面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

工科数学分析基础

第三版 下册

马知恩 王绵森 主编

高等教育出版社

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

工科数学分析基础

第三版 下册

● 马知恩 王绵森 主编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书第一版是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材和教育部工科数学学科"九五"规划教材，普通高等教育"九五"国家级重点教材，曾获教育部2002年全国普通高等学校优秀教材一等奖；第二版是"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材。第三版分上、下两册出版，第1—4章为上册，主要内容为一元函数微积分与常微分方程；第5—7章为下册，主要内容为多元函数微积分与无穷级数。

本书在保持第二版编写特色的基础上，根据几年来的教学实践经验，进行了较大的修订。适当降低了本书的难度，同时对部分内容进行了改写，使得本书思路更加简明，更加符合认识规律，更易于读者接受。在教材的表现形式上，采用双色印刷，并增加了边注和二维码，以满足读者的个性化学习需求。在习题的选配上，仍然分为A、B两类，并配有综合练习题，删去了一些难题，增加了一些基本训练题，还特别增加了章后习题，在书末附有部分习题答案与提示。

本书既可作为高等理工科院校的非数学类专业本科生教材，也可供其他专业选用和社会读者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析基础. 下册 / 马知恩， 王绵森主编. -- 3版. -- 北京 : 高等教育出版社， 2018.2
ISBN 978-7-04-049115-9

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①马… ②王… Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第312683号

策划编辑 蒋 青　责任编辑 蒋 青　特约编辑 高 旭　封面设计 姜 磊
版式设计 张 杰　插图绘制 杜晓丹　责任校对 胡美萍　责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 大厂益利印刷有限公司
开 本 787 mm×1092 mm 1/16
印 张 23.75
字 数 450千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版 次 1998年11月第1版
2018年2月第3版
印 次 2018年2月第1次印刷
定 价 47.10元

物 料 号 49115-00

面向21世纪课程教材

“十二五”普通高等教育
本科国家级规划教材

普通高等教育“十五”
国家级规划教材

普通高等教育“九五”
国家级重点教材

目　录

1.2 $\mathbf{R}^n$ 中点列的极限

有了 $\mathbf{R}^n$ 空间中距离的概念，我们就能仿照数列(即 $\mathbf{R}$ 中的点列)极限的概念和有关性质来讨论 $\mathbf{R}^n$ 中的点列极限的概念和相应的性质.

定义 1.1(点列的极限) 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列，其中 $\boldsymbol{x}_k=(x_{k,1},x_{k,2},\cdots,x_{k,n})$，又设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一固定点，若当 $k\to\infty$ 时，$\rho(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{a})\to 0$，即

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+,\text{使得 }\forall k>N,\text{恒有 }\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|<\varepsilon, \tag{1.6}$$

则称点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的**极限存在**，且称 $\boldsymbol{a}$ 为它的**极限**，记作

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}\quad\text{或}\quad\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{a}\quad(k\to\infty).$$

这时也称点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ **收敛于** $\boldsymbol{a}$.

定理 1.1 设点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}\subseteq\mathbf{R}^n$，点 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$ 的充要条件是 $\forall i=1,2,\cdots,n$，都有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{k,i}=a_i$.

证 由于 $\forall i=1,2,\cdots,n$，恒有

$$|x_{k,i}-a_i|\leqslant\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|.$$

根据定义 1.1 立即可证明必要性. 下面证明充分性.

设 $\forall i=1,2,\cdots,n$，都有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{k,i}=a_i$，则

$\forall\varepsilon>0,\exists N_i\in\mathbf{N}_+$，使得 $\forall k>N_i$，恒有 $|x_{k,i}-a_i|<\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

令 $N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_n\}$，则 $\forall k>N$，必有

$$|x_{k,i}-a_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

从而 $\forall k>N$，有

$$\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{k,i}-a_i)^2}<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$. ▌

注：定理 1.1 表明，$\mathbf{R}^n$ 中点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$ 等价于该点列的各个坐标(或分量)所构成的数列 $\{x_{k,i}\}$ 分别收敛于点 $\boldsymbol{a}$ 的相应坐标(或分量)a_i. 从而，它把研究 $\mathbf{R}^n$ 中点列的收敛问题转化为实数列(即一维空间 $\mathbf{R}$ 中的点列)的收敛问题. 这种"化多为一"的思想方法是一种将"未知"化为"已知"的方法，在多元函数微积分中经常使用. 读者应认真学习，并用这种方法证明定理 1.2 中的(3).

