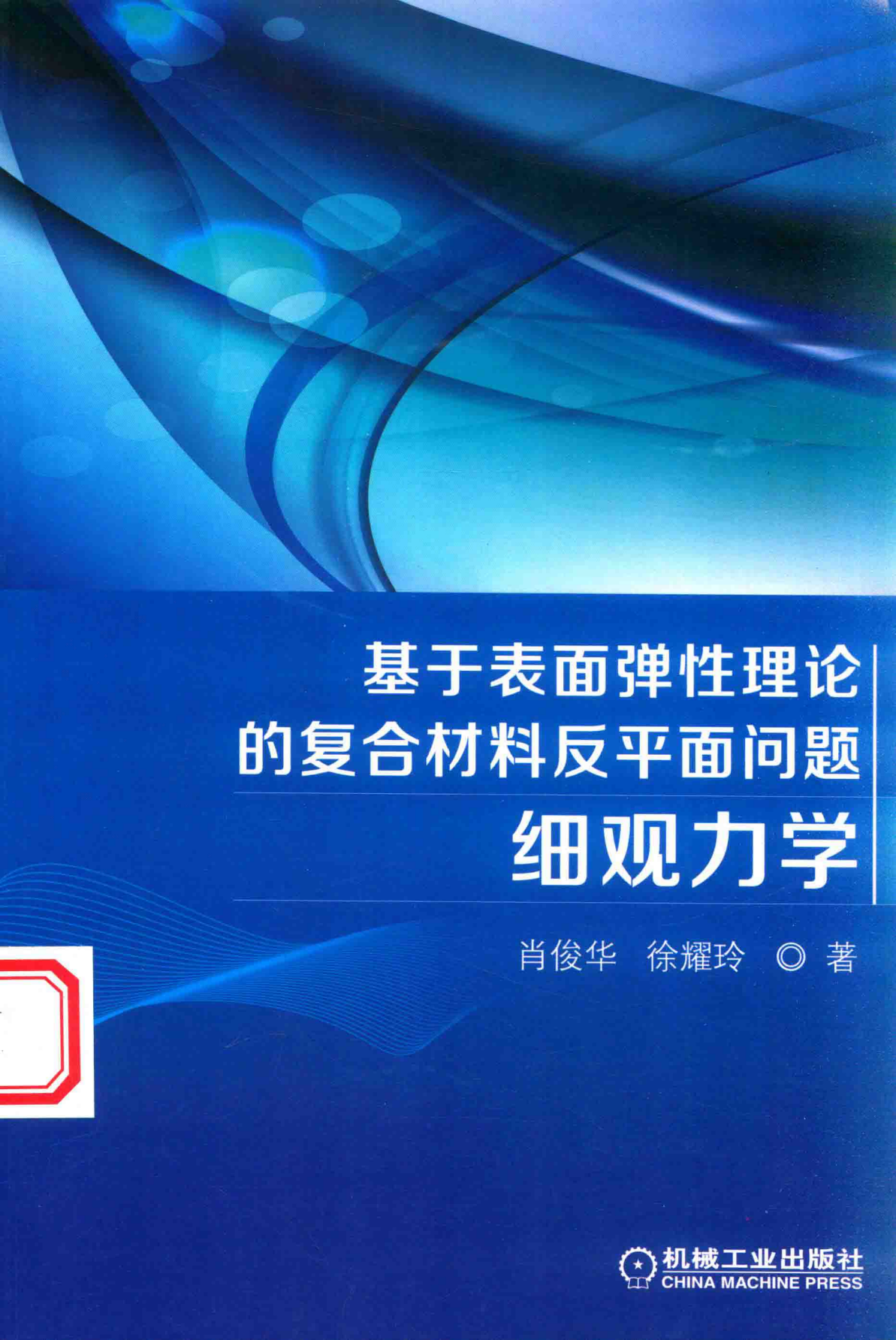




基于表面弹性理论 的复合材料反平面问题 细观力学

肖俊华 徐耀玲 ◎ 著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

基于表面弹性理论的复合材料 反平面问题细观力学

Micromechanics of Antiplane Problems of
Composites Based on Surface Elasticity Theory

肖俊华 徐耀玲 著



机械工业出版社

本书结合作者在复合材料细观力学领域的研究成果,介绍了表面弹性理论在复合材料反平面问题研究中的应用,着重阐述了各种复合材料反平面问题的表征模型、解析方法和结果讨论,揭示了该类纳米非均匀材料宏细观力学行为的尺寸效应和耦合效应等特征。本书共9章,内容分别为:纳米夹杂复合材料反平面问题、考虑夹杂形状时纳米复合材料反平面问题、纳米涂层夹杂复合材料反平面问题、正交各向异性体中纳米缺陷反平面问题、纳米孔边裂纹反平面问题、压电纳米复合材料反平面问题、考虑截面形状时压电纳米复合材料反平面问题、纳米缺陷压电体反平面问题以及纳米孔边裂纹压电体反平面问题。

本书可供学习和从事复合材料力学和细观力学领域的高年级本科生、研究生以及相关科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

基于表面弹性理论的复合材料反平面问题细观力学/肖俊华,徐耀玲著. —北京:机械工业出版社,2018.12

ISBN 978-7-111-61448-7

I. ①基… II. ①肖…②徐… III. ①复合材料力学-弹性力学-研究 IV. ①TB301

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第267222号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)

