高等院校应用型本科“十三五”规划教材·数学类

微积分

CALCULUS

（上）

主编　孙新蕾　童丽珍

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

高等院校应用型本科“十三五”规划教材·数学类

微积分
CALCULUS
（上）

主　编　孙新蕾　童丽珍
编　委　（按姓氏笔画排序）
马建新　李　甜　李丽容
肖　艳　吴小霞　黄　敏
蒋　磊　程淑芳　强静仁

華中科技大学出版社
http://www.hustp.com
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 上/孙新蕾,童丽珍主编. —武汉:华中科技大学出版社,2018.8
ISBN 978-7-5680-4271-0

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①孙… ②童… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 198531 号

微积分(上) 孙新蕾 童丽珍 主编
Weijifen(Shang)

策划编辑:曾 光
责任编辑:史永霞
封面设计:孢 子
责任监印:朱 玢
出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉) 电话:(027)81321913
武汉市东湖新技术开发区华工科技园 邮编:430223
录 排:华中科技大学惠友文印中心
印 刷:武汉洪林印务有限公司
开 本:710mm×1000mm 1/16
印 张:15.25
字 数:307 千字
版 次:2018 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
定 价:39.00 元

华中出版

本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务

序

课本乃一课之“本”。虽然高校的教材一般不会被称为“课本”，其分量也没有中小学课本那么重，但教材建设实为高校的基本建设之一，这大概是多数人都接受或认可的。

无论是教还是学，教材都是不可或缺的。一本好的教材，既是学生的良师益友，亦是教师之善事利器。应该说，这些年来，我国的高校教材建设工作取得了很大的成绩。其中，举全国之力而编写的“统编教材”和“规划教材”，为千百万人的成才作出了突出的贡献。这些“统编教材”和“规划教材”无疑具有权威性；但客观地说，随着我国社会改革的深入发展，随着高校的扩招和办学层次的增多，以往编写的各种“统编教材”和“规划教材”，就日益显露出其弊端和不尽如人意之处。其中最为突出的表现在于两个方面。一是内容过于庞杂。无论是“统编教材”还是“规划教材”，由于过分强调系统性与全面性，以至于每本教材都是章节越编越长，内容越写越多，不少教材在成书时接近百万字，甚至超过百万字，其结果既不利于学，也不便于教，还增加了学生的经济负担。二是重理论轻技能。几乎所有的“统编教材”和“规划教材”都有一个通病，即理论知识的分量相当重甚至太重，技能训练较少涉及。这样的教材，不要说“二本”、“三本”的学生不宜使用，就是一些“一本”的学生也未必合适。

现代高等教育背景下的本专科合格毕业生应该同时具备知识素质和技能素质。改革开放以后，人们都很重视素质教育；毫无疑问，素质教育中少不了知识素质的培养，但是仅注重学生知识素质的培养而轻视实际技能的获得肯定是不对的。我们都知道，在任何国家和任何社会，高端的研究型人才毕竟是少数，应用型、操作型的人才才是社会所需的大量人才。因此，对于“二本”尤其是“三本”及高职高专的学生来说，在大学阶段的学习中，其知识素质与技能素质的培养具有同等的重要性。从一定意义上说，为了使其动手能力和实践能力明显强于少数日后从事高端研究的人才，这类学生技能素质的培养甚至比知识素质的培养还要重要。

学生技能素质的培养涉及方方面面，教材的选择与使用便是其中重要的一环。正是基于上述考虑，在贯彻落实科学发展观的活动中，我们结合“二本”尤其是“三本”及高职高专学生培养的实际，组织编写了这一套系列教材。这一套教材与以往的“统编教材”和“规划教材”有很大的不同。不同在哪里？其一，体例与内容有所不同。每本教材一般不超过40万字。这样，既利于学，亦便于教。其二，理论与技能并重。在确保基本理论与基本知识不能少的前提下，注重专业技能的训练，增加专业技能训练的内容，让“二本”、“三本”及高职高专的学生通过本专科阶段的学习，在动手能力上明显强于研究生和“一本”的学生。当然，我们的这些努力无疑也