定理 1.2 设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列，则

(1) $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的极限是唯一的;

(2) $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是有界点列，即 $\exists M(\in\mathbf{R})>0$，使得 $\forall k\in\mathbf{N}_+$，恒有 $\|\boldsymbol{x}_k\|\leqslant M$;

(3) 若 $\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{a},\boldsymbol{y}_k\to\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{x}_k\pm\boldsymbol{y}_k\to\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$，$\alpha\boldsymbol{x}_k\to\alpha\boldsymbol{a}$，$\langle\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{y}_k\rangle\to\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，其中 $\alpha\in\mathbf{R}$;

(4) 若 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$，则它的任一子(点)列也收敛于 $\boldsymbol{a}$.

由于 $\mathbf{R}^n$ 中的向量不能比较大小，也不能相除，因此，数列极限中与单调性、保序

性、确界以及商有关的概念与命题不能直接地推广到 $\mathbf{R}^n$ 中的点列. 但是, Bolzano – Weierstrass 定理与 Cauchy 收敛原理在 $\mathbf{R}^n$ 中仍然成立.

想一想:
写出几个在数列极限中成立但对 $\mathbf{R}^n$ 中点列不成立的命题.

利用第一章定理 2.9 不难证明下面的定理.

定理 1.3(Bolzano–Weierstrass 定理) $\mathbf{R}^n$ 中的有界点列必有收敛子列.($\mathbf{R}^n$ 中点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的收敛子列的极限也称为 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的**极限点**.)

设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点列,若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \text{使得 } \forall k > N \text{ 及 } p \in \mathbf{N}_+, \text{恒有 } \|\boldsymbol{x}_{k+p} - \boldsymbol{x}_k\| < \varepsilon,$$

则称 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的**基本点列**或 **Cauchy 点列**. 类似于定理 1.1 不难证明: $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 Cauchy 点列的充要条件是 $\forall i=1,2,\cdots,n$, $\{x_{k,i}\}$ 都是 Cauchy 数列. 根据第一章中所介绍的数列的 Cauchy 收敛原理,立即可以得到 $\mathbf{R}^n$ 中点列的 Cauchy 收敛原理如下.

定理 1.4(Cauchy 收敛原理) $\mathbf{R}^n$ 中点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\mathbf{R}^n$ 中的点的充要条件为 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Cauchy 点列.

这个定理刻画了空间 $\mathbf{R}^n$ 的完备性,就是说, $\mathbf{R}^n$ 中的 Cauchy 点列必收敛于 $\mathbf{R}^n$ 中的点. 现代数学中就是以此作为抽象空间完备性定义的.

1.3 $\mathbf{R}^n$ 中的开集与闭集

为了讨论多元函数的极限与连续性,本段简要地介绍 $\mathbf{R}^n$ 中点集的基本知识,包括开集、闭集与区域等. 虽然这些概念都是在空间 $\mathbf{R}^n$ 中定义的,但读者可以在平面 $\mathbf{R}^2$ 中去理解它们.

定义 1.2 设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集, $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$. 若存在 A 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$, $\boldsymbol{x}_k \neq \boldsymbol{a}$ $(k=1,2,\cdots)$, 使得 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{a}$ $(k\to\infty)$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 是 A 的一个**聚点**. A 的所有聚点构成的集合称为 A 的**导集**, 记作 A'. 集合 $\overline{A}=A\cup A'$ 称为 A 的**闭包**. 若 $\boldsymbol{a}\in A$, 但 $\boldsymbol{a} \notin A'$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 为 A 的**孤立点**. 若 $A'\subseteq A$, 则称 A 为**闭集**.