策划编辑:张超 责任编辑:张超 任正一

责任校对:陈越 封面设计:张静

责任印制:常天培

北京圣夫亚美印刷有限公司印刷

2019年1月第1版第1次印刷

169mm×239mm·8印张·152千字

标准书号:ISBN 978-7-111-61448-7

定价:49.00元



凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
电话服务

网络服务

服务咨询热线:010-88379833

机工官网:www.cmpbook.com

读者购书热线:010-88379649

机工官博:weibo.com/cmp1952

教育服务网:www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版

金书网:www.golden-book.com

前 言

复合材料具有显著的微结构特征，它是一种多相（基体、夹杂、涂层、孔洞、裂纹和界面等）材料，其局部细观场、宏观有效性能和强度失效规律既取决于组分材料的力学性能，又取决于细观微结构的几何特征。复合材料力学已成为力学、物理学和材料科学等多学科交叉的热门研究领域，利用细观力学分析方法研究复合材料的宏细观力学性能，是历届国际理论与应用力学大会（ICTAM）、国际非均匀材料力学会议（ICHMM）和中国力学大会（CCTAM）的重要专题。

复合材料的结构设计和力学性能分析，要求研究者掌握力学原理与材料微结构相结合的理论模型与分析方法，揭示材料的宏细观力学性能与微结构参数之间的关联，提炼适用范围广的微结构参数描述方式，从而建立复合材料的细观力学模型。同时，材料和结构的设计和制备已深入到纳米尺度，纳米复合材料的力学行为以及材料和结构的纳观尺度力学行为是学术界关注的前沿和热点。研究该类问题涉及如何在材料的宏观响应中计入纳米量级的细观响应。在表征纳米尺度结构和材料表面效应的诸多理论中，表面弹性理论通过在缺陷（夹杂、孔洞和裂纹）表面引入表面应力，将连续介质力学中的宏观特征尺寸与纳米缺陷的微观特征尺寸跨尺度进行了统一描述。

著者近年来基于表面弹性理论，致力于研究纳米复合材料反平面问题的细观场和宏观有效性能。本书是著者多年来在复合材料细观力学方面的研究成果。全书共9章，将讨论表面弹性理论在纳米（涂层）夹杂复合材料、纳米缺陷正交各向异性体、纳米孔边裂纹、压电纳米（涂层）复合材料、压电纳米缺陷以及压电纳米孔边裂纹等非均匀材料反平面问题在细观力学中的应用。

本书的研究工作得到了国家自然科学基金（11302186）、河北省自然科学基金（A2013203103，A2013203213）、河北省高等学校青年拔尖人才计划项目（BJ2014058）和燕山大学“新锐工程”培养计划的支持，在此表示感谢。

在撰写本书过程中，我们对已发表的成果重新进行了整理和补充。限于作者学识和水平，书中难免存在不妥之处甚至错误，也难免遗漏国内外有关重要的参考文献，在此请读者予以谅解，并批评指正。

