“按照有关程序办法，增加一批教育硕士专业学位授权点。引导鼓励有关高校扩大教育硕士招生规模，对教师教育院校研究生推免指标予以统筹支持。”

教师的综合素养和能力的发展受多方面因素影响和制约。教师的学科教学知识则是其中一个重要方面，并对学生学习产生显著作用。自舒尔曼提出教学内容知识(Pedagogical Content Knowledge，PCK)的概念后，研究者们从两个方面对教师知识进行研究，一方面是影响教学的教师知识类别及其理论，另一方面通过发展测试工具去研究教师知识。近年来，数学教育界的研究者沿着 PCK 概念，针对数学教学内容知识的内涵、构成、特征、发展途径等方面，从数学教学知识的理论(如：Mathematical Knowledge for Teaching，MKT)等多方面开展数学教学知识的测量以及教师的数学教学知识与课堂教学其他因素之间的关系等进行了一系列的研究与探索，对数学教师专业发展及培训

目 录

第1章 数学教学心理研究的历史沿革

数学教学心理学作为一个专门的研究领域，其历史只有40多年，它是数学教学理论与心理学结合的产物，它的发展经历了借用心理学理论解释数学学习心理现象到数学教学心理自身理论建构与发展的历程。本章从国外和国内两个方面就数学教育心理学研究的历史作一个梳理，从而明晰涵盖于数学教育心理学中的数学教学心理学研究的问题、结论及走向。

1.1 国外数学教学心理研究概况

将数学教育心理学作为专门研究领域始于20世纪70年代。在第3届国际数学教育大会(ICME)召开期间，国际数学教育心理学组织(PME)于1976年在德国的卡尔斯鲁厄成立，第1届数学教育心理学大会于1977年由弗赖登塔尔(Freudenthal)在荷兰的乌特列支组织召开。此后，国际数学教育心理学组织每年都会在全球的某个地方组织召开大会。国际数学教育心理学组织已发展成教育研究领域中最成功的国际合作研究的典范之一。当前，这种发展趋势仍在持续，经过国际数学教育心理学组织的不懈努力，不断地寻找和发展新的研究数学的教和学的方法，并且整合其他学科研究领域中所出现的新观点，使数学教育心理的研究得到了长足的发展。

下面围绕国际数学教育心理学大会的学术论文集介绍国际数学教学心理研究概况，这些论文集详细概述了那个时期该研究领域中的研究现状。①

1.1.1 代数的教和学的研究

代数的教与学始终是数学教育心理学共同体研究的重要分支，从1977年第1届数学教育心理学大会到2005年第29届数学教育心理学大会，此期间共有33篇关于代数研究的报告。早期的研究主要关注代数概念和过程、解代数应用题以及从算术学习转变到代数学习过程中学生所遇到的困难。字母、符号的学习是被研究的主要课题，用于分析研究数据的基本理论框架多源于皮亚杰(Piaget)的认知发生原理。随着研究的深入，数学教学心理学的研究范围得到

① Gutierrez A, Boero P. Handbook of research on the psychology of mathematics education past, present and future[M]. Netherlands: Sense Publishers, 2006.

了进一步的拓展，它涵盖了表征符号、技术工具的应用、关于代数内容的不同观点以及用于思考代数学习、教学和用于分析数据的各种不同理论框架。

1. 算术学习到代数学习的转变

早期，数学教育心理学共同体中的代数研究者一般都把代数课程看成是给定的课程，他们主要关注学生在遇到代数符号和代数运算时的思维和方法，因为从算术向代数的转变过程中，这些符号和记号的意义会发生转变。早期关于学生解释代数符号方式的研究趋向于关注认知水平[①]，关注算术体验和思维方式[②]，关注符号应用的困难，如带有乘法意义的等号[①]，以及括号的使用。