由定义易见,集 A 的聚点不一定属于 A. 若 A 的所有聚点都属于 A, 则 A 是闭集. 因此,若 A 是闭集, $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 A 中的任一点列,且 $\boldsymbol{x}_k\to\boldsymbol{a}$ $(k\to\infty)$, 则 $\boldsymbol{a}\in A$. 反之亦真. 这说明闭集对于极限运算是封闭的.

例如,设 $A=\left\{\left(\dfrac{1}{k},\dfrac{1}{k}\right)\ \middle|\ k\in\mathbf{N}_+\right\}$ 是一平面点集,则点 $(0,0)$ 是 A 的唯一聚点,它不属于 A, 并且 $A'=\{(0,0)\}$, $\overline{A}=A\cup\{(0,0)\}$, A 中的所有点都是它的孤立点. A 不是闭集,但 $\overline{A}=A\cup\{(0,0)\}$ 是闭集.

由定义 1.2 易知,若 $A'=\varnothing$, 则 A 必为闭集. 从而知单点集和有限点集都是闭集.

想一想：

在平面 $\mathbf{R}^2$ 上，画出点 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^2$ 的 δ 邻域和去心 δ 邻域.

定义 1.3　设 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$,$\delta>0$,称点集

$$U(\boldsymbol{a},\delta)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|<\delta\}$$

为以 $\boldsymbol{a}$ 为中心、δ 为半径的**开球**或点 $\boldsymbol{a}$ 的 **δ 邻域**,称

$$\mathring{U}(\boldsymbol{a},\delta)=U(\boldsymbol{a},\delta)\setminus\{\boldsymbol{a}\}$$

为点 $\boldsymbol{a}$ 的**去心 δ 邻域**.它们可分别简记为 $U(\boldsymbol{a})$ 与 $\mathring{U}(\boldsymbol{a})$.

在直线 $\mathbf{R}$ 上,开球 $U(a,\delta)$ 就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$;在平面 $\mathbf{R}^2$ 上,开球 $U(\boldsymbol{a},\delta)$ 就是以 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ 为中心,δ 为半径的圆周 $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2=\delta^2$ 内的所有点构成的集合(称为开圆盘);在空间 $\mathbf{R}^3$ 中,$U(\boldsymbol{a},\delta)$ 就是以 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 为中心,δ 为半径的球面 $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2=\delta^2$ 内的所有点构成的集合,也就是通常所说的开球.

有了邻域的概念,$\mathbf{R}^n$ 中点列极限的概念也可以像数列极限那样,用邻域来刻画.设 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列,若

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+,\text{使得 }\forall k>N,\text{恒有 }\boldsymbol{x}_k\in U(\boldsymbol{a},\varepsilon),$$

则称点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 收敛于 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{a}$ 是 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的极限.从而,得到下列用邻域来刻画集 A 聚点的定理:

定理 1.5　设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集,$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$,则 $\boldsymbol{a}\in A'$ 的充要条件为 $\forall\varepsilon>0$,$\mathring{U}(\boldsymbol{a},\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$.也就是说,$\boldsymbol{a}$ 为 A 的聚点当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 的任何去心 ε 邻域中都含有 A 中的点.

证　**必要性**　设 $\boldsymbol{a}\in A'$,根据定义 1.2,存在 A 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$,$\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{a}$ $(k=1,2,\cdots)$,使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$.用邻域来表示,即 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N\in\mathbf{N}_+$,使得 $\forall k>N$,恒有 $\boldsymbol{x}_k\in\mathring{U}(\boldsymbol{a},\varepsilon)$.由于 $\{\boldsymbol{x}_k\}\subseteq A$,从而得知,$\forall\varepsilon>0$,$\mathring{U}(\boldsymbol{a},\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$,即 $\boldsymbol{a}$ 的任何去心 ε 邻域中都有 A 中的点.

