



面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

工科数学分析基础

第三版 下册

● 马知恩 王绵森 主编

高等教育出版社



面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

工科数学分析基础

第三版 下册

● 马知恩 王绵森 主编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书第一版是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪课程教材和教育部工科数学学科“九五”规划教材,普通高等教育“九五”国家级重点教材,曾获教育部 2002 年全国普通高等学校优秀教材一等奖;第二版是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。第三版分上、下两册出版,第 1—4 章为上册,主要内容为一元函数微积分与常微分方程;第 5—7 章为下册,主要内容为多元函数微积分与无穷级数。

本书在保持第二版编写特色的基础上,根据几年来的教学实践经验,进行了较大的修订。适当降低了本书的难度,同时对部分内容进行了改写,使得本书思路更加简明,更加符合认识规律,更易于读者接受。在教材的表现形式上,采用双色印刷,并增加了边注和二维码,以满足读者的个性化学习需求。在习题的选配,仍然分为 A、B 两类,并配有综合练习题,删去了一些难题,增加了一些基本训练题,还特别增加了章后习题,在书末附有部分习题答案与提示。

本书既可作为高等理工科院校的非数学类专业本科生教材,也可供其他专业选用和社会读者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析基础. 下册 / 马知恩, 王绵森主编

. -- 3 版. -- 北京: 高等教育出版社, 2018.2

ISBN 978-7-04-049115-9

I. ①工… II. ①马… ②王… III. ①数学分析-高等学校-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 312683 号

策划编辑 蒋青	责任编辑 蒋青	特约编辑 高旭	封面设计 姜磊
版式设计 张杰	插图绘制 杜晓丹	责任校对 胡美萍	责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 大厂益利印刷有限公司
开 本 787 mm×1092 mm 1/16
印 张 23.75
字 数 450 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 1998 年 11 月第 1 版
2018 年 2 月第 3 版
印 次 2018 年 2 月第 1 次印刷
定 价 47.10 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 49115-00



面向21世纪课程教材



“十二五”普通高等教育
本科国家级规划教材



普通高等教育“十五”
国家级规划教材



普通高等教育“九五”
国家级重点教材

目 录

第五章 多元函数微分学及其应用	1
第一节 n 维 Euclid 空间 \mathbf{R}^n 中点集的初步知识	1
1.1 n 维 Euclid 空间 \mathbf{R}^n	1
1.2 \mathbf{R}^n 中点列的极限	3
1.3 \mathbf{R}^n 中的开集与闭集	4
1.4 \mathbf{R}^n 中的紧集与区域	9
习题 5.1	10
第二节 多元函数的极限与连续性	10
2.1 多元函数的概念	10
2.2 多元函数的极限与连续性	15
2.3 有界闭区域上多元连续函数的性质	19
习题 5.2	20
第三节 多元数量值函数的导数与微分	22
3.1 偏导数	22
3.2 全微分	27
3.3 方向导数与梯度	35
3.4 高阶偏导数和高阶全微分	43
3.5 多元复合函数的偏导数和全微分	45
3.6 由一个方程确定的隐函数的微分法	52
习题 5.3	55
第四节 多元函数的 Taylor 公式与极值问题	59
4.1 多元函数的 Taylor 公式	60
4.2 无约束极值、最大值与最小值	63
4.3 有约束极值, Lagrange 乘数法	72
习题 5.4	77
第五节 多元向量值函数的导数与微分	78

5.1 一元向量值函数的导数与微分	79
5.2 二元向量值函数的导数与微分	82
5.3 微分运算法则	87
5.4 由方程组所确定的隐函数的微分法	91
习题 5.5	95
第六节 多元函数微分学在几何上的简单应用	97
6.1 空间曲线的切线与法平面	97
6.2 弧长	102
6.3 曲面的切平面与法线	106
习题 5.6	114
第七节 空间曲线的曲率与挠率	116
7.1 Frenet 标架	116
7.2 曲率	120
7.3 挠率	127
习题 5.7	129
第 5 章习题	130
综合练习题	133
第六章 多元函数积分学及其应用	134
第一节 多元数量值函数积分的概念与性质	134
1.1 物体质量的计算	134
1.2 多元数量值函数积分的概念	136
1.3 积分存在的条件和性质	139
习题 6.1	140
第二节 二重积分的计算	141
2.1 二重积分的几何意义	141
2.2 直角坐标系下二重积分的计算法	142
2.3 极坐标系下二重积分的计算法	149
2.4 曲线坐标下二重积分的计算法	153
习题 6.2	159
第三节 三重积分的计算	162
3.1 化三重积分为单积分与二重积分的累次积分	162
3.2 柱面与球面坐标下三重积分的计算法	166