著者于燕山大学

目 录

前 言

第1章 纳米夹杂复合材料反平面

问题 1

1.1 细观力学经典模型 1

1.2 引言 2

1.3 纳米夹杂复合材料广义 自洽模型 3

1.4 反平面剪切弹性理论基本方程和 复变弹性方法求解 5

1.5 纳米夹杂复合材料有效反平面 剪切模量的封闭解 7

1.6 特殊情形 8

1.7 结果与讨论 9

1.7.1 夹杂尺寸的影响 9

1.7.2 夹杂表面性能的影响 10

1.7.3 夹杂剪切模量的影响 10

1.8 本章小结 11

参考文献 12

第2章 考虑夹杂形状时纳米复合材料

反平面问题 16

2.1 引言 16

2.2 共焦点纳米椭圆柱三相模型 反平面剪切问题 17

2.3 保角映射和复变弹性理论求解 18

2.4 考虑夹杂形状时有效反平面剪切 模量的封闭解 20

2.5 特殊情形 22

2.6 结果与讨论 23

2.6.1 椭圆夹杂尺寸的影响 23

2.6.2 椭圆夹杂形状比的影响 24

2.6.3 椭圆夹杂体积分数的 影响 24

2.6.4 椭圆夹杂模量的影响 24

2.7 本章小结 26

参考文献 26

第3章 纳米涂层夹杂复合材料

反平面问题 28

3.1 引言 28

3.2 纳米涂层夹杂复合材料的 广义自洽模型 29

3.3 复变弹性理论分析与解答 30

3.4 纳米涂层复合材料有效反平面剪切 模量的封闭解 33

3.5 中空纳米夹杂填充复合材料有效 反平面剪切模量的封闭解 34

3.6 中空纳米夹杂复合材料解答的 特殊情形 35

3.7 结果与讨论 36

3.7.1 涂层壁厚和表面性能的 影响 36

3.7.2 涂层弹性模量的影响 36

3.7.3 中空纳米夹杂壁厚和表面 性能的影响 38

3.7.4 中空纳米夹杂弹性模量的 影响 39

3.8 本章小结 39

参考文献 40

第4章 正交各向异性体中纳米缺陷

反平面问题 44

4.1 引言 44

4.2 含椭圆形纳米缺陷正交 各向异性体 46

4.3 正交各向异性体反平面剪切问题的 复变弹性求解 47

4.4 应力场封闭解和特殊情形	49	5.7 本章小结	70
4.5 结果与讨论	51	参考文献	70
4.5.1 解析解与有限元结果比较	51	第6章 压电纳米复合材料反平面问题	74
4.5.2 椭圆夹杂尺寸的影响	52	6.1 引言	74
4.5.3 基体材料弹性主方向比的影响	53	6.2 压电纳米圆柱三相模型反平面问题和控制方程	75
4.5.4 椭圆夹杂形状比的影响	54	6.3 力电耦合载荷时复变电弹理论求解	77
4.5.5 椭圆夹杂弹性模量的影响	54	6.4 压电纳米复合材料有效电弹模量的矩阵形式封闭解	79
4.5.6 基体材料弹性主方向比对孔边应力场的影响	55	6.5 压电纳米涂层复合材料有效电弹模量的矩阵形式封闭解	80
4.5.7 孔洞形状比对应力场的影响	56	6.6 结果与讨论	81
4.5.8 裂纹尺寸对应力强度因子的影响	57	6.6.1 夹杂半径的影响	82
4.6 本章小结	57	6.6.2 夹杂体积分数的影响	83
参考文献	57	6.6.3 涂层夹杂尺寸的影响	84
第5章 纳米孔边裂纹反平面问题	61	6.6.4 涂层厚度的影响	84
5.1 引言	61	6.7 本章小结	85
5.2 纳米三角形孔边裂纹模型和控制方程	62	参考文献	86
5.3 问题的转换和基本解	63	第7章 考虑截面形状时压电纳米复合材料反平面问题	90
5.4 应力场和应力强度因子	65	7.1 引言	90
5.5 应变能释放率	66	7.2 压电共焦点纳米椭圆柱三相模型反平面问题	90
5.6 结果与讨论	67	7.3 复变电弹理论矩阵形式解	91
5.6.1 应力强度因子的尺寸依赖效应	67	7.4 考虑夹杂形状时压电复合材料有效电弹模量的矩阵形式解	94
5.6.2 裂纹长度对应力强度因子的影响	67	7.4.1 沿长轴方向的有效电弹常数	94
5.6.3 表面性能对应力强度因子的影响	68	7.4.2 沿短轴方向的有效电弹常数	96
5.6.4 应变能释放率随缺陷尺寸的变化	68	7.5 结果与讨论	97
5.6.5 裂纹长度对应变能释放率的影响	69	7.5.1 夹杂尺寸和体积分数的影响	97
		7.5.2 夹杂形状比的影响	98
		7.6 本章小结	99
		参考文献	100

第8章 纳米缺陷压电体反平面

问题	101
8.1 引言	101
8.2 纳米椭圆孔压电体反平面问题的 复变电弹理论求解	101
8.3 应力场和电位移场解析解	104
8.4 应力和电位移场强因子封闭解	105
8.5 结果与讨论	105
8.5.1 椭圆孔边应力和电位移集中 系数的尺寸效应	106
8.5.2 椭圆孔边应力和电位移集中 系数的形状效应	107
8.5.3 裂尖应力和电位移场强因子的 尺寸效应	107
8.5.4 应力和电位移场强因子随机 载荷的变化	108
8.5.5 应力和电位移场强因子随电 载荷的变化	109
8.6 本章小结	110
参考文献	111

第9章 纳米孔边裂纹压电体反平面

问题	113
9.1 引言	113
9.2 纳米圆孔边裂纹压电体反平面 问题的复变弹性解	114
9.3 裂纹尖端电弹场强因子	116
9.4 裂纹尖端能量释放率	117
9.5 结果与讨论	117
9.5.1 电弹场强因子的尺寸 依赖	117
9.5.2 裂纹相对尺寸对电弹场强 因子的影响	118
9.5.3 孔洞相对尺寸对能量释放率的 影响	119
9.5.4 机械载荷对能量释放率的 影响	119
9.5.5 电载荷对能量释放率的 影响	120
9.6 本章小结	120
参考文献	121

第1章 纳米夹杂复合材料反平面问题

1.1 细观力学经典模型

复合材料具有显著的微结构非均匀特征,它是一种多相(基体、夹杂、涂层、孔洞、裂纹、界面等)材料,其宏观和细观性能既取决于各组分的材料性能,又取决于细观微结构的几何特征(截面形状、分布方式、体积分数等)^{[1][2]}。复合材料的宏观有效性能与其内部微结构之间存在确定而复杂的关联规律^{[1]-[5]}。

复合材料的弹性性能问题早有研究,早期对复合材料的有效模量采用刚度平均法来预测,包括并联模型^[6]、串联模型^[7]和混合串并联模型^[8],对于纵向拉伸模量和主泊松比所得预测值与试验结果吻合很好,然而对于其他模量均出现了较大的误差。根据格林函数性质, Eshelby^{[9][10]}关于椭球夹杂的一般解给出了 Eshelby 张量定义并用椭圆积分形式表示出来,成为计算复合材料等效弹性模量的基础。基于 Eshelby 等效夹杂法容易得到预测复合材料有效模量的稀疏法。稀疏法的基本思想是不考虑夹杂之间的相互影响,用无限大基体中单个夹杂的弹性场来描述整个复合材料内的平均弹性场,这种方法仅适用于夹杂分布比较稀疏的情形。自洽法^{[11]-[14]}的基本思想是考虑夹杂间的相互作用,认为夹杂单独处于等效介质中,而该等效介质的弹性常数恰好就是含夹杂非均匀材料的有效弹性常数。自洽法的理论结果与实验值有一定的差距,夹杂的体积分数越大二者差距越大。微分法^{[15]-[17]}的基本思想是用夹杂替换复合材料(初始时为基体)的一部分,构造一个往复合材料内逐渐添加夹杂的微分过程,形成“少量添加—均匀化”的循环迭代过程。开始时从基体中取出一定体积的材料,同时均匀地在该介质中添入同样体积的夹杂材料,把形成的复合材料用具有相同弹性模量的均匀介质来代替,然后继续上述“取出一添入”的过程,直至复合材料中夹杂的体积分数达到所要求的比例为止。Mori-Tanaka 方法^[18]实质上是通过修正无穷远处的应力来考虑夹杂间的相互作用,与稀疏法模型类似,夹杂仍嵌于无限大基体材料之中,但基体在远场中所受的应力不是外部施加的应力,而是基体的平均应力。