充分性　若 $\forall\varepsilon>0$,$\mathring{U}(\boldsymbol{a},\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$,则 $\forall k\in\mathbf{N}_+$,取 $\varepsilon_k=\dfrac{1}{k}$,必存在点 $\boldsymbol{x}_k\in\mathring{U}(\boldsymbol{a},\varepsilon_k)\cap A$.这就是说,存在 A 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$,$\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{a}$ $(k=1,2,\cdots)$,并且 $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}\|<\varepsilon_k=\dfrac{1}{k}$,从而 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$,故 $\boldsymbol{a}\in A'$.　▌

定义 1.4　设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$.

(1) 若存在 $\delta>0$,使 $U(\boldsymbol{a},\delta)\subseteq A$,则称 $\boldsymbol{a}$ 是集 A 的**内点**,由 A 的所有内点构成的集称为 A 的**内部**,记作 A° 或 $\operatorname{int}A$;

(2) 若存在 $\delta>0$,使 $U(\boldsymbol{a},\delta)\cap A=\varnothing$,则称 $\boldsymbol{a}$ 是集 A 的**外点**,A 的所有外点构成的集称为 A 的**外部**,记作 $\operatorname{ext} A$;

想一想:
一个集合 A 的边界点与聚点有什么不同?

(3) 若对任何 $\delta>0$,$U(\boldsymbol{a},\delta)$ 中既含有 A 中的点,也含有 A 的余集 A^c 中的点,则称 $\boldsymbol{a}$ 为集 A 的**边界点**,A 的所有边界点构成的集称为 A 的**边界**,记作∂A.

由定义 1.4 易见,$\mathbf{R}^n$ 中的任一点是且仅是 A 的内点、外点与边界点中的一种,即

$$\mathbf{R}^n=A^\circ\cup\partial A\cup\operatorname{ext} A,$$

且右端三个点集互不相交(图 5.1).

例 1.1 设 $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$,证明:

$$A^\circ=A,\ \partial A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\delta^2\},$$

$$\overline{A}=A\cup\partial A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\delta^2\}.$$

证 题中关于边界∂A 和闭包的结论是显然的,下面证明 $A^\circ=A$.由定义知 $A^\circ\subseteq A$,因此只要证明 $A\subseteq A^\circ$.设$(\tilde{x},\tilde{y})\in A$,取 $\varepsilon<\delta-\sqrt{(\tilde{x}-x_0)^2+(\tilde{y}-y_0)^2}$,则点$(\tilde{x},\tilde{y})$的 ε 邻域 $U((\tilde{x},\tilde{y}),\varepsilon)\subseteq A$,因而$(\tilde{x},\tilde{y})$是 A 的内点(图 5.2),故$A\subseteq A^\circ$. ▌

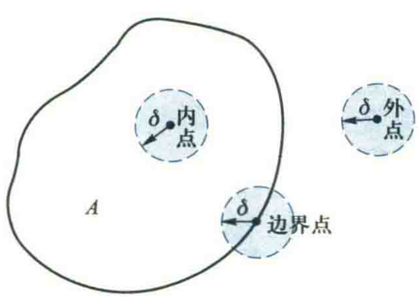

图 5.1

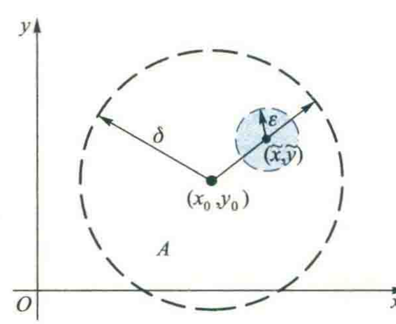

图 5.2

由定义易见,对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任一点集 A,必有

$$\overline{A}=A\cup\partial A.$$

特别地,称开球与它的边界之并为**闭球**,记作

$$\overline{U}(\boldsymbol{a},\delta)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\leqslant\delta\}.$$

例 1.2 设 $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2=0,1<x^2+y^2\leqslant4\}$(如图 5.3(a)所示).由定义 1.4 易知,$A^\circ=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid1<x^2+y^2<4\}$,$\operatorname{ext} A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid0<x^2+y^2<1,x^2+y^2>4\}$,$\partial A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2=1,x^2+y^2=4\}\cup\{(0,0)\}$,原点$(0,0)$是 A 的孤立点,$\overline{A}=A\cup\partial A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2=0,1\leqslant x^2+y^2\leqslant4\}$ (A°、$\operatorname{ext} A$、∂A 及 $\overline{A}$ 分别如图 5.3(b)、 (c)、(d)及(e)所示).