习题 6.3	175
第四节 含参变量的积分与反常重积分	177
4.1 含参变量的积分	178
4.2 反常重积分	182
习题 6.4	186
第五节 重积分的应用	187
5.1 重积分的微元法	187
5.2 应用举例	191
习题 6.5	194
第六节 第一型线积分与面积分	195
6.1 第一型线积分	195
6.2 第一型面积分	199
习题 6.6	205
第七节 第二型线积分与面积分	208
7.1 场的概念	208
7.2 第二型线积分	210
7.3 第二型面积分	216
习题 6.7	224
第八节 各种积分的联系及其在场论中的应用	227
8.1 Green 公式	227
8.2 平面线积分与路径无关的条件	232
8.3 Gauss 公式与散度	240
8.4 Stokes 公式与旋度	247
8.5 几种重要的特殊向量场	254
习题 6.8	260
第 6 章习题	264
综合练习题	267
第七章 无穷级数	269
第一节 常数项级数	269
1.1 常数项级数的概念、性质与收敛原理	269
1.2 正项级数的审敛准则	274
1.3 变号级数的审敛准则	280

习题 7.1	285
第二节 函数项级数	289
2.1 函数项级数的处处收敛性	289
2.2 函数项级数的一致收敛性概念与判别方法	291
2.3 一致收敛级数的性质	294
习题 7.2	297
第三节 幂级数	298
3.1 幂级数及其收敛半径	298
3.2 幂级数的运算性质	303
3.3 函数展开成幂级数	306
3.4 幂级数的应用举例	312
习题 7.3	315
第四节 Fourier 级数	318
4.1 周期函数与三角级数	318
4.2 三角函数系的正交性与 Fourier 级数	319
4.3 周期函数的 Fourier 展开	321
4.4 定义在 $[0, l]$ 上函数的 Fourier 展开	327
* 4.5 Fourier 级数的复数形式	328
习题 7.4	332
第 7 章习题	334
综合练习题	337
附录 部分曲面和空间立体的图形	338
部分习题答案与提示	347
二维码清单	367
参考文献	371

1.2 \mathbf{R}^n 中点列的极限

有了 \mathbf{R}^n 空间中距离的概念, 我们就能仿照数列(即 \mathbf{R} 中的点列)极限的概念和有关性质来讨论 \mathbf{R}^n 中的点列极限的概念和相应的性质.

定义 1.1 (点列的极限) 设 $\{x_k\}$ 是 \mathbf{R}^n 中的一个点列, 其中 $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$, 又设 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是 \mathbf{R}^n 中的一固定点, 若当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\rho(x_k, a) \rightarrow 0$, 即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得 } \forall k > N, \text{恒有 } \|x_k - a\| < \varepsilon, \quad (1.6)$$

则称点列 $\{x_k\}$ 的极限存在, 且称 a 为它的极限, 记作

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \quad \text{或} \quad x_k \rightarrow a \quad (k \rightarrow \infty).$$

这时也称点列 $\{x_k\}$ 收敛于 a .

定理 1.1 设点列 $\{x_k\} \subseteq \mathbf{R}^n$, 点 $a \in \mathbf{R}^n$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$ 的充要条件是 $\forall i = 1, 2, \dots, n$, 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = a_i$.

证 由于 $\forall i = 1, 2, \dots, n$, 恒有

$$|x_{k,i} - a_i| \leq \|x_k - a\|.$$

根据定义 1.1 立即可证明必要性. 下面证明充分性.

设 $\forall i = 1, 2, \dots, n$, 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k,i} = a_i$, 则

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_i \in \mathbf{N}_+, \text{使得 } \forall k > N_i, \text{恒有 } |x_{k,i} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

令 $N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$, 则 $\forall k > N$, 必有

$$|x_{k,i} - a_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

从而 $\forall k > N$, 有

$$\|x_k - a\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{k,i} - a_i)^2} < \varepsilon,$$

故 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. \blacksquare

定理 1.2 设 $\{x_k\}$ 是 \mathbf{R}^n 中的收敛点列, 则

- (1) $\{x_k\}$ 的极限是唯一的;
- (2) $\{x_k\}$ 是有界点列, 即 $\exists M (\in \mathbf{R}) > 0$, 使得 $\forall k \in \mathbf{N}_+$, 恒有 $\|x_k\| \leq M$;
- (3) 若 $x_k \rightarrow a, y_k \rightarrow b$, 则 $x_k \pm y_k \rightarrow a \pm b, \alpha x_k \rightarrow \alpha a, \langle x_k, y_k \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$, 其中 $\alpha \in \mathbf{R}$;
- (4) 若 $\{x_k\}$ 收敛于 a , 则它的任一子(点)列也收敛于 a .