是一种摸索。既然是一种摸索，其中的不足和疏漏甚至谬误就在所难免。

中南财经政法大学武汉学院在本套教材的组织编写活动中，为了确保质量，成立了以主管教学的副院长徐仁璋教授为主任的教材建设委员会，并动员校内外上百名专家学者参加教材的编写工作。在这些学者中，既有曾经担任国家“规划教材”、“统编教材”的主编或撰写人的老专家，也有教学经验丰富、参与过多部教材编写的年富力强的中年学者，还有很多博士、博士后及硕士等青年才俊。他们之中不少人都已硕果累累，因而仅就个人的名利而言，编写这样的教材对他们并无多大意义。但为了教育事业，他们都能不计个人得失，甘愿牺牲大量的宝贵时间来编写这套教材，精神实为可嘉。在教材的编写和出版过程中，我们还得到了众多前辈、同仁及方方面面的关心、支持和帮助。在此，对为本套教材的面世而付出辛勤劳动的所有单位和个人表示衷心的感谢。

最后，恳请学界同仁和读者对本套教材提出宝贵的批评和建议。

中南财经政法大学武汉学院院长

2011.7.16

前言

随着高等院校教育观念的不断更新、教学改革的不断深入和办学规模的不断扩大,作为数学教学三大基础之一的微积分开设的专业覆盖面也在不断扩大.针对这一发展现状,本教材在编写时,既做到教学内容在深度和广度方面达到教育部高等学校"微积分"教学的基本要求,又注重微积分概念的直观性引入,加强学生分析和解决实际问题能力的培养,力求做到易教、易学.

本书的主要特点如下.

● 理论与实际应用有机结合,大量的实际应用贯穿于理论讲解的始终,体现了微积分在各个领域的广泛应用.

● 习题安排科学合理,每一节的后面给出了同步习题,并做了分类,其中(A)部分为基础题,(B)部分为提高题,每一章后面还有涵盖全章内容重难点的总习题,可根据学生自身基础和要求进行针对性练习,达到触类旁通的效果.

● 紧密结合数学软件 Mathematica.最后一章介绍了目前国际公认的优秀工程应用开发软件——Mathematica 的基本用法与线性代数相关的基本命令,并将其更新为主流的 Mathematica 10.4 版本.

● 数学名家介绍.每章最后都介绍了一位数学名家的历史故事,以增强读者的学习兴趣,丰富读者的数学修养.

● 考研真题.附录 A 收集了近几年的硕士研究生入学(数学三)微积分部分试题,并给出了参考答案,供有更高要求的学生进行选择性练习.

本书是对武汉学院马建新等主编的《微积分(上)》的修订,改正了原版的一些错误和不妥之处,并对内容做了重新调整;每章均有一些增删,在原版风格与体系的基础上做了进一步完善和更新,力求结构严谨、叙述清晰、例题典型、习题丰富,可供高等学校经管类专业和工科学生选作教材或参考书。通过修订,内容会更加实用,读者使用起来会更加方便.

在教材的修订过程中,我们得到了武汉学院校领导的大力支持,也得到许多同行的热切帮助,在此表示衷心感谢!

教材中难免有疏漏和不足之处,欢迎广大读者、专家批评指正.

编　者

2018 年 4 月

目　录

第1章　函　　数

读一本好的书，就是和许多高尚的人谈话.

——笛卡儿

函数是现代数学基本概念之一，是高等数学的主要研究对象. 所谓函数就是变量之间的依赖关系. 本章将介绍集合、函数的基本概念，以及它们的一些性质，为今后的学习打下基础.

1.1　集　　合

1.1.1　集合的概念

“集合”是数学中的一个基本概念. 我们先通过例子来说明集合这个概念.

例如，一个班的全体学生构成一个集合；一间教室里的所有桌椅构成一个集合；全体偶数构成一个集合；程序设计语言 C 的全体基本字符构成一个集合，等等. 一般地，所谓**集合**是指具有某种特定性质的事物的总体，构成这个集合的每一个事物称为该集合的**元素**.