早期很多研究都关注初学代数的学生解方程的方法：①本能方法，包括使用数字事实、计数技巧以及隐藏法。②尝试错误法。③标准方法。学生在解方程中所出现的错误也是研究者的兴趣所在，例如，忽视将这一对数字结合起来的减号运算；方程变形的错误，以及错误的检验行为。更为近期的研究已经开始深入探究学生解不等式的方法，解方程组的方法，他们发现已经学习过一元一次方程的学生更乐于使用“加减法”而不是“代入法”。在解应用题的过程中，有学者探讨了真实的、现实的情境影响，也研究了在解决长度和面积问题的过程中，画不正确的直线图所导致的后果，他们发现：真实性因素和画图活动对学生的解题活动没有产生有益的影响，事实上，真实问题反而使学生远离了问题潜在的数学结构。

在这个研究主题组中，更为近期的研究反映在理论和方法上的转变，这些转变在过去 25 年当中经常发生。建构主义的理论框架在 20 世纪 80 年代得到了蓬勃发展，建构主义认为知识是认知主体主动建构的，而不是从环境中被动接受的，这个观点吸引了众多数学教育心理研究者的研究兴趣，这一理论也使得代数研究者把注意力从学生所犯的错误转移到他们是如何理解代数概念和过程的。尽管研究的焦点仍然属于认知范畴，但是它比早期的研究范围更为广阔。

20 世纪 90 年代，社会—文化理论观点在数学教育心理学共同体之外发展起来，并开始在数学教育心理学共同体内形成。对于很多从事代数教学心理的研究者来说，从较为早期的建构主义、认知方向的研究开始转向研究影响代数

① Kieran C. Concepts associated with the equality symbol[J]. Educational Studies in Mathematics, 1981, 12(12): 317-326.

② Booth L R. Algebra: Children’s strategies and errors[M]. Windsor: NFER-Nelson, 1984.

学习的社会因素分析，并开始对文化工具的调节作用产生兴趣。这种转变也导致课堂文本的研究得到迅速发展，课堂文本的研究开始关注教师与学生、学生与学生之间的互动。

2. 代数学习中工具的作用

20世纪80年代，代数研究主要关注字母和符号，这种研究开始经历一些变革。尽管函数研究在最初几年一直被认为是一个独立的研究领域，但是，这两个领域的研究开始在代数研究领域中发生了融合。带有图形的、表格的、符号表征形式的函数开始被看成是真实的代数研究对象，尤其是图形表征形式开始被看成是融合字母—符号表征形式和意义的工具。有些数学家和数学教育家主张：计算技术对中学数学和大学数学的内容和难度可能会产生重要影响。早期一些富有远见的研究者就已经提出了这个观点，即在数学教学中，计算技术有利于更为全面地整合数学对象的多元表征形式。

对这个时期的研究产生重要影响的是技术工具的应用，技术工具可以应用于代数学习中。技术工具的使用不仅促使函数研究从多元表征形式研究向学校代数领域发展，也成功地增多了学习代数的学生获得代数意义的途径。代数不仅仅成为关于方程式和解方程式的研究，也逐步发展成为涵盖函数(及其表征形式)及其转变的研究，并且涵盖了这些函数所能模拟的真实世界情境。社会—文化观点也被应用于学习研究设计和数据分析中，两者的综合产生了新的问题，这些问题主要涉及在课堂中用这些工具进行学习的本质以及不同参与者的作用。

3. 代数思维

研究主题涉及小学生代数思维，关注代数教师及教学，关注物理环境的动态模式和其他动态代数环境。

随着以方程式为主题的代数研究逐步扩展到以函数和各种各样的函数表征形式所模拟的真实世界情境的研究，代数可以被更多的学生所理解，甚至小学生也可以理解代数，这个观点被不断地完善。关于小学阶段代数思维发展的研究，在20世纪90年代中期的数学教育心理学大会上首次出现。大约同一时间，关于代数教师的研究也发展迅猛。在数学教育心理学发展的整个过程当中，代数学习者成为代数研究者关注的焦点。