采用的细观力学方法不同,对复合材料等效弹性性能的预测结果也不同。稀疏法没有考虑夹杂之间的相互作用,只适用于夹杂体积分数较低的情形,具体情况取决于夹杂形状以及夹杂与基体材料的弹性失配程度等因素^[19]。自洽法仅考虑了一个夹杂和等效介质间的相互作用,在夹杂体积分数较大时,自洽法预测的有

效弹性模量过高(含硬夹杂)或过低(含软夹杂),特别是当夹杂与基体的弹性常数相差较大时,这一偏差更加显著^[4]。对于含孔洞或刚性夹杂的非均匀材料,基于自洽法的预测结果在大于一定的夹杂体积分数后,复合材料的刚度等于零或无穷大^[19]。自洽法无法描述具有连续相这一基本特征的复合材料微结构特点,更适用于没有连续相的非均匀材料有效性能的估计^[19]。通过修正远场边界条件,Mori-Tanaka方法在一定程度上计及了夹杂之间的相互作用,然而实际材料中每个夹杂都是由基体和其他夹杂的混和体所包围,而Mori-Tanaka方法中的Eshelby张量是以无限大基体中嵌入单个夹杂为模型建立的,所以这一方法计及夹杂间的相互作用较弱^[1]。

广义自洽模型^{[20]~[22]}由夹杂、基体层和等效介质构成,夹杂与基体层外边界所围成的体积之比恰好是含夹杂非均匀材料中夹杂的体积分数,等效介质的弹性常数与含夹杂非均匀材料的有效弹性常数相同。广义自洽方法给出的结果与实验结果最为一致,且能给出夹杂在极端情况下(孔洞与刚性夹杂)的准确结果,也能在夹杂体积分数趋于1时给出正确的渐进性质^[23]。与自洽法模型相比,广义自洽模型更合理一些,这是由于广义自洽模型考虑了夹杂、基体层和有效介质间的相互作用,使得各相“比重”处于平衡,即有效介质内不仅含有夹杂,而且夹杂周围还附有一层适当的基体,同时广义自洽模型放宽了各相之间的界面约束^{[1][24]}。广义自洽模型是一个较为精细的细观力学模型,早期的广义自洽模型只适用于圆截面纤维与球形颗粒夹杂复合材料,不适用于考虑增强相形状影响的情况。为了将广义自洽模型推广到非规则形状的增强相,Huang和Hu^[25]在考虑材料形状影响时采用了共形状比的椭圆模型,并计算了面内体积模量和剪切模量。Jiang和Cheung^[26]提出了三相共焦点椭圆柱的广义自洽模型,获得了复合材料反平面剪切模量的显式表达,所得结果与实验吻合较好。马寒松和胡更开^[27]给出了基于共焦点椭球构型对空间任意取向复合材料模量的解析计算公式,讨论了纤维不同角度平均方法对有效性质的影响。

1.2 引言

纳米结构材料(纳米晶体材料和纳米复合材料等)和纳米尺度构件(薄膜、金属丝、梁和管等)具有异于宏观尺寸时特殊的力学和物理性能,广泛应用于电动机、生物工程和光学等领域^[28]。现代材料科学技术的发展有能力设计和制造纳米尺度微结构的复合材料^[29]。经典弹性理论没有考虑夹杂等非均匀相的内在尺寸依赖效应,然而当非均匀相的尺寸为纳米量级时,复合材料的尺度效应将非常明显^[30]。这是由于当非均匀相的尺寸较大时(一般大于100nm),其比表面积(表面积/体积)非常小,可以不考虑表面效应;而当非均匀相的尺寸非常小时

