普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数及其应用

邹庭荣　胡动刚　李　燕　主编

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数及其应用

邹庭荣　胡动刚　李　燕　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是教育部"高等理工教育数学基础课程教学改革与实践立项课题(2007—143)"之"新世纪农林院校大学数学教学规范(教学基本要求)的研究与实践"项目的研究成果.本书根据新的教学基本要求,结合作者多年教学经验,并按照继承、发展与改革的精神编写而成,是集体智慧的结晶.

本书内容共分8章,包括行列式、矩阵及其应用、线性空间与线性变换、线性方程组、相似矩阵与二次型的化简、线性规划问题、线性规划问题的进一步讨论、线性代数应用举例等.

与现行同类教材相比,本书的特点是:突出矩阵方法;侧重线性代数的应用,并从实际例子出发,引出线性代数的一些基本概念、基本理论和方法;注重与中学知识的衔接,许多知识用附录呈现,使其自成体系,结果严谨;例题丰富,通俗易懂,难点分散,便于自学;尤其注重数学思想与数学文化的渗透;也适当参考了近年来考研数学大纲.

本书可供工科和经济管理类专业学生使用,也可供其他相关专业的师生选用和参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/邹庭荣,胡动刚,李燕主编.—北京:科学出版社,2018.6

普通高等教育"十三五"规划教材

ISBN 978-7-03-057641-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①邹… ②胡… ③李… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第122281号

责任编辑:吉正霞 曾 莉/责任校对:董艳辉

责任印制:彭 超/封面设计:彬 峰

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本:787×1092 1/16

2018年6月第 一 版 印张:14 1/4

2018年6月第一次印刷 字数:333 000

定价:42.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

普通高等教育“十三五”规划教材

《线性代数及其应用》编委会

主　编　邹庭荣　胡动刚　李　燕

副主编　任兴龙　沈婧芳　文凤春　孙玲琍

编　委　(按姓氏笔画排序)

文凤春　任兴龙　孙玲琍　李　燕　邹庭荣

沈婧芳　张四兰　张英豪　陈晓坤　胡动刚

前　　言

线性代数是一门将理论、应用和计算融合起来的完美课程，随着计算机的普遍使用以及计算机功能的不断增加，线性代数在实际应用中的重要性也在不断提高，在现代社会中，线性代数是实际应用最广泛的大学数学基础课程，线性规划问题是许多高等学校经济管理专业的必学内容之一. 但由于教学时数的原因，线性规划又难以独立开设，尤其是一直以来也没有一本适当介绍线性规划问题的教材，于是，许多学校干脆就不开设. 因此，为了弥补这些不足，我们结合教育部"高等理工教育数学基础课程教学改革与实践"课题对这一问题进行了深入研究，并在许多同行建议下，编写了《线性代数及其应用》. 本书是教育部"高等理工教育数学基础课程教学改革与实践"课题的成果之一，可作为高等学校经济管理专业本科生教材，也可供工科各相关专业的师生选用和参考.

本书的特点是将线性代数、线性规划融为一体，以线性代数为主题，适当介绍线性规划问题，方便相关专业选用和扩充. 本书内容共分 8 章，包括行列式、矩阵及其应用、线性空间与线性变换、线性方程组、相似矩阵与二次型的化简、线性规划问题、线性规划问题的进一步讨论、线性代数的应用举例等. 内容的编排上力求概念导入自然，内容循序渐进、由浅入深，选学内容以 * 号标记. 在体现线性代数、线性规划完美性的基础上，本教材具有以下特点.

1. 以"三用"为原则

(1) 够用. 删去了传统教材中实用性不强和较深的一些内容，保留了经济管理学科各专业必须作为基础的内容，达到满足其需要的最大限度，够用即可.

(2) 管用. 增添必须的以往传统教材中没有的知识内容，尤其注重大学数学在经济管理科学中的应用的内容，达到管用的效果.

(3) 会用. 淡化传统教材偏重理论的思想，强调数学知识的应用，力求学以致用，学后会用，增强学生学习数学的信心与兴趣.

2. 以"两凸显"为特色

(1) **凸显数学文化思想**. 将数学文化贯穿教材的全过程，在每一章结束时，都以阅读与思考的形式有机地介绍一些有趣的数学故事及有影响力的数学家的轶事，让学生在寓教于乐中学习数学知识，同时培养学生崇尚数学、崇尚科学的意志品质.

(2) **凸显数学的应用**. 全过程体现了不仅教会学生学习数学知识，更注重教会学生使用数学的能力. 突出矩阵方法，注重基本概念的实际背景，引出线性代数的一些基本概念、基本理论和方法；尤其注重理论知识的实际应用，特别是将"线性代数的应用"单独成章，供学生阅读之用，这是本书的一个重要特色.