由于 \mathbf{R}^n 中的向量不能比较大小, 也不能相除, 因此, 数列极限中与单调性、保序

注: 定理 1.1 表明, \mathbf{R}^n 中点列 $\{x_k\}$ 收敛于 a 等价于该点列的各个坐标(或分量)所构成的数列 $\{x_{k,i}\}$ 分别收敛于点 a 的相应坐标(或分量) a_i . 从而, 它把研究 \mathbf{R}^n 中点列的收敛问题转化为实数列(即一维空间 \mathbf{R} 中的点列)的收敛问题. 这种“化多为一”的思想方法是一种将“未知”化为“已知”的方法, 在多元函数微积分中经常使用. 读者应认真学习, 并用这种方法证明定理 1.2 中的(3).

性、确界以及商有关的概念与命题不能直接地推广到 \mathbf{R}^n 中的点列. 但是, Bolzano-Weierstrass 定理与 Cauchy 收敛原理在 \mathbf{R}^n 中仍然成立.

利用第一章定理 2.9 不难证明下面的定理.

定理 1.3 (Bolzano-Weierstrass 定理) \mathbf{R}^n 中的有界点列必有收敛子列. (\mathbf{R}^n 中点列 $\{x_k\}$ 的收敛子列的极限也称为 $\{x_k\}$ 的极限点.)

设 $\{x_k\}$ 是 \mathbf{R}^n 中的点列, 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得 } \forall k > N \text{ 及 } p \in \mathbf{N}_+, \text{恒有 } \|x_{k+p} - x_k\| < \varepsilon,$$

则称 $\{x_k\}$ 是 \mathbf{R}^n 中的基本点列或 Cauchy 点列. 类似于定理 1.1 不难证明: $\{x_k\}$ 是 Cauchy 点列的充要条件是 $\forall i = 1, 2, \dots, n, \{x_{k,i}\}$ 都是 Cauchy 数列. 根据第一章中所介绍的数列的 Cauchy 收敛原理, 立即可以得到 \mathbf{R}^n 中点列的 Cauchy 收敛原理如下.

定理 1.4 (Cauchy 收敛原理) \mathbf{R}^n 中点列 $\{x_k\}$ 收敛于 \mathbf{R}^n 中的点的充要条件为 $\{x_k\}$ 是 \mathbf{R}^n 中的 Cauchy 点列.

这个定理刻画了空间 \mathbf{R}^n 的完备性, 就是说, \mathbf{R}^n 中的 Cauchy 点列必收敛于 \mathbf{R}^n 中的点. 现代数学中就是以此作为抽象空间完备性定义的.

1.3 \mathbf{R}^n 中的开集与闭集

为了讨论多元函数的极限与连续性, 本段简要地介绍 \mathbf{R}^n 中点集的基本知识, 包括开集、闭集与区域等. 虽然这些概念都是在空间 \mathbf{R}^n 中定义的, 但读者可以在平面 \mathbf{R}^2 中去理解它们.

定义 1.2 设 A 是 \mathbf{R}^n 中的一个点集, $a \in \mathbf{R}^n$. 若存在 A 中的点列 $\{x_k\}, x_k \neq a (k = 1, 2, \dots)$, 使得 $x_k \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 则称 a 是 A 的一个聚点. A 的所有聚点构成的集合称为 A 的导集, 记作 A' . 集合 $\bar{A} = A \cup A'$ 称为 A 的闭包. 若 $a \in A$, 但 $a \notin A'$, 则称 a 为 A 的孤立点. 若 $A' \subseteq A$, 则称 A 为闭集.

由定义易见, 集 A 的聚点不一定属于 A . 若 A 的所有聚点都属于 A , 则 A 是闭集. 因此, 若 A 是闭集, $\{x_k\}$ 是 A 中的任一点列, 且 $x_k \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 则 $a \in A$. 反之亦真. 这说明闭集对于极限运算是封闭的.