与此同时，20世纪90年代中期，研究主要关注代数学习中的动态环境、物理环境的探索和模式化与技术工具的整合，可以在这些研究中看到与技术相关的代数研究中所出现的进展。新的技术观点正在形成，试图更加准确地思考代数学习的各个方面，这些方面正在被研究，尤其是手势、身体运动以及语言

在代数学习中所起的作用。

早期算术研究所关注的一些重要主题主要涉及自然数、数列以及计数的学习。皮亚杰理论、计数为主的方法，主导着关于自然数概念的研究，但是这两种方法并不是相互冲突的，在更广的理论视野中，它们是互补的。皮亚杰理论把逻辑推理看成是自然数概念建构的基础，而计数为主的方法则主张数字概念衍生于计数技巧，但是这种计数技巧形成于数量化的过程之中。

研究涉及范围包括：第一，计算策略的认知分析，如儿童在个位数的乘法和除法研究领域中计算策略的特征和发展①、儿童多位数的计算②、学习成绩较差的学生所获得的简单的算术策略③。第二，在不同环境中发展算术能力，关注 3 个主题：①具有高度教育意义的环境的设计、应用和评价，这些环境兼容了数学专业知识的性质观和数学学习作为社会文化情境中的主动的、联合的意义建构的观点。②教师知识、信念和活动在这类学习环境中的作用。③校外情境中的算术知识和技巧的获得和使用，这些知识和技巧与学校数学存在潜在的联系，促进学校数学的发展。显然，所有这些内容不仅仅在算术领域中非常重要，在数学领域的学习中也是非常重要的。

研究还涉及解决应用问题。为了考查学生如何解应用题，一些研究者始终关注基于图式测验的方法。这些方法充分应用了问题的图形表征形式，借此来测试或提高小学生所要学习的概念知识结构。同时，数学教育心理学研究共同体也越来越关注在解数学问题的环境中认知和元认知(或者自我调节)策略的作用，以及不同类型的情感、情绪和信念之间的相互关系对解决问题的影响④、开放性问题。

数学建模也是一个重要的研究主题，主要强调问题的真实情境、解题策略

---

① Mitchelmore M C, Mulligan J T. Children's developing multiplication and division strategies[J]//L Puig, A Gutierrez. Proceedings of the 20th PME International Conference, 1996.

② Cooper T J, Heirdsfield A M, Irons C J. Year 2 and 3 children's correct-response mental strategies for addition and subtraction word problems and algorithmic exercises[J]//L Puig, A Gutierrez. Proceedings of the 20th PME International Conference, 1996.

③ Gray E M, Pitta D, Tall D O. The nature of the object as an integral component of numerical processes[J]//E Pehkonen. Proceedings of the 21st PME International Conference, 1997.

④ Marcou A, Philippou G. Motivational beliefs, self-regulated learning, and mathematical problem solving[J]//H L Chick, J L Vincent. Proceedings of the 21st PME International Conference, 2005.

和问题解决的态度。这些实验方案的共同特征包括：①使用比传统教材中的问题更加实际的、更具挑战性的任务。②教学方法和学习者活动具有多样性，包括专家解题策略的模拟、小组研究和全班讨论的策略性因素。③课堂环境的创造，这种环境有助于小学生进一步完善数学模式化的观点，促进小学生发展数学的信念和态度。①

1.1.2 几何与空间思维

关于几何与空间思维的研究，主要关注的课题是思维水平、思维策略、视觉化、证明和技术等。

1. 范希尔(Van Hiele)的几何思维模式

范希尔夫妇提出了几何思维模式，这个模式由5个推理水平构成：认识(感知仅仅是视觉的)、分析(根据性质辨别图形)、分类或非正式的演绎(意识到性质的重要性)、正式演绎(建构几何证明)、严密性(这个要素表明从前一个水平进行运算和辨别是很困难的)。思维发展源自格式塔式的视觉水平，主要经过描述、分析、抽象和证明这几个水平，这些水平的复杂程度是逐渐增加的。范希尔夫妇认为教学应该适应学生的思维水平，并提出了教和学的模式，这个模式提出了促使学生从一个思维水平发展到另一个思维水平的建议。