(小于100nm), 其比表面积非常大, 表面性能对复合材料细观应力场和宏观有效性能将产生极大影响^{[31][32]}。

对于纳米非均匀材料宏细观有效性能尺度效应的研究, 基于广义自洽方法, 诸多国内外学者进行了卓有意义的探索, 下列是近年来的代表性文献。Jiang 和 Weng^[33]受纳米晶体固体分子动力学模拟的启发提出了一种广义自洽多晶模型, 研究了晶粒尺寸从传统粗晶粒到纳米尺度粒度时金属屈服强度的演变规律。之后他们^[34]又探讨了纳米晶粒陶瓷压缩强度的尺寸效应。考虑纳米尺度时的表/界面效应, Duan 等^[35]给出了纳米复合材料体积模量和剪切模量的闭合形式解答, 进一步获得了具有线弹性界面效应时球形颗粒和圆柱形纤维增强复合材料有效模量的解析表达^[36]。利用纳米颗粒-基体界面的相干界面模型, Quang 和 He^[37]研究了具有球形各向异性夹杂纳米复合材料有效热弹性能的尺寸依赖效应。Chen 等^[38]讨论了具有界面应力时单向纳米圆柱纤维增强复合材料的应力集中和有效体积模量的尺寸依赖现象。基于变分法, 他们^[39]又获得了考虑界面应力时球形纳米夹杂复合材料的有效横向剪切模量和有效热膨胀系数表达式。Quang 和 He^[40]预测了圆柱型各向异性纳米纤维和各向异性基体复合材料的有效热弹性模量。Hasheminejad 和 Avazmohammadi^[41]研究了两相纳米复合材料中平面纵横弹性波传播特性的尺寸效应。基于考虑表/界面效应的四相球模型, 邹波和卢子兴^[42]得到了中空纳米微球填充复合材料的有效模量和应力场的闭合形式解。肖俊华和徐耀玲^[43]基于广义自洽方法给出了纳米夹杂复合材料有效纵向剪切模量的封闭形式解。Chatzigeorgiou 等^[44]讨论了含有径向分布碳纳米管涂层碳纤维复合材料的有效力学性能。考虑微纳纤维界面层特征, Lurie 和 Minhat^[45]预估了径向涂覆微纳米结构的毛束纤维复合材料的有效弹性性能。Hervé - Luanco^[46]分析了非完好粘接界面多涂层颗粒复合材料的弹性行为以及复合材料的尺寸效应和不匹配效应。Fang 等^{[47][48]}考虑纤维形状的影响, 研究了压电纳米纤维复合材料的有效力电耦合性能。基于傅里叶变换, Tran 等^[49]给出了周期纤维纳米复合材料的有效弹性模量并与广义自洽方法结果进行了比较。Chen 等^[50]讨论了界面残余应力对单向纤维增强纳米复合材料热弹性能的影响。Shi^[51]研究了非完好界面时椭圆纳米纤维增强复合材料的纵向剪切弹性响应。

1.3 纳米夹杂复合材料广义自洽模型

本章目的是建立纳米夹杂复合材料有效反平面剪切模量的预测公式, 研究影响纳米复合材料反平面剪切力学行为的各项因素。基于广义自洽方法和 Gurtin - Murdoch 表面弹性理论^{[52]-[54]}建立纳米夹杂复合材料的广义自洽模型, 由边界条件给出弹性场的全场解析解, 利用平均场理论获得有效反平面剪切模量的闭合解。在数值算例中讨论夹杂的尺寸、表面性能和力学性能对纳米复合材料有效反平面

剪切模量的影响。

图 1-1 为考虑界面应力时纳米夹杂复合材料的广义自洽法模型示意图。夹杂与基体的界面用半径为 R 的圆周表示，夹杂区用 Ω_I 表示，基体区用 Ω_M 表示，等效介质区用 Ω_E 表示，夹杂体积分数 $\lambda = R^2/b^2$ 。符号 I、O、M、E 分别表示夹杂、界面、基体和等效介质。夹杂和基体的剪切模量分别为 G_I 和 G_M ，复合材料的有效反平面剪切模量记为 G_E 。图中 xOy 为横观各向同性平面，远场作用均匀纵向剪切应力为 τ_{xz}^∞ 和 τ_{yz}^∞ ，不失一般性令 $\tau_{yz}^\infty = 0$ 。

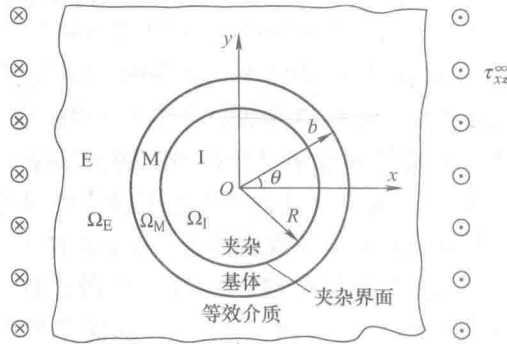


图 1-1 考虑界面应力时圆截面夹杂复合材料的广义自洽模型 (z 平面, $z = x + iy$)

当夹杂尺寸在纳米量级时，其特征尺寸和表面的特征尺寸量级相当，夹杂的表面效应不可忽略。研究该类问题涉及如何在复合材料的宏观响应中将夹杂纳米量级的细观响应计入。从尺寸上看，宏观特征尺寸在毫米量级，纳米夹杂以及表面特征尺寸在纳米量级，Gurtin - Murdoch 表面弹性理论^{[52]~[54]}将这类跨尺度的响应进行了统一描述。根据 Gurtin - Murdoch 表面弹性理论，夹杂和基体之间的界面被看作是一个没有厚度但有自身物理性能的弹性层，弹性体内的平衡方程和本构方程与经典弹性理论一致，但由于界面应力的出现，纳米夹杂界面处需要应用非经典的应力边界条件：

$$\sigma_{\alpha\beta}^S = \tau_0 \delta_{\alpha\beta} + 2(\mu^S - \tau^0) \varepsilon_{\alpha\beta}^S + (\lambda^S + \tau^0) \varepsilon_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \quad (1-1)$$

式中， $\sigma_{\alpha\beta}^S$ 表示界面应力分量； τ^0 表示界面残余应力，可以忽略； $\delta_{\alpha\beta}$ 表示 Kronecker 符号； $\varepsilon_{\alpha\beta}^S$ 表示界面处的应变分量； λ^S 和 μ^S 分别表示界面拉梅常数。

弹性理论中反平面剪切问题的平衡方程和本构方程如下^{[28][31]}：

在夹杂、基体和等效介质内，其形式为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1-2)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= 2G\varepsilon_{rz} \\ \tau_{\theta z} &= 2G\varepsilon_{\theta z} \end{aligned} \quad (1-3)$$