例如, 设 $A = \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \mid k \in \mathbf{N}_+ \right\}$ 是一平面点集, 则点 $(0, 0)$ 是 A 的唯一聚点, 它不属于 A , 并且 $A' = \{(0, 0)\}, \bar{A} = A \cup \{(0, 0)\}$, A 中的所有点都是它的孤立点, A 不是闭集, 但 $\bar{A} = A \cup \{(0, 0)\}$ 是闭集.

由定义 1.2 易知, 若 $A' = \emptyset$, 则 A 必为闭集. 从而知单点集和有限点集都是闭集.

想一想:

写出几个在数列极限中成立但对 \mathbf{R}^n 中点列不成立的命题.

定义 1.3 设 $a \in \mathbf{R}^n, \delta > 0$, 称点集

$$U(a, \delta) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x - a\| < \delta\}$$

为以 a 为中心、 δ 为半径的开球或点 a 的 δ 邻域, 称

$$\mathring{U}(a, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\}$$

为点 a 的 **去心 δ 邻域**. 它们可分别简记为 $U(a)$ 与 $\mathring{U}(a)$.

在直线 \mathbf{R} 上, 开球 $U(a, \delta)$ 就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$; 在平面 \mathbf{R}^2 上, 开球 $U(a, \delta)$ 就是以 $a = (a_1, a_2)$ 为中心, δ 为半径的圆周 $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = \delta^2$ 内的所有点构成的集合 (称为开圆盘); 在空间 \mathbf{R}^3 中, $U(a, \delta)$ 就是以 $a = (a_1, a_2, a_3)$ 为中心, δ 为半径的球面 $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 = \delta^2$ 内的所有点构成的集合, 也就是通常所说的开球.

有了邻域的概念, \mathbf{R}^n 中点列极限的概念也可以像数列极限那样, 用邻域来刻画. 设 $\{x_k\}$ 是 \mathbf{R}^n 中的一个点列, 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得 } \forall k > N, \text{恒有 } x_k \in U(a, \varepsilon),$$

则称点列 $\{x_k\}$ 收敛于 a , a 是 $\{x_k\}$ 的极限. 从而, 得到下列用邻域来刻画集 A 聚点的定理:

定理 1.5 设 A 是 \mathbf{R}^n 中的一个点集, $a \in \mathbf{R}^n$, 则 $a \in A'$ 的充要条件为 $\forall \varepsilon > 0, \mathring{U}(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. 也就是说, a 为 A 的聚点当且仅当 a 的任何去心 ε 邻域中都含有 A 中的点.

证 必要性 设 $a \in A'$, 根据定义 1.2, 存在 A 中的点列 $\{x_k\}, x_k \neq a (k = 1, 2, \dots)$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$. 用邻域来表示, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得 } \forall k > N, \text{恒有 } x_k \in \mathring{U}(a, \varepsilon)$. 由于 $\{x_k\} \subseteq A$, 从而得知, $\forall \varepsilon > 0, \mathring{U}(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, 即 a 的任何去心 ε 邻域中都有 A 中的点.

充分性 若 $\forall \varepsilon > 0, \mathring{U}(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, 则 $\forall k \in \mathbf{N}_+$, 取 $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, 必存在点 $x_k \in \mathring{U}(a, \varepsilon_k) \cap A$. 这就是说, 存在 A 中的点列 $\{x_k\}, x_k \neq a (k = 1, 2, \dots)$, 并且 $\|x_k - a\| < \varepsilon_k = \frac{1}{k}$, 从而 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, 故 $a \in A'$. \blacksquare

定义 1.4 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n, a \in \mathbf{R}^n$.

(1) 若存在 $\delta > 0$, 使 $U(a, \delta) \subseteq A$, 则称 a 是集 A 的 **内点**, 由 A 的所有内点构成的集称为 A 的 **内部**, 记作 A° 或 $\text{int } A$;

(2) 若存在 $\delta > 0$, 使 $U(a, \delta) \cap A = \emptyset$, 则称 a 是集 A 的外点, A 的所有外点构成的集称为 A 的外部, 记作 $\text{ext } A$;

想一想:

一个集合 A 的边界点与聚点有什么不同?

(3) 若对任何 $\delta > 0$, $U(a, \delta)$ 中既含有 A 中的点, 也含有 A 的余集 A^c 中的点, 则称 a 为集 A 的边界点, A 的所有边界点构成的集称为 A 的边界, 记作 ∂A .

由定义 1.4 易见, \mathbf{R}^n 中的任一点是且仅是 A 的内点、外点与边界点中的一种, 即

$$\mathbf{R}^n = A^\circ \cup \partial A \cup \text{ext } A,$$

且右端三个点集互不相交(图 5.1).