随后，许多学者对范希尔的几何思维模式展开了不同侧面的研究。有人研究了这些思维水平的层次性，认为这些思维水平具有非连续层次性，每一个水平都取决于对前一个水平的掌握②，但是，布格(Burger)和沙尼斯(Shaughnessy)指出，这些水平是动态的、连续的，而不是静止的、间断的③。

范希尔的几何思维模式描述了学生几何能力的发展，因此对思维水平之间的转变就成为若干研究的焦点。有人认为很难对学生的思维水平进行分类，尤其是从水平2向水平3的转变，还有一些研究指出存在一个更加基本的水平，这个思维水平要比范希尔的水平1(视觉思维)更为基本。

---

① English L D, Watters J J. Mathematical modeling with young children[J]// M J Hoines, A B Fuglestad. Proceedings of the 28th PME International Conference, 2004.

② Afonso M C, Camacho M, Socas M M. Teacher profile in the geometry curriculum based on the van hiele theory[J]// O Zaslavsky. Proceedings of the 23rd PME International Conference, 1999.

③ Burton L, Cooper M, Leder G. Representations of three-dimensional figures by mathematics teachers-in-trainging[J]// Univ. of London Institute of Education. Proceedings of the 10th PME International Conference, 1986.

一些研究者已经提出了评价范希尔思维水平的不同方法，并且对这些方法进行了评价。古铁雷斯(Gutierrez)和詹姆(Jaime)对职前教师进行了多边形测量和立方体的测验，并证明了范希尔水平1到水平4的层次性，但是研究者认为水平5(严密性)要通过进一步的研究去确认。①

2. 几何问题解决策略

格杰里奥(Gorgorio)把空间问题的解决策略具体描述成以下几类：①结构化策略，这种策略可以涉及过去的体验或者简化问题。②过程化策略(视觉的或者语言的策略)。③近似策略(整体策略或者部分策略)。她发现在使用结构化策略的时候存在一些性别差异。②

关于元认知策略的研究，有学者的研究表明，对于年纪较大的学生来说元认知策略是非常重要的，但是对于年纪较小的学生来说，元认知策略对于他们解决问题的作用不大。

有研究表明，在问题解决过程中，学生会使用各种话语和画图策略。他们以观察为基础作出简图，或者根据已知的概念形成一系列信息，通过画图和明确任务目标的方法可以简化一长串的信息。

3. 视觉推理

古铁雷斯总结了关于视觉化的诸多争论。他注意到视觉化过程涉及以下几点：①解释形成心理意象的外部表征。②解释心理意象，从而生成信息。两种解释都得到视觉化能力的支持，如对图形的感知、心理旋转、空间位置的感知、空间关系的感知、关注除其他性质之外的图形性质的能力。这些视觉化过程(解释能力和视觉化能力)形成了视觉推理。

一些研究者发现：学生使用图像来建构数学意义，并假设在数学课堂中，图像可以支持有意义的、联系性的数学发展。欧文斯(Owens)指出：在解决空间问题的过程中，年纪较小的学生所使用的图像的范围是相似的。她把这些图像分成以下5个类型：①初级的或者是正在形成的策略。②感知策略(需要使用的材料)。③静止的图像策略。④模式和动态图像。⑤有效策略(使用视觉知

① Gutierrez A, Jaime A. Estudio de las caracteristicas de los nivele de van hiele[J]//J G Bergeron, N Herscovics, C Kieran. Proceedings of the 11th PME International Conference, 1987.