式中, w 表示纵向位移。在夹杂与基体之间的界面上存在应力跳跃边界条件, 形式为

$$\tau_{rz}^I(t) - \tau_{rz}^M(t) = \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\theta z}^0}{\partial \theta} \quad (1-4)$$

$$\tau_{\theta z}^0 = 2\mu^S \varepsilon_{\theta z}^0 \quad (1-5)$$

式中, G 表示剪切模量; (ρ, θ) 表示极坐标; $\tau_{\theta z}^0$ 和 $\varepsilon_{\theta z}^0$ 分别表示界面应力和界面应变分量; μ^S 为表面弹性常数。对于完好连接的共格界面, 界面应变与相邻材料的剪切应变值相等^[28], 即

$$\varepsilon_{\theta z}^0 = \varepsilon_{\theta z}^I = \varepsilon_{\theta z}^M \quad (1-6)$$

1.4 反平面剪切弹性理论基本方程和复变弹性方法求解

由弹性理论可知, 反平面剪切问题的解答可以由一个解析函数 $F(z)$ 进行描述:

$$w = \frac{1}{2} [F(z) + \overline{F(z)}] \quad (1-7)$$

$$= \operatorname{Re}[F(z)]$$

$$\tau_{rz} - i\tau_{\theta z} = G e^{i\theta} F'(z) \quad (1-8)$$

式中, $F'(z)$ 表示对 z 求导; 上划线表示取共轭; $z = x + iy = re^{i\theta}$ 。

为方便问题分析和求解, 定义应力沿任意弧段 $\widehat{AB}$ 的积分为

$$\begin{aligned} T_\tau &= - \int_A^B (\tau_{yz} dx - \tau_{xz} dy) \\ &= G \operatorname{Im}[F(z)] \Big|_A^B \end{aligned} \quad (1-9)$$

在圆环域内解析函数 $F(z)$ 可以展开成 Laurent 级数形式^[55]:

$$F(z) = a^* \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k \quad (1-10)$$

式中, a^* 和 a_k 是待定复常数。

根据所研究问题的几何条件和边界条件等特征, 图 1-1 中的纵向位移 w 是关于 y 轴反对称的奇函数, 由位移公式(1-7) 和解析函数式(1-10) 的对应关系可以推出公式(1-10) 中仅有奇数次幂项; 再由应力公式(1-8) 和解析函数式(1-10) 的对应关系, 可以知道应力表达式中含有关于尺寸项的 $k-1$ 次幂表达式, 所研究问题是一个无限大单连通弹性体, 应当保证无穷远处应力是个有限大的确定值, 故可推知 k 的最大值为 1。由上述分析可知, 采取下列有限项级数形式就可以得到问题的精确解:

$$\begin{aligned} F_1(z) &= A_1 z \\ &= A_1 r e^{i\theta} \end{aligned} \quad \text{在 } \Omega_I \text{ 区域} \quad (1-11)$$

$$\begin{aligned}
 F_M(z) &= B_1 z + B_{-1} \frac{1}{z} \\
 &= B_1 r e^{i\theta} + \frac{B_{-1}}{r} e^{-i\theta} \quad \text{在 } \Omega_M \text{ 区域}
 \end{aligned} \tag{1-12}$$

$$\begin{aligned}
 F_E(z) &= C_1 z + C_{-1} \frac{1}{z} \\
 &= C_1 r e^{i\theta} + \frac{C_{-1}}{r} e^{-i\theta} \quad \text{在 } \Omega_E \text{ 区域}
 \end{aligned} \tag{1-13}$$

式中, A_1 、 B_1 、 B_{-1} 、 C_1 和 C_{-1} 是实常数。

图 1-1 中各界面上的边界条件如下:

在圆周 $r=R$ 上

$$w_1(t) = w_M(t) \quad t = R e^{i\theta} \tag{1-14}$$

$$\tau_{rz}^I(t) - \tau_{rz}^M(t) = \frac{2\mu^S}{R} \frac{\partial \varepsilon_{\theta z}^0}{\partial \theta} \quad t = R e^{i\theta} \tag{1-15}$$

在圆周 $r=b$ 上

$$w_M(t) = w_E(t) \quad t = b e^{i\theta} \tag{1-16}$$

$$T_\tau^M = T_\tau^E \tag{1-17}$$

边界条件式(1-17) 表示径向应力 τ_{rz} 在界面 $r=b$ 上连续。

利用远场的载荷条件 $\tau_{rz}^E - i\tau_{\theta z}^E \big|_{r \rightarrow \infty} = e^{i\theta} \tau_{xz}^\infty$, 联立式(1-8) 和式(1-13) 可以得到常数 C_1

$$C_1 = \frac{\tau_{xz}^\infty}{G_E} \tag{1-18}$$

由界面 $r=R$ 上的位移连续条件 (1-14) 和应力跳跃条件 (1-15) 可以得到下列方程组

$$A_1 = B_1 + \frac{B_{-1}}{R^2} \tag{1-19}$$

$$\left(G_1 + \frac{\mu^S}{R}\right) A_1 - G_M B_1 + \frac{G_M}{R^2} B_{-1} = 0 \tag{1-20}$$

联立求解式(1-19) 和式(1-20) 可得

$$B_1 = S_1 A_1 \tag{1-21}$$

$$B_{-1} = R^2 S_{-1} A_1$$

其中

$$S_1 = \frac{G_1 + G_M + \mu^S/R}{2G_M} \tag{1-22}$$

$$S_{-1} = \frac{G_M - G_1 - \mu^S/R}{2G_M}$$

由界面 $r=b$ 上的位移连续条件 (1-16) 和合力等效条件 (1-17) 可以得到下列方程

$$B_1 + \frac{B_{-1}}{b^2} = C_1 + \frac{C_{-1}}{b^2} \quad (1-23)$$

$$\frac{G_M}{G_E} \left(B_1 - \frac{B_{-1}}{b^2} \right) = C_1 - \frac{C_{-1}}{b^2} \quad (1-24)$$