例 1.1 设 $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \delta^2\}$, 证明:

$$A^\circ = A, \quad \partial A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \delta^2\},$$

$$\bar{A} = A \cup \partial A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq \delta^2\}.$$

证 题中关于边界 ∂A 和闭包的结论是显然的, 下面证明 $A^\circ = A$. 由定义知 $A^\circ \subseteq A$,

因此只要证明 $A \subseteq A^\circ$. 设 $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in A$, 取 $\varepsilon < \delta - \sqrt{(\tilde{x}-x_0)^2 + (\tilde{y}-y_0)^2}$, 则点 (\tilde{x}, \tilde{y}) 的 ε 邻域 $U((\tilde{x}, \tilde{y}), \varepsilon) \subseteq A$, 因而 (\tilde{x}, \tilde{y}) 是 A 的内点(图 5.2), 故 $A \subseteq A^\circ$. \blacksquare

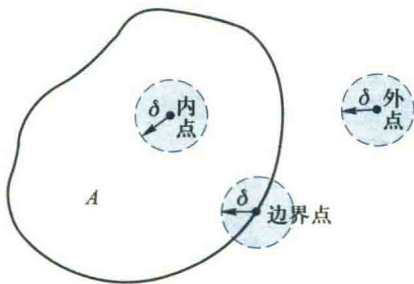


图 5.1

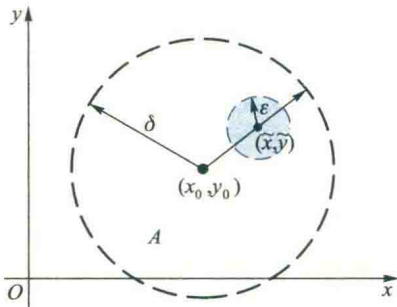


图 5.2

由定义易见, 对于 \mathbf{R}^n 中的任一点集 A , 必有

$$\bar{A} = A \cup \partial A.$$

特别地, 称开球与它的边界之并为闭球, 记作

$$\bar{U}(a, \delta) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x - a\| \leq \delta\}.$$

例 1.2 设 $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0, 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ (如图 5.3(a) 所示). 由定义 1.4 易知, $A^\circ = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, $\text{ext } A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1, x^2 + y^2 > 4\}$, $\partial A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4\} \cup \{(0, 0)\}$, 原点 $(0, 0)$ 是 A 的孤立点, $\bar{A} = A \cup \partial A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ (A° , $\text{ext } A$, ∂A 及 \bar{A} 分别如图 5.3(b)、

(c)、(d)及(e)所示).