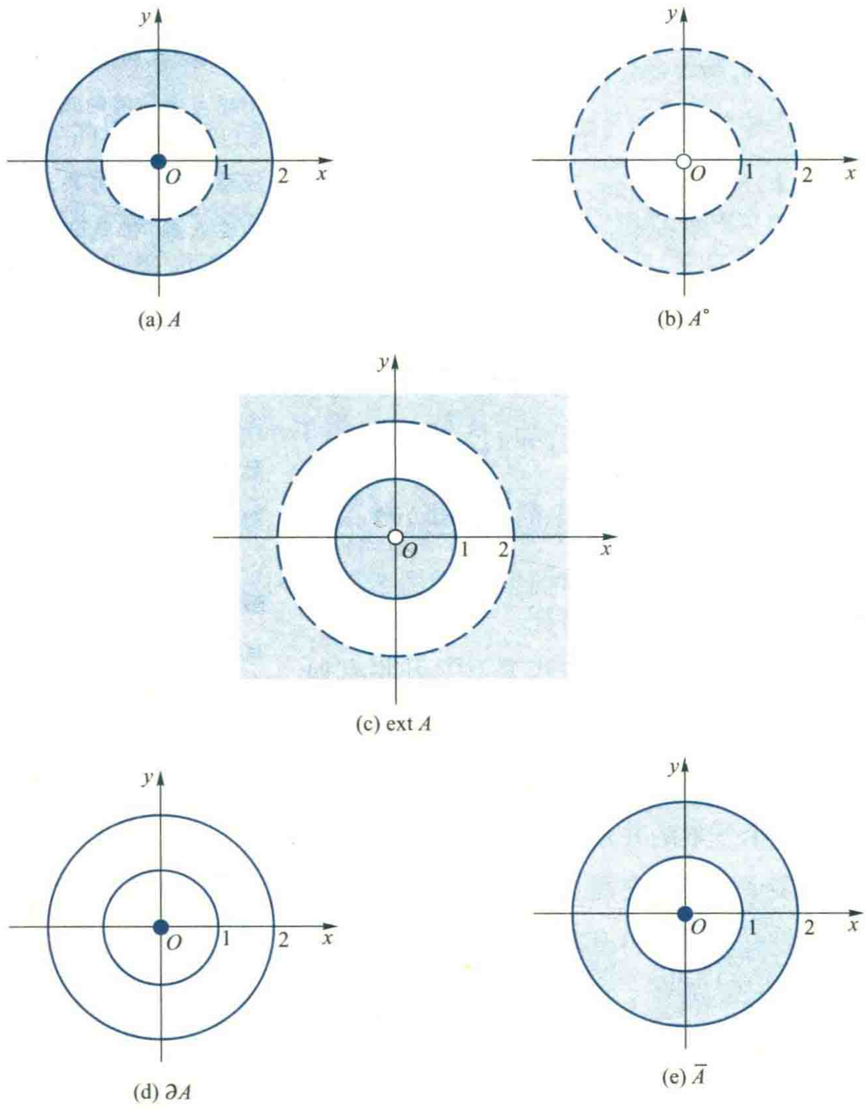

图 5.3

定义 1.5 设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$,若 $A\subseteq A^{\circ}$,即 A 中的点全是 A 的内点,则称 A 为**开集**.

下面的定理刻画了开集与闭集的关系.

定理 1.6 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是开集的充要条件为 A^c 是闭集.