通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. a 是集合 A 的元素，记作 $a\in A$；否则，记作 $a\notin A$.

一个集合，若它只含有限个元素，则称它为**有限集**；不是有限集的集合称为**无限集**.

集合的表示方法一般有两种：一是**列举法**，就是把集合的全体元素一一列举出来，例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可表示为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$；二是**描述法**，集合 M 若是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，则可以表示为 $M=\{x\mid x$ 具有性质 $P\}$. 例如，集合 B 若是不等式 $x^2-2x-1>0$ 的解集，则可以表示为 $B=\{x\mid x^2-2x-1>0\}$.

全体非负整数即自然数的集合，记作 $\mathbf{N}$；全体正整数的集合，记作 $\mathbf{N}^+$；全体整数的集合，记作 $\mathbf{Z}$；全体有理数的集合，记作 $\mathbf{Q}$；全体实数的集合，记作 $\mathbf{R}$.

1.1.2 集合的关系

定义 1.1.1 设 A,B 是两个集合,如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A),如图 1-1 所示.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的**真子集**,记作 $A\subsetneqq B$.

注 符号"$\in$"和"$\subset$"在概念上的区别:"$\in$"表示元素与集合间的"属于"关系,"$\subset$"表示集合与集合间的"包含"关系.

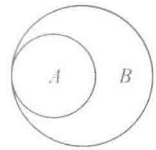

图 1-1

定义 1.1.2 设有集合 A 和 B,如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B **相等**,记作 $A=B$.

由研究的所有事物构成的集合称为**全集**,记作 I. 不含任何元素的集合称为**空集**,通常记作$\varnothing$. 规定空集$\varnothing$是任何集合 A 的子集,即$\varnothing\subset A$.

1.1.3 集合的运算

定义 1.1.3 设 A 和 B 是两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的**并集**,记作 $A\cup B$. 并集的文氏图如图 1-2 所示的阴影部分,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

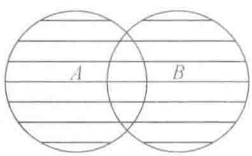

图 1-2

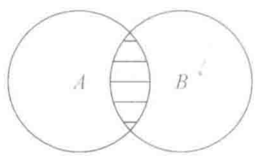

图 1-3

定义 1.1.4 设 A 和 B 是两个集合,由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的**交集**,记作 $A\cap B$. 交集的文氏图如图 1-3 所示的阴影部分,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

定义 1.1.5 设 A 和 B 是两个集合,由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的**差集**,记作 $A-B$. 差集的文氏图如图 1-4 所示的阴影部分,即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

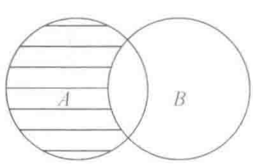

图 1-4

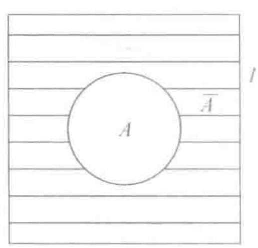

图 1-5

定义 1.1.6 全集 I 中所有不属于 A 的元素构成的集合,称为 A 的**补集**,记作 $\overline{A}$. 补集的文氏图如图 1-5 所示的阴影部分,即

$$\overline{A}=\{x \mid x\in I \text{ 且 } x\notin A\}.$$

集合的并、交、补运算满足下列法则:

(1)交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2)结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3)分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4)对偶律(摩根律) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

1.1.4 区间与邻域

1. 区间

区间是高等数学中最常用的实数集之一,分为**有限区间**和**无限区间**两类.

1)有限区间

设 a,b 为实数,且 $a<b$. 数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间,记作 (a,b),即 $(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$,如图 1-6 所示.

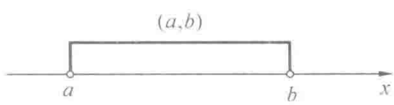

图 1-6

类似地,有闭区间和半开半闭区间:

$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$, $(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$, $[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$.