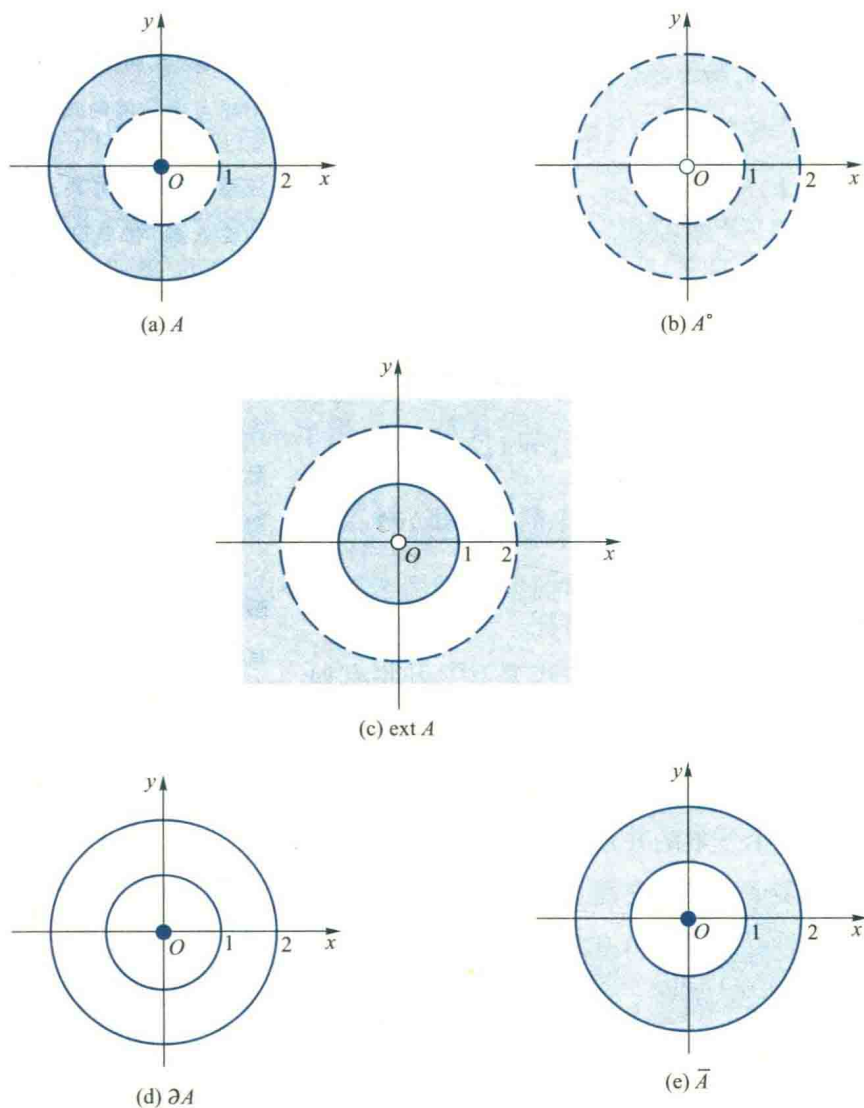


图 5.3

定义 1.5 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$, 若 $A \subseteq A^\circ$, 即 A 中的点全是 A 的内点, 则称 A 为开集.

下面的定理刻画了开集与闭集的关系.

定理 1.6 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是开集的充要条件为 A^c 是闭集.

*证 必要性 设 A 是开集, 故 $A^\circ = A$. 为了证明 A^c 是闭集, 只要证明 $(A^c)' \subseteq A^c$. 若 $(A^c)' = \emptyset$, 则显然有 $(A^c)' \subseteq A^c$. 若 $(A^c)' \neq \emptyset$, 设 $\mathbf{x} \in (A^c)'$, 则 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\dot{U}(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset.$$

由内点的定义知 $\overline{\mathbf{x}} \in A^\circ = A$, 即 $\mathbf{x} \in A^c$, 故 $(A^c)' \subseteq A^c$.

充分性 设 A^c 是闭集, 即 $(A^c)' \subseteq A^c$. 为了证明 A 是开集, 由于 $A^\circ \subseteq A$, 所以只要

证明 $A \subseteq A^\circ$. 设 $x \in A$, 则 $x \in \overline{A^c}$. 又因 A^c 为闭集, 故有 $(A^c)' \subseteq A^c$, 所以有 $x \in (A^c)'$. 根据定理 1.5, 必 $\exists \delta_0 > 0$, 使 $\dot{U}(x, \delta_0) \cap A^c = \emptyset$, 故 $\dot{U}(x, \delta_0) \subseteq A$, 又由 $x \in A$, 知 $x \in A^\circ$, 所以 $A \subseteq A^\circ$. \square

例 1.3 \mathbf{R}^n 中的开球 $U(a, \delta)$ 与开区间

$$(a, b) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in$$

$$\mathbf{R}^n \mid a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

都是开集. 闭球 $\overline{U}(a, \delta)$ 与闭区间

$$[a, b] = \{x \in (x_1, x_2, \dots, x_n) \in$$

$$\mathbf{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

都是闭集. 例 1.2 中的 A° 与 $\text{ext } A$ 都是开集, ∂A 与 \overline{A} 都是闭集.

下面的定理刻画了开集的特征.

定理 1.7 在 n 维 Euclid 空间 \mathbf{R}^n 中, 开集有如下性质:

- (1) 空集 \emptyset 与全空间 \mathbf{R}^n 是开集;
- (2) 任意多个开集的并是开集;
- (3) 有限多个开集之交是开集.

*证 根据定义, 性质(1)显然成立.

(2) 设 $A_\alpha \subseteq \mathbf{R}^n$ ($\alpha \in \Lambda, \Lambda$ 称为指标集) 是一族开集. 任取 $x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, 则必 $\exists \alpha_0 \in \Lambda$ 使 $x \in A_{\alpha_0}$. 由于 A_{α_0} 是开集, 所以 $\exists \delta > 0$, 使 $U(x, \delta) \subseteq A_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$, 即 x 是 $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ 的内点, 故 $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ 是开集.