***证** **必要性** 设 A 是开集,故 $A^{\circ}=A$.为了证明 A^c 是闭集,只要证明 $(A^c)'\subseteq A^c$.若 $(A^c)'=\varnothing$,则显然有 $(A^c)'\subseteq A^c$.若 $(A^c)'\neq\varnothing$,设 $\boldsymbol{x}\in(A^c)'$,则 $\forall\,\varepsilon>0$,

$$\mathring{U}(\boldsymbol{x},\varepsilon)\cap A^c\neq\varnothing.$$

由内点的定义知 $\boldsymbol{x}\ \overline{\in}\ A^{\circ}=A$,即 $\boldsymbol{x}\in A^c$,故 $(A^c)'\subseteq A^c$.

充分性 设 A^c 是闭集,即 $(A^c)'\subseteq A^c$.为了证明 A 是开集,由于 $A^{\circ}\subseteq A$,所以只要

证明 $A\subseteq A^\circ$.设 $\boldsymbol{x}\in A$,则 $\boldsymbol{x}\ \overline{\in}\ A^c$.又因 A^c 为闭集,故有$(A^c)'\subseteq A^c$,所以有 $\boldsymbol{x}\ \overline{\in}\ (A^c)'$.根据定理 1.5,必 $\exists\delta_0>0$,使 $\mathring{U}(\boldsymbol{x},\delta_0)\cap A^c=\varnothing$,故 $\mathring{U}(\boldsymbol{x},\delta_0)\subseteq A$,又由 $\boldsymbol{x}\in A$,知 $\boldsymbol{x}\in A^\circ$,所以 $A\subseteq A^\circ$. ▌

想一想: 画出 $\mathbf{R}^3$ 空间中的开球与开区间、闭球与闭区间的几何图形.

例 1.3 $\mathbf{R}^n$ 中的开球 $U(\boldsymbol{a},\delta)$ 与开区间

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\mid a_i<x_i<b_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

都是开集. 闭球 $\overline{U}(\boldsymbol{a},\delta)$ 与闭区间

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\{\boldsymbol{x}\in(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\mid a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

都是闭集.例 1.2 中的 A°与 ext A 都是开集,∂A 与 $\overline{A}$ 都是闭集.

注意: 开集与闭集是常常碰到的两类点集,但是还存在着很多其他类型的点集.例如,直线 $\mathbf{R}$ 上的有理点集与无理点集既不是开集,又不是闭集,因为它们都没有内点,而且任一实数都是它们的聚点.因此,不能说一个点集"非开即闭".

下面的定理刻画了开集的特征.

想一想: 试举出无穷多个开集的交不是开集的例子.

定理 1.7 在 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中,开集有如下性质:

(1) 空集$\varnothing$与全空间 $\mathbf{R}^n$ 是开集;

(2) 任意多个开集的并是开集;

(3) 有限多个开集的交是开集.

***证** 根据定义,性质(1)显然成立.

(2) 设 $A_\alpha\subseteq\mathbf{R}^n$ $(\alpha\in\Lambda,\Lambda$ 称为指标集)是一族开集.任取 $\boldsymbol{x}\in\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$,则必 $\exists\alpha_0\in\Lambda$ 使 $\boldsymbol{x}\in A_{\alpha_0}$.由于 A_{α_0}是开集,所以 $\exists\delta>0$,使 $U(\boldsymbol{x},\delta)\subseteq A_{\alpha_0}\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$,即 $\boldsymbol{x}$ 是 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 的内点,故 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 是开集.

(3) 设 $A_k\subseteq\mathbf{R}^n$ $(k=1,2,\cdots,m)$是开集,任取 $\boldsymbol{x}\in\bigcap\limits_{k=1}^{m}A_k$,则 $\boldsymbol{x}\in A_k$ $(k=1,2,\cdots,m)$.由于 A_k 是开集,所以 $\forall k=1,2,\cdots,m$, $\exists\delta_k>0$,使 $U(\boldsymbol{x},\delta_k)\subseteq A_k$.取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m\}$,则

$$U(\boldsymbol{x},\delta)\subseteq U(\boldsymbol{x},\delta_k)\subseteq A_k\quad(k=1,2,\cdots,m).$$

因此,$U(\boldsymbol{x},\delta)\subseteq\bigcap\limits_{k=1}^{m}A_k$,即 $\boldsymbol{x}$ 是 $\bigcap\limits_{k=1}^{m}A_k$ 的内点,故 $\bigcap\limits_{k=1}^{m}A_k$ 是开集. ▌

由此定理,读者不难利用对偶原理(第一章第一节法则 2)证明 $\mathbf{R}^n$ 中闭集的三个对应的基本性质:

(1) 空集 $\varnothing$ 和全空间 $\mathbf{R}^n$ 是闭集；

(2) 任意多个闭集的交是闭集；

(3) 有限多个闭集的并是闭集.