在内容叙述上，本书注重与中学知识的衔接；在计算方面，突出了矩阵初等变换的作用；全书结构严谨，例题丰富，通俗易懂，难点分散，层次分明，取材合理，深度适

宜，份量得当. 近年来，许多数学知识并未在中学讲解，给大学数学的教学带来衔接上的困难，为了弥补这些不足和分层次学习的需要以及使其自成体系、方便读者阅读，我们将这些知识在附录中给出. 附录内容包括线性方程组的加减消元法、数学归纳法、连加号$\sum$与连乘号$\prod$、多项式理论初步、数的扩充等. 这也是本书的一个特色.

学习线性代数、线性规划的关键是理解和掌握它的基本理论和方法，并在理论指导下通过分析去完成或解决实际问题，因此，本书各章末都配有适量的习题，其中补充题是供学有余力的同学提高用的，希望读者通过这些系统的训练，掌握并巩固所学的知识. 同时提醒读者，不要过分依赖书后的习题参考答案，做题时不要轻易放过独立思考的机会.

本书第一章至第三章由邹庭荣、沈婧芳、张四兰编写；第四章、第五章由李燕、孙玲琍、文凤春编写；第六章、第七章由胡动刚、任兴龙编写；第八章由邹庭荣、张英豪、陈晓坤编写；阅读与思考、习题及习题参考答案、附录由邹庭荣、胡动刚、陈晓坤编写.

本书的编写得到华中农业大学教务处肖湘平副处长和理学院吴承春副院长的关心和支持. 在此一并表示衷心感谢！

虽然各位编者十分努力，但由于我们水平所限，成书时间又较仓促，书中不妥之处在所难免，恳请广大师生和读者批评指正.

编　者

2015 年 5 月

目　　录

也称为方程组(1)的**系数行列式**.

根据二阶行列式的定义，方程组(1)的解(4)中，x_1，x_2 的表达式的分子可分别写成下面的行列式：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{22}b_1-a_{12}b_2 \tag{7}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1 \tag{8}$$

因而当方程组(1)的系数行列式 $D\neq 0$ 时，它的解可以写成两个行列式的商的形式：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{9}$$

用行列式表示方程组(1)的解，我们很容易发现其规律性：分母都是方程组的系数行列式；x_1 的分子是将系数行列式 D 中 x_1 对应的列换成常数项后得到的行列式，x_2 的分子是将系数行列式 D 中 x_2 对应的列换成常数项后得到的行列式.

对于三元线性方程组有相仿的结论. 设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

称符号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{10}$$

为三阶行列式，它定义为其元素的下列代数和：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{$*$}$$

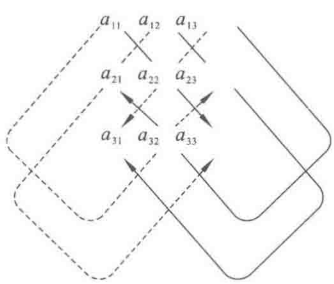

图 1-1

三阶行列式的值仍可由**对角线法则**来记忆. 以 D 为例，由式($*$)可见，D 由 6 项构成，每一项均为行列式 D 的不同行不同列的 3 个元素的乘积再冠以正负号，其规律如图 1-1 所示. 图中的 3 条实线平行于主对角线，实线上 3 个元素之积冠以正号；3 条虚线平行于副对角线，虚线上 3 个元素之积冠以负号.

例 1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 7 & 2 \end{vmatrix} \\ &=1\times4\times2+(-3)\times(-3)\times(-3)+7\times7\times2-7\times4\times(-3)-(-3)\times2\times2-1\times7\times(-3) \\ &=196 \end{aligned}$$

笔记栏

当三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，上述三元线性方程组有唯一解，解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

此为求解三元线性方程组的克拉默法则.

前面我们利用二、三阶行列式给出了求解二元、三元线性方程组的克拉默法则. 克拉默法则同样适用于 n 个未知量 n 个方程的线性方程组，此时，需要计算 n 阶行列式. 而用于计算二、三阶行列式的对角线法，对于高于三阶的行列式就不再适用了. 为此，我们给出 n 阶行列式的一般算法.

由式(*)可见：

(1) 三阶行列式展开式的每一项都是其位于不同行不同列的 3 个元素之积.

(2) 展开式共有 6 项，每一项的 3 个元素的行下标按自然顺序排列时，其列下标都是 1，2，3 的某个排列. 1，2，3 的全排列共有 6 种，每一排列分别对应着展开式的一个项.