(3) 设 $A_k \subseteq \mathbf{R}^n$ ($k = 1, 2, \dots, m$) 是开集, 任取 $x \in \bigcap_{k=1}^m A_k$, 则 $x \in A_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$). 由于 A_k 是开集, 所以 $\forall k = 1, 2, \dots, m, \exists \delta_k > 0$, 使 $U(x, \delta_k) \subseteq A_k$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$, 则

$$U(x, \delta) \subseteq U(x, \delta_k) \subseteq A_k \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

因此, $U(x, \delta) \subseteq \bigcap_{k=1}^m A_k$, 即 x 是 $\bigcap_{k=1}^m A_k$ 的内点, 故 $\bigcap_{k=1}^m A_k$ 是开集. \square

由此定理, 读者不难利用对偶原理(第一章第一节法则 2)证明 \mathbf{R}^n 中闭集的三个对应的基本性质:

想一想:

画出 \mathbf{R}^3 空间中的开球与开区间、闭球与闭区间的几何图形.

注意: 开集与闭集是常常碰到的两类点集, 但是还存在着很多其他类型的点集. 例如, 直线 \mathbf{R} 上的有理点集与无理点集既不是开集, 又不是闭集, 因为它们都没有内点, 而且任一实数都是它们的聚点. 因此, 不能说一个点集“非开即闭”.

想一想:

试举出无穷多个开集之交不是开集的例子.

- (1) 空集 \emptyset 和全空间 \mathbf{R}^n 是闭集;
- (2) 任意多个闭集的交通是闭集;
- (3) 有限多个闭集的并是闭集.

1.4 \mathbf{R}^n 中的紧集与区域

设 A 是 \mathbf{R}^n 中的一个点集, 如果存在一个常数 $M > 0$, 使得 $\forall x \in A$, 都有 $\|x\| \leq M$, 则称 A 是有界集, 否则称为无界集. 显然, 有界集的几何含义是它能包含在 \mathbf{R}^n 中一个以原点 $\mathbf{0}$ 为中心、 M 为半径的闭球 $\overline{U}(\mathbf{0}, M)$ 中.

定义 1.6 设 A 是 \mathbf{R}^n 中的一个点集, 若 A 是有界闭集, 则称 A 为紧集.

根据 Bolzano-Weierstrass 定理, 若 A 是 \mathbf{R}^n 中的紧集, 则 A 中任何点列都有收敛于 A 中点的子列.

定义 1.7 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是一个点集, 如果 A 中的任意两点 x 与 y 都能用完全属于 A 的有限个线段^①联结起来, 则称 A 是连通集. 连通的开集称为区域. 区域与它的边界之并称为闭区域^②.

显然, \mathbf{R}^2 中的开圆盘是区域, 闭圆盘是闭区域, 图 5.4(a) 所示的 \mathbf{R}^2 的点集是区域, 图 5.4(b) 所示点集不是区域, 在开圆盘中去掉任意一条直径后所得到的集合也不是区域, 因为它们都破坏了集合的连通性.

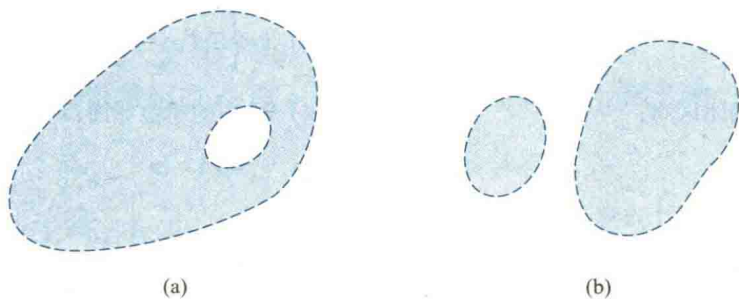


图 5.4

设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$, 若联结 A 中任意两点的线段都属于 A , 即若 $x_1, x_2 \in A$, 则 $\forall t \in [0, 1]$, $tx_1 + (1-t)x_2 \in A$, 则称 A 是 \mathbf{R}^n 中的凸集. 由定义 1.7 得知, 任何凸集都是连通的, 因而任何凸开集都是区域.

① 设 a 与 b 是 \mathbf{R}^n 中两个不同点, 称 \mathbf{R}^n 的点集

$$\{ta + (1-t)b \mid t \in \mathbf{R}, 0 \leq t \leq 1\}$$

为 \mathbf{R}^n 中联结点 a 与 b 的线段.

② 严格地说, 所谓区域是指开区域, 但有时区域也作为开区域与闭区域的统称.

习题 5.1

(A)

1. 设 $\{x_k\}$ 为 \mathbf{R}^n 中的点列, $a \in \mathbf{R}^n$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$, 证明: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \|a\|$.