1.4　$\mathbf{R}^n$ 中的紧集与区域

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，如果存在一个常数 $M>0$，使得 $\forall \boldsymbol{x} \in A$，都有 $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant M$，则称 A 是**有界集**，否则称为**无界集**. 显然，有界集的几何含义是它能包含在 $\mathbf{R}^n$ 中一个以原点 $\mathbf{0}$ 为中心、M 为半径的闭球 $\overline{U}(\mathbf{0}, M)$ 中.

定义 1.6　设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集，若 A 是有界闭集，则称 A 为**紧集**.

根据 Bolzano-Weierstrass 定理，若 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的紧集，则 A 中任何点列都有收敛于 A 中点的子列.

定义 1.7　设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是一个点集，如果 A 中的任意两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 都能用完全属于 A 的有限个线段①联结起来，则称 A 是**连通集**. 连通的开集称为**区域**. 区域与它的边界之并称为**闭区域**②.

显然，$\mathbf{R}^2$ 中的开圆盘是区域，闭圆盘是闭区域，图 5.4(a) 所示的 $\mathbf{R}^2$ 的点集是区域，图 5.4(b) 所示点集不是区域，在开圆盘中去掉任意一条直径后所得到的集合也不是区域，因为它们都破坏了集合的连通性.

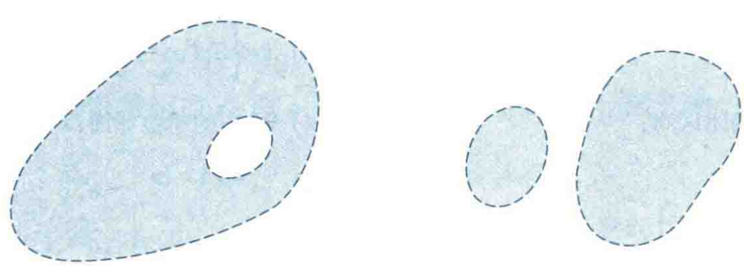

图 5.4

设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$，若联结 A 中任意两点的线段都属于 A，即若 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in A$，则 $\forall t \in [0,1]$，$t\boldsymbol{x}_1+(1-t)\boldsymbol{x}_2 \in A$，则称 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的**凸集**. 由定义 1.7 得知，任何凸集都是连通的，因而任何凸开集都是区域.

---

①　设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中两个不同点，称 $\mathbf{R}^n$ 的点集

$$\{t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b} \mid t \in \mathbf{R}, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 中联结点 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**线段**.

②　严格地说，所谓区域是指开区域，但有时区域也作为开区域与闭区域的统称.

习题 5.1

(A)

1. 设$\{\boldsymbol{x}_k\}$为$\mathbf{R}^n$中的点列，$\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$，$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$，证明：$\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}_k\|=\|\boldsymbol{a}\|$.

2. 求平面$\mathbf{R}^2$中下列点列的极限（其中$n\in\mathbf{N}_+$）：

(1) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n},\dfrac{n}{n-1}\right)$；　　(2) $\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-n-1},\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$.

3. 证明定理 1.2 中的(2)，(4).

4. 求下列各集的导集、闭包，并说明是否为闭集：

(1) $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2>2\}$；　　(2) $A=\left\{\left(\dfrac{1}{m},\dfrac{1}{n}\right)\middle| m,n\in\mathbf{N}_+\right\}$；

(3) $A=\{(x,y)\mid x,y$ 为整数$\}$；　　(4) $A=\{(x,y)\mid x,y$ 为有理数$\}$.