(3) 展开式 6 个项的符号各有 3 正 3 负. 带正号的 3 项的列下标的排列分别为 (123)，(312)，(231)，它们都是自然排列 123 中的任意两个数经零次或两次(偶数次)对换得到的；而带负号的 3 项的列下标是自然排列 123 中的任意两个数经一次(奇数次)对换得到的. 也就是说，行列式展开式的每一项的符号与排列的对换次数(奇数次或偶数次)有关.

为了阐明 n 阶行列式展开项的符号规律，下面引入逆序数的概念.

二、排列及其逆序数

1. 排列及其逆序数

定义 1 由 n 个数字 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个无重复的有序数组称为这 n 个数字的一个排列，简称为 n 元排列.

例如，312 是一个 3 元排列，2341 是一个 4 元排列，45321 是一个 5 元排列等.

显然 $12\cdots n$ 也是一个 n 元排列，这个排列具有自然顺序，就是按递增的顺序排起来的；其他的排列或多或少地已改变了自然顺序.

定义 2 在一个 n 元排列中，如果有一个较大的数字排在一个较小的数字前面，则称这两个数字在这个排列中构成一个逆(反)序，一个 n 元排列中所有逆(反)序的总

和称为这个排列的逆(反)序数,记为$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$或$\pi(j_1j_2\cdots j_n)$.

设在一个n级排列$j_1j_2\cdots j_n$中,比j_k $(k=1,2,\cdots,n)$大的且排在j_k前面的数有t_k个,则这个排列的逆序数为$t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum\limits_{k=1}^{n}t_k$.

例如 $\tau(321)=2+1=3$

$\tau(3241)=3+1=4$

$\tau(45321)=4+3+2=9$

$\tau(634521)=5+4+1+1+1=12$

$\tau(1726354)=0+1+2+3+2+1=9$

这是计算一个n元排列的逆序数的一般方法.

下面再给出计算排列逆序数的两种方法.

方法1 分别计算出排在$1,2,\cdots,n$前面比它大的数字之和,即分别算出$1,2,\cdots,n$这n个元素的逆序数,这些元素的逆序数的总和即为所求排列的逆序数.

方法2 分别计算出排列中每个元素前面比它大的数字个数之和,即算出排列中每个元素的逆序数,这每个元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

例2 求排列(1)32514和(2)217986354的逆序数.

解 (1)在排列32514中,3排在首位,故逆序数为0;2的前面比2大的数只有1个3,故逆序数为1;5的前面没有比5大的数,故逆序数为0;1的前面比1大的数有3个,故逆序数为3;4的前面比4大的数有1个,故逆序数为1.

于是排列32514的逆序数为 $\tau(32514)=0+1+0+3+1=5$.

(2) 2排在首位,故逆序数为0;1的前面比1大的数只有1个2,故逆序数为1;7的前面没有比7大的数,故逆序数为0;9的前面没有比9大的数,故逆序数为0;8的前面比8大的数有1个,故逆序数为1;6的前面比6大的数有3个,故逆序数为3;3的前面比3大的数有4个,故逆序数为4;5的前面比5大的数有4个,故逆序数为4;4的前面比4大的数有5个,故逆序数为5.

于是排列217986354的逆序数为

$$\tau(217986354)=0+1+0+0+1+3+4+4+5=18$$

2. 排列的奇偶性

定义3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**;逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例3 求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

(1) 35214　　　　(2) $n(n-1)\cdots21$

解 由逆序数的定义,任一排列$i_1i_2\cdots i_n$的逆序数为

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_1\text{ 后面比 }i_1\text{ 小的数的个数}+i_2\text{ 后面比 }i_2\text{ 小的数的个数}+\cdots+i_{n-1}\text{ 后面比 }i_{n-1}\text{ 小的数的个数}$$

(1) $\tau(35214)=2+3+1+0=6$,所以35214为偶排列.

笔记栏

(2) $\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$

而$\frac{n(n-1)}{2}$的奇偶性需由 n 而定，讨论如下：

当 $n=4k$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$是偶数；

当 $n=4k+1$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$是偶数；

当 $n=4k+2$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$是奇数；

当 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$是奇数.

所以，当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，此排列为奇排列.

在一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，仅将其中两个数字 j_i,j_k 对调而其余数字不动，这样一次对调称为一个**对换**，记为(j_i,j_k). 当 $k=i\pm1$，即排列中两个相邻数字的对换称为相邻对换.

例如，$341625\xrightarrow{(1,5)}345621$.

问题 1 任意两个 n 元排列是否可经一系列对换而互化？

引理 1 任意一个 n 元排列可经一系列对换变为自然排列 $12\cdots n$.

证 用归纳法.

当 $n=2$ 时，结论显然成立.

假设结论对 $n-1$ 元排列成立，则

(1) 对任一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$，假如 $j_n=n$，则由归纳假设知 $j_1j_2\cdots j_{n-1}$ 可经一系列对换变为 $12\cdots(n-1)$. 于是经同样一系列的对换，$j_1j_2\cdots j_{n-1}n$ 变为 $12\cdots(n-1)n$.