联立式(1-21)、式(1-23) 和式(1-24), 求解可得

$$C_1 = \frac{1}{2} A_1 \left[S_1 + \lambda S_{-1} + \frac{G_M}{G_E} (S_1 - \lambda S_{-1}) \right] \quad (1-25)$$

比较式(1-18) 和式(1-25), 容易得到

$$A_1 = \frac{2\tau_{xz}^\infty}{Q} \quad (1-26)$$

$$Q = G_M (S_1 - \lambda S_{-1}) + G_E (S_1 + \lambda S_{-1})$$

式中, G_E 表示待求的未知复合材料等效剪切模量。

1.5 纳米夹杂复合材料有效反平面剪切模量的封闭解

上一节得到了各系数含有未知量 G_E 的表达式, 代入各自的解析函数, 可以进一步写出夹杂和基体内的位移场、应力场和应变场表达, 这里省略。对区域 Ω_I 和 Ω_M 内的应力场和应变场分别进行面积平均, 经过计算, 复合材料内夹杂和基体内的平均应变和平均应力分别为

$$\begin{aligned} \overline{\gamma_{xz}^I} &= A_1 \\ \overline{\gamma_{xz}^M} &= B_1 \\ \overline{\tau_{xz}^I} &= G_I A_1 \\ \overline{\tau_{xz}^M} &= G_M B_1 \end{aligned} \quad (1-27)$$

复合材料代表体单元内的平均应变和平均应力, 可由体积平均进行计算^{[35][38][56]}:

$$\begin{aligned} \overline{\gamma_{xz}} &= \lambda \overline{\gamma_{xz}^I} + (1-\lambda) \overline{\gamma_{xz}^M} \\ &= [\lambda + (1-\lambda) S_1] A_1 \\ &= 2[\lambda + (1-\lambda) S_1] \frac{\tau_{xz}^\infty}{Q} \end{aligned} \quad (1-28)$$

$$\begin{aligned}
\overline{\tau_{xz}} &= \lambda \overline{\tau_{xz}^I} + (1 - \lambda) \overline{\tau_{xz}^M} - \frac{\lambda}{\pi R^2} \int_{\Gamma} (\tau_{zp}^I - \tau_{zp}^M) n_p x_x d\Gamma \\
&= \lambda \overline{\tau_{xz}^I} + (1 - \lambda) \overline{\tau_{xz}^M} - \frac{\lambda}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} [(\tau_{zx}^I - \tau_{zx}^M) \cos\theta \cdot R \cos\theta + \\
&\quad (\tau_{zy}^I - \tau_{zy}^M) \sin\theta \cdot R \cos\theta] R d\theta \\
&= \lambda \overline{\tau_{xz}^I} + (1 - \lambda) \overline{\tau_{xz}^M} - \frac{\lambda}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} (\tau_{zr}^I - \tau_{zr}^M) \cos\theta R^2 d\theta \\
&= \lambda G_I A_1 + (1 - \lambda) G_M S_1 A_1 + \lambda \mu^S A_1 / R \\
&= 2[\lambda G_I + (1 - \lambda) G_M S_1 + \lambda(\mu^S - \tau^0)/R] \frac{\tau_{xz}^\infty}{Q}
\end{aligned} \tag{1-29}$$

可以看出, 上述两式中都包含未知项 Q 。由广义自治理论和平均场理论, 可得

$$\overline{\tau_{xz}} = G_E \overline{\gamma_{xz}} \tag{1-30}$$

将式(1-28) 和式(1-29) 分别代入上式, 可以消去未知项 Q , 从而获得纳米夹杂复合材料有效反平面剪切模量的闭合形式解

$$\begin{aligned}
G_E &= \frac{\overline{\tau_{xz}}}{\overline{\gamma_{xz}}} \\
&= \frac{\lambda G_I + (1 - \lambda) G_M S_1 + \lambda \mu^S / R}{\lambda + (1 - \lambda) S_1} \\
&= \frac{(1 - \lambda) G_M + (1 + \lambda) \left(G_I + \frac{\mu^S}{R} \right)}{(1 + \lambda) G_M + (1 - \lambda) \left(G_I + \frac{\mu^S}{R} \right)} G_M
\end{aligned} \tag{1-31}$$

1.6 特殊情形

当不考虑夹杂的表面效应时, 令 $\mu^S = 0$, 式(1-31) 退化为

$$G_E = \frac{\lambda(G_I - G_M) + (G_I + G_M)}{\lambda(G_M - G_I) + (G_I + G_M)} G_M \tag{1-32}$$

式(1-32) 与经典弹性理论解答^[57]一致。

当夹杂变为孔洞时, 可令 $G_I = 0$, 式(1-31) 退化为

$$G_E = \frac{(1 - \lambda) G_M + (1 + \lambda) \frac{\mu^S}{R}}{(1 + \lambda) G_M + (1 - \lambda) \frac{\mu^S}{R}} G_M \tag{1-33}$$