2)无限区间

引入记号 $+\infty$(读作"正无穷大")及 $-\infty$(读作"负无穷大"),则可类似定义无限区间. 例如,

$$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\}, \quad (-\infty,b)=\{x \mid x<b\}.$$

特别地,$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$,区间 $(-\infty,+\infty)$ 即全体实数的集合 $\mathbf{R}$.

2. 邻域

定义 1.1.7 设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,数集 $\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 **δ 邻域**,记作

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为**邻域的中心**,δ 称为**邻域的半径**,如图 1-7 所示.

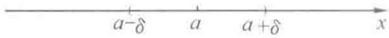

图 1-7

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$,因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

$U(a,\delta)$表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

若把邻域 $U(a,\delta)$的中心去掉,所得到的邻域称为点 a 的去心 δ 邻域,如图 1-8 所示,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

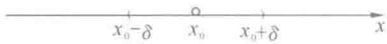

图 1-8

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

注 以 a 为中心的任何开区间均是点 a 的邻域,当不需要特别辨明邻域的半径时,可简记作 $U(a)$.

习题 1.1

(A)

1. 设全集 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,$A=\{3,4,5\}$,$B=\{4,7,8\}$,求 $A\cup B$,$A\cap B$,$A-B$.
2. 用列举法表示下列集合:
   (1)方程 $x^2+7x+12=0$ 的根的集合;
   (2)抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合;
   (3)集合$\{x \mid |x-1|\leqslant 2$ 的整数$\}$.
3. 用区间表示下列 x 的变化范围:
   (1)$2<x\leqslant 6$; (2)$x>0$; (3)$x^2\leqslant 9$; (4)$|x-3|<4$.

(B)

1. 证明:集合 $X=\{x \mid x=2n+1, n\in\mathbf{Z}\}$,$Y=\{y \mid y=4k\pm 1, k\in\mathbf{Z}\}$,则 $X=Y$.
2. 设 A,B 是任意两个集合,证明对偶律:$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

1.2 函　　数

1.2.1 函数的概念

在自然界、人类社会和人们的思维领域中,运动与变化无处不在,因而刻画这种运动的量与变化的量之间的依赖关系也就无处不在了.我们在观察某一现象的

过程中,常常会遇到各种不同的量.其中有的量在过程中不发生变化,我们把它称为**常量**;有的量在过程中是变化的,也就是可以取不同的数值,我们把它称为**变量**.

函数则是反映两个变量之间的依赖关系的数学模型.这一模型的建立并不是某个数学家或科学家一朝一夕完成的,而是许多科学家和数学家的不断思索,经提炼才形成的.下面介绍函数的概念.

定义 1.2.1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集.如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照对应法则 f 总有唯一确定的数值与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$,$x\in D$.

其中:x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,f 称为对应关系,数集 D 称为 f 的**定义域**,也记作 $D(f)$,即 $D(f)=D$.

对于 $x_0\in D$,按照对应法则 f,总有确定的值 y_0(记作 $f(x_0)$)与之对应,称 $f(x_0)$为函数在点 x_0 处的**函数值**.因变量与自变量的这种相依关系通常称为函数.当自变量 x 取遍 D 的所有数值时,对应的函数值 $f(x)$的全体构成的集合称为函数 f 的**值域**,记作 $Z(f)$,即 $Z(f)=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为 f 的值域.

函数的定义域和对应法则是确定函数关系的两个要素.如果两个函数的定义域和对应法则都相同,则称这两个函数是**相同的函数**.

1.2.2 函数的表示方法

函数的**表示方法**有以下三种.

一是**解析法**,即用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系.例如,在直角坐标系中,半径为 r、圆心在原点的圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$.

二是**表格法**,即将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系.例如,在实际应用中,我们经常用到的平方表、三角函数表等都是用表格法表示的函数.

三是**图形法**,即用坐标平面上的曲线来表示函数,一般用横坐标表示自变量,纵坐标表示因变量.例如,在直角坐标系中,半径为 r、圆心在原点的圆用图形法表示,如图 1-9 所示.