5. 下列集合是开集还是闭集，求出它们的内部、边界和闭包：

(1) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1\}$；　　(2) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid y<x^2\}$；

(3) $A=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2\mid \|\boldsymbol{x}\|=1\}$；　　(4) $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid -1<x<1,y=0\}$.

6. 第 5 题中的集合是否为区域？有界还是无界？

7. 说明下列集合是紧集：

(1) 有限点集；　　(2) $A=\left\{0,1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots\right\}$；

(3) $\mathbf{R}^n$ 中的闭区间；　　(4) $\mathbf{R}^n$ 中的单位球面$\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid \|\boldsymbol{x}\|=1\}$.

(B)

1. 设$A\subseteq\mathbf{R}^n$是一个点集.证明：

(1) A°与 $\mathrm{ext}\,A$ 是开集；　　(2) A'，∂A 是闭集；

(3) A 为开集$\Leftrightarrow A\cap\partial A=\varnothing$.

2. 以$n=2$为例证明**聚点原理**：$\mathbf{R}^n$ 中的有界无限点集至少有一个聚点.

第二节　多元函数的极限与连续性

本节首先介绍多元数量值函数与多元向量值函数的概念，然后将一元函数的极限和连续性概念推广到多元函数，并讨论多元连续函数的性质.

2.1　多元函数的概念

在科学技术问题中常常要研究多个变量之间的关系.例如，理想气体状态方程式

$p=R\dfrac{T}{V}$(R 为常数)表示气体的压强 p 对体积 V 与绝对温度 T 的依赖关系,可以看成两个自变量 V 和 T 与一个因变量 p 之间的关系.又如,将点电荷 q 置于空间 $\mathbf{R}^3$ 的坐标原点处,根据 Coulomb 定律,它在空间 $\mathbf{R}^3$ 中任一点 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 处产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=kq\frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}=kq\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=E_x\boldsymbol{i}+E_y\boldsymbol{j}+E_z\boldsymbol{k}.$$

它表示电场强度向量 $\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)$ 对空间点的坐标 x,y,z 的依赖关系,可以看作是三个自变量 x,y,z 与三个因变量 E_x,E_y,E_z 之间的关系,也可看成是三个变量 x,y,z 与一个向量 $\boldsymbol{E}$ 之间的关系.理想气体状态方程式中压强 p 就是 V,T 的一个数量值函数,而电场强度向量 $\boldsymbol{E}$ 就是 x,y,z 的一个向量值函数.因此,我们既要讨论多元数量值函数,还要讨论多元向量值函数.

定义 2.1　设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 是一个点集,称映射 $f:A\to\mathbf{R}$ 是定义在 A 上的一个 n **元数量值函数**,简称为 n **元函数**,也可记作

$$w=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A$ 称为**自变量**,$D(f)=A$ 称为 f 的**定义域**,w 称为**因变量**,与给定的 $x\in D(f)$ 所对应的 w 称为函数 f 在点 x 处的**值**,$R(f)=\{w\mid w=f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in D(f)\}$ 称为 f 的**值域**.

习惯上,二元函数常记成 $z=f(x,y),(x,y)\in A\subseteq\mathbf{R}^2$.三元函数常记成

$$u=f(x,y,z),\ (x,y,z)\in A\subseteq\mathbf{R}^3.$$

例 2.1　求下列函数的定义域 D:

(1) $z=\ln(1-x^2-2y^2)$;　　(2) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;

(3) $w=\dfrac{1}{\sqrt{z-x^2-y^2}}$.

解　(1) $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+2y^2<1\}$,它是 xOy 平面上以椭圆 $x^2+2y^2=1$ 为边界的有界区域(图 5.5(a)中阴影部分).

(2) $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid |x|\leqslant1,|y|\geqslant1\}$,它表示 xOy 平面上的两个无界闭区域(图 5.5(b)中阴影部分).

(3) $D=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid z>x^2+y^2\}$,它表示三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中抛物面 $z=x^2+y^2$ 上方的无界区域(图 5.5(c)中阴影部分).　▌

多元数量值函数的两种几何表示法　类似于一元函数,多元数量值函数也可以