当夹杂变为刚性体时, 可令 $G_I \rightarrow \infty$, 式(1-31) 退化为

$$G_E = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} G_M \quad (1-34)$$

式(1-34)表明,此时复合材料的有效反平面剪切模量仅与基体的剪切模量和夹杂的体积分数有关,与刚性夹杂的尺寸和表面性能无关。

当夹杂的表面效应非常明显时,即 $\mu^S/R \rightarrow \infty$, 式(1-31) 化简为

$$G_E = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} G_M \quad (1-35)$$

式(1-35)表明,复合材料的有效反平面剪切模量仅与基体的剪切模量和夹杂的体积分数有关,与弹性夹杂的剪切模量无关。

1.7 结果与讨论

为了表述方便,引入两个参数:表面性能与基体剪切模量的比值 $\alpha = \mu^S/G_M$, 以及夹杂的无量纲剪切模量 $\varepsilon = G_I/G_M$ 。表面弹性常数 μ^S 的量级为 1N/m , 其数值可正可负,一般情况下, μ^S/G_M 取值在 $-2 \times 10^{-10}\text{m}$ 至 $2 \times 10^{-10}\text{m}$ 之间^[28]。基于得到的解析解答,讨论纳米夹杂复合材料的有效性能随夹杂尺寸、表面性能和弹性模量的变化规律。

1.7.1 夹杂尺寸的影响

为研究纳米夹杂复合材料有效反平面剪切模量的尺寸依赖效应,图1-2给出了 $\varepsilon = G_I/G_M = 2.0$ 和 0.5 时无量纲有效反平面剪切模量随夹杂半径的变化曲线,其中夹杂体积分数 $\lambda = 0.3$ 。

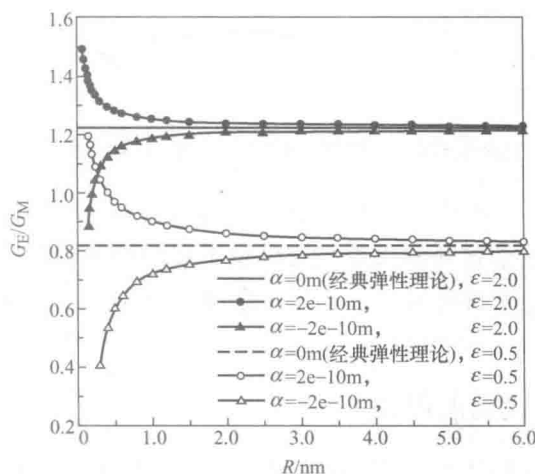


图 1-2 无量纲有效反平面剪切模量 G_E/G_M 随夹杂尺寸的变化

由图 1-2 可知, 在经典弹性理论中 ($\alpha=0$), 复合材料的有效反平面剪切模量与夹杂尺寸无关。然而当 $\alpha=2 \times 10^{-10} \text{ m}$ 和 $-2 \times 10^{-10} \text{ m}$, 即考虑夹杂的表面效应时, 有效反平面剪切模量受夹杂尺寸影响显著。随着夹杂尺寸的增大, 不论 α 取 $2 \times 10^{-10} \text{ m}$ 还是 $-2 \times 10^{-10} \text{ m}$, 表面效应的影响都会逐渐减弱, 皆趋近于经典弹性理论的解答。夹杂尺寸对于复合材料有效反平面剪切模量 (本章结果) 有显著影响的范围 (约 5 nm 内) 要小于其对于有效体积模量与剪切模量 (各向同性材料情形, 参见文献 [35] 和 [42]) 的影响范围。

1.7.2 夹杂表面性能的影响

分析参数 $\alpha = \mu^S / G_M$ 的变化对纳米夹杂复合材料有效反平面剪切模量的影响。参数 α 反映了材料的表面性能, 纳米夹杂表面的弹性常数可以通过原子模拟得到^[58]。图 1-3 给出了无量纲有效反平面剪切模量随夹杂表面性能的变化规律, 取 $\varepsilon = G_I / G_M = 2.0$ (硬夹杂), 夹杂体积分数 $\lambda = 0.3$ 。

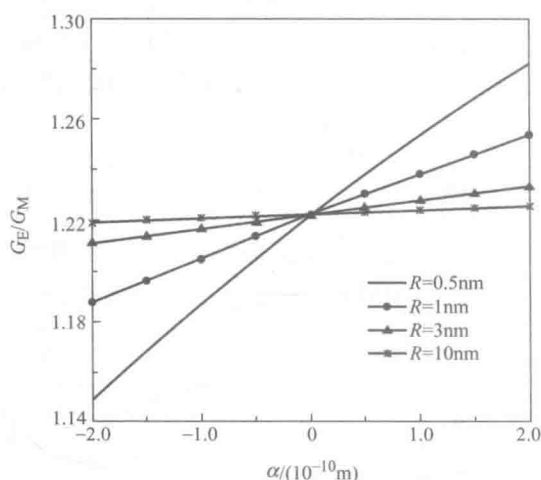


图 1-3 无量纲有效反平面剪切模量 G_E/G_M 随夹杂表面性能的变化

从图 1-3 可见, 不论夹杂尺寸取何值, 当表面性能参数 α 从 $-2 \times 10^{-10} \text{ m}$ 变化至 $2 \times 10^{-10} \text{ m}$ 时, 复合材料的无量纲有效反平面剪切模量值都单调增加; 夹杂尺寸越小, 这种变化幅度越明显。对于软夹杂 ($G_I / G_M < 1$), 也可以得到类似的结论, 这里不再讨论。

1.7.3 夹杂剪切模量的影响

考察考虑表面效应时夹杂弹性模量对复合材料有效反平面剪切模量值的影响。取夹杂尺寸 $R = 1 \text{ nm}$, 体积分数 $\lambda = 0.3$, 图 1-4 给出了复合材料无量纲有效反平面