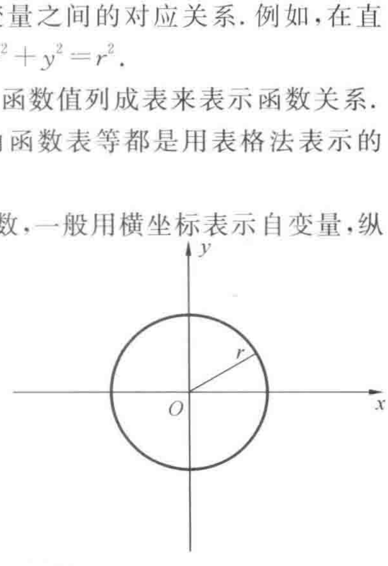

图 1-9

例 1 根据我国税收规定,个人所得税起征点自 2011 年 9 月 1 日起将由 2 000 元提高到 3 500 元(在个人收入中 3 500 元为免税收入,其余为应纳税收入),新的个税超额累进税率表如表 1-1 所示.如果一个人月收入为 6 000 元,问每月应缴纳个人所得税多少?

表 1-1 个人所得税七级超额累进税率表

全月应纳税所得/元	税率/(%)
(0,1 500]	3
(1 500,4 500]	10
(4 500,9 000]	20
(9 000,35 000]	25
(35 000,55 000]	30
(55 000,80 000]	35
>80 000	45

显然,要解决上述问题,需建立纳税额 y 和个人收入 x 之间的函数关系.但因为应纳税收入是分段计税的,所以纳税额 y 和个人收入 x 之间不能通过一个式子表示出来.写出前五个关系式为

$$y=\begin{cases} 0, & 0<x\leqslant 3\ 500, \\ (x-3\ 500)\cdot 3\%, & 3\ 500<x\leqslant 5\ 000, \\ 45+(x-5\ 000)\cdot 10\%, & 5\ 000<x\leqslant 8\ 000, \\ 345+(x-8\ 000)\cdot 20\%, & 8\ 000<x\leqslant 12\ 500, \\ 1\ 245+(x-12\ 500)\cdot 25\%, & 12\ 500<x\leqslant 38\ 500. \end{cases}$$

如果一个人月收入为 6 000 元,其中应纳税收入为 2 500 元,每月应缴纳个人所得税为 145 元.

在上例中,我们看到有时一个函数对于其定义域内自变量 x 取不同的值,不能用一个统一的数学表达式表示,而要用两个或两个以上的式子表示,通常称这类函数为**分段函数**.

例 2 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 它的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$,其图形如图 1-10 所示.

例 3 符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0 \end{cases}$ 的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$,值域 $Z(f)=\{-1,0,1\}$,其图形如图 1-11 所示.

注 对任意实数 x,下列关系成立:

$$x=|x|\cdot\operatorname{sgn}x.$$

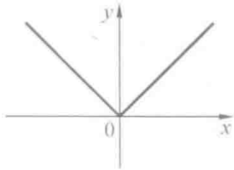

图 1-10

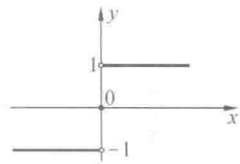

图 1-11

习题 1.2

(A)

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$； (2) $y=\log_a \arcsin x$；

(3) $y=\arccos\dfrac{x-1}{2}+\log_a(4-x^2)$； (4) $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

2. 求函数 $y=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的定义域和值域，并求 $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$ 和 $f(0)$.

3. 下列给出的关系是不是函数关系？

(1) $y=\sqrt{-x}$； (2) $y=\lg(-x^2)$；

(3) $y=\sqrt{-x^2-1}$； (4) $y=\sqrt{-x^2+1}$；

(5) $y=\arcsin(x^2+2)$； (6) $y^2=x+1$.

4. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同，为什么？

(1) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$； (2) $f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}, g(x)=x+1$； (4) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x, g(x)=1$.

(B)

1. 设 $f(x)=ax^2+bx+5$，且 $f(x+1)-f(x)=8x+3$，试确定 a,b 的值.