2. 求平面 \mathbf{R}^2 中下列点列的极限(其中 $n \in \mathbf{N}_+$):

$$(1) \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{n}{n-1} \right); \quad (2) \left(\frac{n^2+1}{n^2-n-1}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right).$$

3. 证明定理 1.2 中的(2), (4).

4. 求下列各集的导集、闭包, 并说明是否为闭集:

$$(1) A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 2\}; \quad (2) A = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \mid m, n \in \mathbf{N}_+ \right\};$$

$$(3) A = \{(x, y) \mid x, y \text{ 为整数}\}; \quad (4) A = \{(x, y) \mid x, y \text{ 为有理数}\}.$$

5. 下列集合是开集还是闭集, 求出它们的内部、边界和闭包:

$$(1) A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}; \quad (2) A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y < x^2\};$$

$$(3) A = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1\}; \quad (4) A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 < x < 1, y = 0\}.$$

6. 第 5 题中的集合是否为区域? 有界还是无界?

7. 说明下列集合是紧集:

$$(1) \text{有限点集}; \quad (2) A = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\};$$

$$(3) \mathbf{R}^n \text{ 中的闭区间}; \quad (4) \mathbf{R}^n \text{ 中的单位球面 } \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

(B)

1. 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是一个点集. 证明:

$$(1) A^\circ \text{ 与 } \text{ext } A \text{ 是开集}; \quad (2) A', \partial A \text{ 是闭集};$$

$$(3) A \text{ 为开集} \Leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset.$$

2. 以 $n=2$ 为例证明聚点原理: \mathbf{R}^n 中的有界无限点集至少有一个聚点.

第二节 多元函数的极限与连续性

本节首先介绍多元数量值函数与多元向量值函数的概念, 然后将一元函数的极限和连续性概念推广到多元函数, 并讨论多元连续函数的性质.

2.1 多元函数的概念

在科学技术问题中常常要研究多个变量之间的关系. 例如, 理想气体状态方程式

$p=R \frac{T}{V}$ (R 为常数) 表示气体的压强 p 对体积 V 与绝对温度 T 的依赖关系, 可以看成两个自变量 V 和 T 与一个因变量 p 之间的关系. 又如, 将点电荷 q 置于空间 \mathbf{R}^3 的坐标原点处, 根据 Coulomb 定律, 它在空间 \mathbf{R}^3 中任一点 $\mathbf{r}=(x, y, z)$ 处产生的电场强度为

$$\mathbf{E} = kq \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} = kq \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}.$$

它表示电场强度向量 $\mathbf{E}=(E_x, E_y, E_z)$ 对空间点的坐标 x, y, z 的依赖关系, 可以看作是三个自变量 x, y, z 与三个因变量 E_x, E_y, E_z 之间的关系, 也可看成是三个变量 x, y, z 与一个向量 \mathbf{E} 之间的关系. 理想气体状态方程式中压强 p 就是 V, T 的一个数量值函数, 而电场强度向量 \mathbf{E} 就是 x, y, z 的一个向量值函数. 因此, 我们既要讨论多元数量值函数, 还要讨论多元向量值函数.

定义 2.1 设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是一个点集, 称映射 $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ 是定义在 A 上的一个 n 元数量值函数, 简称为 n 元函数, 也可记作

$$w = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

其中 $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ 称为自变量, $D(f)=A$ 称为 f 的定义域, w 称为因变量, 与给定的 $x \in D(f)$ 所对应的 w 称为函数 f 在点 x 处的值, $R(f) = \{w \mid w = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D(f)\}$ 称为 f 的值域.

习惯上, 二元函数常记成 $z=f(x, y), (x, y) \in A \subseteq \mathbf{R}^2$. 三元函数常记成

$$u = f(x, y, z), (x, y, z) \in A \subseteq \mathbf{R}^3.$$

例 2.1 求下列函数的定义域 D :

$$(1) z = \ln(1-x^2-2y^2); \quad (2) z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1};$$

$$(3) w = \frac{1}{\sqrt{z-x^2-y^2}}.$$

解 (1) $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 < 1\}$, 它是 xOy 平面上以椭圆 $x^2 + 2y^2 = 1$ 为边界的有界区域(图 5.5(a)中阴影部分).

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \geq 1\}$, 它表示 xOy 平面上的两个无界闭区域(图 5.5(b)中阴影部分).

(3) $D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z > x^2 + y^2\}$, 它表示三维空间 \mathbf{R}^3 中抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上方的无界区域(图 5.5(c)中阴影部分). **■**

多元数量值函数的两种几何表示法 类似于一元函数, 多元数量值函数也可以