② Gorgorio N. Choosing a visual strategy: The influence of gender on the solution process of rotation problems[J]//L Puig, A Gutierrez. Proceedings of the 20th PME International Conference, 1996.

识和语言知识可以解释这个策略)。① 视觉图像是若干认知过程中的一个阶段，它有助于解决空间问题。其他认知过程是有选择的介入，如感知、聆听、观察、思维、概念化以及启发式方法，即确定问题的意义、发展缄默知识、自我监督和检验。在这个过程中，也伴随着成功、信心、兴趣、对开放情境的包容等情感因素。欧文斯研究的重要意义就在于这项研究是以课堂为依据的，这就表明在空间-视觉思维方面存在的分歧比之前所预测的还要大。

近些年来，一些研究者已经把关注的焦点放在了动态几何技术上面。法国的格诺伯(Grenoble)研究小组，把动态几何软件的应用归纳为以下4种方法：①借助于计算结果，使得画图变得更加简便，这类似于纸笔画图。②使得数学任务变得更加容易解决，这种任务涉及猜测和归纳诸多例子，以期找到解决方法。③改变要求使用性质而不是依靠感知来解决问题的状况。④在动态几何软件环境中可以使学生获得新的数学任务。

1.1.3 高级数学思维

20世纪80年代初，为了弥补之前数学教育心理学过度关注小学数学思维研究的缺陷，一些数学教育心理研究人员，主要是厄文克(Ervynck)和塔尔(Tall)，提出需要考虑“学校数学进一步促进大学数学的发展，并且使之与数学家的思维相联系”。这方面的研究最终促使高级数学思维(Advanced Mathematics Thinking，AMT)研究小组的成立，该研究小组会议于1986年首次召开，并着手撰写同名学术专著《高级数学思维》(塔尔，1991)。因此，在数学教育心理学领域之内，从中学高年级的数学一直延伸至以定义和证明为基础的公理数学，其数学思维的整体范围被涵盖在术语“高级数学思维”之下。

之后，在其他研究领域中，研究者就“高级数学思维”的意义各执己见，术语“高级的”是指数学，还是思维，还是数学和思维？事实上，正如斯腾伯格(Sternberg)在一本关于数学思维本质的著作中所做的结论那样，迄今为止，数学思维到底是什么还没有一个一致的说法。

关于大学生学习不同特定主题的研究成果非常丰富，研究的范围包括计算法、线性代数、微分方程、函数、等价关系、超越数等。而且，研究者对数学家进行了观察和访谈，了解他们教授各种高等数学科目的情况，也对大学生进行了调查研究，了解他们对于数学的教与学的看法，还探讨了数学专业博士生

---

① Owens K. The role of visualization in young students' learning[M]//O Zaslavsky. Proceedings of the 23rd PME International Conference，1999.

的学习经验。

1. 概念意象和概念定义

20世纪80年代初，当心理学家还在重新思考概念的本质和发展时，一些数学教育心理学者开始把关注的焦点转向数学概念是如何定义和如何使用之间的区别。维纳(Vinner)与赫什科威兹(Hershkowitz)提出了概念定义和概念意象这两个术语，以便区分概念的正规的、公共的定义和个体相应的心理结构之间的差异，概念的心理结构由学生头脑中的所有相关例子、反例、事实和关系组成。概念意象是指与一个概念相联系的个体所具有的全部认知结构，它包括所有相关的心理图像、性质和过程。个体的概念意象建立在多年的经验基础之上，在个体遇到新的刺激时，概念意象会随之发生相应的变化。概念定义则被用来界定一个概念的语句形式。概念定义可以是个人的，也可以用正规的方式进行界定，用正规方式进行界定的就是概念定义，它在很大程度上被数学共同体机构化了，比如，极限的 ε-δ 定义就是一个例子。