1.3 函数的特性

1.3.1 有界性

定义 1.3.1 设 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，实数集 $X\subset D(f)$. 如果存在一个正数 M，使得对每一个 $x\in X$，$|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**. 每一个具有上述性质的 M，都是该函数的界. 若具有上述性质

的正数 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

例如函数 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为对于任何实数 x 恒有 $|\cos x|\leqslant 1$. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 内无界，在 $[1,+\infty)$ 内有界.

例 1 判断函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 是否有界.

解 易见，$f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$.

当 $x\neq 0$ 时，
$$|f(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2};$$
当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，有
$$|f(0)|<\frac{1}{2}.$$
综上可知 $|f(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 为有界函数.

1.3.2 单调性

定义 1.3.2 设区间 $I\subset D(f)$. 如果对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**；如果对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**. 单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**.

如图 1-12 所示，$y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加，在 $(-\infty,0]$ 内单调减少，在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的；如图 1-13 所示，$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

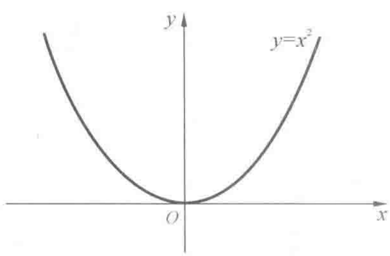

图 1-12

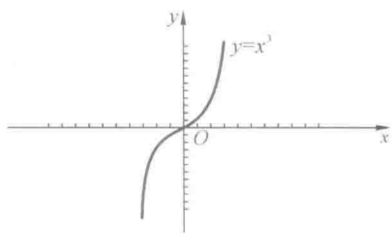

图 1-13

当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内**单调不减**；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内**单调不增**.

1.3.3 奇偶性

定义 1.3.3 给定函数 $y=f(x)$.

(1) 如果对所有的 $x\in D(f)$，有 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$ 叫做**偶函数**；

(2) 如果对所有的 $x\in D(f)$，有 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 叫做**奇函数**.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称. 例如 $y=\sin x$ 为奇

函数，如图 1-14 所示；$y=\cos x$ 为偶函数，如图 1-15 所示.

例 2 判断符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 的奇偶性.

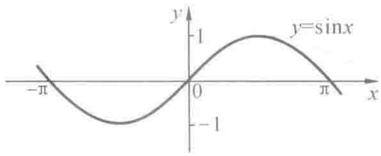

图 1-14

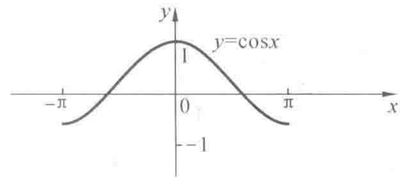

图 1-15

解 因为 $\operatorname{sgn}(-x)=-\operatorname{sgn}x$，故 $\operatorname{sgn}x$ 为奇函数.

例 3 判断狄利克雷(Dirichlet)函数 $D(x)=\begin{cases}1, x\text{ 为有理数时}\\ 0, x\text{ 为无理数时}\end{cases}$ 的奇偶性.

解 因为 $D(-x)=D(x)$，故 $D(x)$ 为偶函数.

例 4 判断 $f(x)=x^3+1$ 的奇偶性.

解 因为 $f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1$，既不等于 $f(x)=x^3+1$，也不等于 $-f(x)=-x^3-1$，所以函数 $y=x^3+1$ 既非奇函数，也非偶函数.

1.3.4 周期性

定义 1.3.4 对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 T，使得 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 满足这个等式的最小正数 T 称为函数的**最小正周期**.

例如，对于常数函数 $y=C$，任何正数都是此函数的周期，所以无最小正周期.

因此，并非每个周期函数都有最小正周期.

例 5 设函数 $f(x)$ 是以 $T(T>0)$ 为周期的周期函数，证明 $f(ax)(a>0)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

证明 因为 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，所以有

$$f(ax+T)=f(ax),$$

而

$$f(ax+T)=f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right],$$

则

$$f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax),$$

即 $f(ax)$ 是以 $\dfrac{T}{a}$ 为周期的周期函数.