关于概念意象和概念定义的研究，研究者主要关心如何促进学生概念意象的发展，从而促进他们正确理解正规的概念定义。学生的概念意象不仅包括他们已有的重要知识，也建立在这种知识基础之上。通过不同的经验，包括日常经验，学生可以获得这种重要知识。在对不同的相关数学任务做出反馈时，很多学生容易生成(部分的)自己的概念意象，而不是概念定义，这种趋势不一定是不好的。但是，很多数学概念，如一致的收敛函数序列的概念，都是通过正规的概念定义介绍给大学生的，并且使用这类定义给出正例和反例的能力有助于建立个体自己的概念意象。

2. 数学定义和日常定义之间的区别

德维利尔斯(De Villiers)认为定义有下列两种类型：①描述性定义，它通过选择一些特殊性质，描述已知物体。在这种情况下，概念是人所熟知的，并且在之后才被定义。②建构性定义，它根据熟悉的事物模拟新的事物。通过排除、归纳、专门化、代替或增加定义的特征，一个概念的给定定义发生了变化，这时建构性定义就会产生，在这个过程中，一个新的概念就会被建构出来。

数学定义的特征包括以下几个方面：①存在的(应该存在的一个例子)。②非矛盾的(内部一致)。③清晰的(定义一个唯一的概念)。④与相同概念的其他定义是逻辑等价的。⑤层次分明的(如仅仅根据基本的或者之前被定义的术语)。⑥变化中的不变性，即表征的不变性。而且，定义应该：①关注创造定义的目的。②被很好地定义。③以可用的形式被陈述。虽然他们对其他观点还尚未达成一致，但是他们认为定义应该是：①最小的(简洁的、没有多余的条

件)。②精雕细琢的(很难清楚表达的、主观的标准)。③学生容易理解的(教学思想)。

为了观察中学数学教师和12年级的学生是如何看待定义的这些特征的，希尔(Shir)和扎斯拉维斯基(Zaslavsky)进行了一项研究，他们建构了正方形的8个等价定义，首先观察个体对这个问卷的反馈，然后再观察群体对该问卷的反馈，这项研究从属于一个更为大型的研究。在这些教师中，关于为什么接受或拒绝所提供的正方形定义，他们给出的理由各不相同，21%的教师同意："所有的长方形都有固定的周长，正方形是具有最大面积的长方形"；92%的教师同意："正方形是一个四边形，在这个四边形中，所有的边都是相等的，所有的角都是90度"。这两种定义对于正方形来说都是合适的。研究者认为：尽管这种活动被设计成一种研究工具，但是这种活动有助于创造丰富的学习环境，从而便于学生更加容易地发现数学定义的不同特征。

3. 概念获得

除了解释和理解形式的数学定义和使用下定义的活动，还有其他认识概念的方法，如比较这个概念的各种各样的等价定义、转变这个概念的(多元的)表征形式、认知这个概念的多元性质、生成与其他概念之间的联系。① 除此之外，个体可以获得给定概念的运算(过程)观，或者这个概念的结构(对象)观。前者意指一个更加具有计算性质和程序性质的观点，而后者意指一个更加正规的、静止的、类似于物体的观点。

斯法德(Sfard)注意到，结构观念的形成是一个漫长而痛苦的过程，他假设结构观念体现在3个具有层次性的阶段：内化、凝聚、物体化。在内化阶段，学习者关注熟练地进行计算和解题过程(如用各种各样的特定函数进行代数运算)；在凝聚阶段，学习者更加注重把过程作为一个整体进行思考，而不是关注细节(如从输入和输出的角度观察函数)。概念获得的最初两个阶段发生的转变是逐步的，而物体化需要一种本体论的转变，即需要用一种全新的视野迅速辨别熟悉事物的能力。为此，斯法德提出了两个教学原则：①不应该用结构术语介绍新的概念。②只要学生可以不用结构方法就能解决问题，就不应该

① Duval R. Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning[J]//F. Hitt, M Santos. Proceedings of the 21st PME-NA International Conference, 1999.