(2) 假如 $j_n\neq n$，设 $j_k=n\ (1\leqslant k\leqslant n-1)$，于是经一次对换 (j_k,j_n)，得

$$j_1\cdots j_k\cdots j_n\xrightarrow{(j_k,j_n)}j_1\cdots j_n\cdots n$$

由(1)知，经一系列对换可把 $j_1\cdots j_n\cdots n$ 变为 $12\cdots n$. 因而 $j_1\cdots j_k\cdots j_n$ 可经一系列对换变为 $12\cdots n$.

由于对换是可逆的，因此有

推论 1 自然排列 $12\cdots n$ 可经一系列对换变到任意一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$.

由引理 1 和推论 1，我们圆满地解决了上面提出的问题 1，这就是

推论 2 任意两个 n 元排列可经一系列对换互化.

定理 1 对换改变排列的奇偶性. 也就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

证 先看对换的两个数字 j,k 在排列中是相邻位置的情形. 设此排列为

$$\cdots jk\cdots$$

经对换(j,k)变为

$$\cdots kj\cdots$$

笔记栏

这里"…"表示那些不动的数字. 于是,若 $k<j$,则 $\tau(\cdots kj\cdots)=\tau(\cdots jk\cdots)-1$;若 $k>j$,则 $\tau(\cdots kj\cdots)=\tau(\cdots jk\cdots)+1$.

因此,这种特殊情况下定理 1 成立.

一般情形,设排列为

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_t k \cdots \tag{11}$$

经对换(j,k)变为

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_t j \cdots \tag{12}$$

为将(11)变为(12),可先对(11)施行相邻位置的 j 与 i_1 对换,然后 j 与 i_2 对换,…,j 与 k 对换,共经过 $t+1$ 次对换后变为

$$\cdots i_1 i_2 \cdots i_t k j \ \cdots \tag{13}$$

再对(13)施行相邻位置的 k 与 i_t 对换,k 与 i_{t-1} 对换,…,k 与 i_1 对换,共 t 次对换后便变为(12). 综上所述,由于每次这样的对换都改变排列的奇偶性,因而 $2t+1$ 次对换将(11)变为(12),它们有互异的奇偶性. 定理成立.

问题 2 在全体 n 元排列中,究竟是奇排列多还是偶排列多?

一般说来,在 n 个数字的全排列中,奇偶排列各占一半,这就是下面的

推论 3 在全部 n 元排列中,奇、偶排列的个数相等,各有$\frac{n!}{2}$个.

证 设奇排列个数为 k,偶排列个数为 m,则 $k+m=n!$. 又调换每个奇排列的前两个元素的位置,则由定理 1 知道它们都变为偶排列,且易知不同的奇排列经一次相同位置的对换后变为不同的偶排列,因此 $k\leqslant m$. 同理可证 $m\leqslant k$,故 $k=m=\frac{n!}{2}$.

结合推论 2,类似地,还可以证明

定理 2 任意一个 n 元排列与排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互化,并且所作对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

三、n 阶行列式

在给出 n 阶行列式的定义之前,再来看一下二阶和三阶行列式的定义. 以三阶行列式为例(二阶同样),由前面式(10)知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 i_3} (-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}$$

从三阶行列式的定义可以看出,它们是一些乘积的代数和,而每一项乘积都是由行列式中位于不同行不同列的元素构成,这种可能的乘积共有 $n!$项. 另一方面,每一项乘积都带有符号. 该符号是按什么原则确定的呢? 在三阶行列式(10)中,项的一般形式可以写成

笔记栏

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{14}$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是 1,2,3 的一个排列.可以看出,当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时,对应的项在三阶行列式的定义中带有正号;当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时带有负号.

定义 4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{15}$$

称为 **n 阶行列式**,它表示代数和 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{16}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和.

显然,行列式的项

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{17}$$

为取自不同行不同列的 n 个元素的乘积;每一项都按下面规则带有符号:当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,带正号,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,带负号;对于 $1,2,\cdots,n$ 的每一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$,都对应一项,所以式(16) 共有 $n!$项.

定义 4 实际上是按乘积中元素的行标为自然排列来定义行列式的,同样地,可以按列标为自然排列定义行列式.

定义 4′

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{18}$$

可以证明,这两个定义是等价的.

特别地,当 $n=1$ 时,规定一阶行列式 $|a|=a$.

例 4 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{19}$$

解 在 n 阶行列式 D 的 $n!$个项中,考虑行列式可能的非零项.由于行列式的每一项皆为行列式中位于不同行不同列的 n 个元素之积,因此行列式中的非零项必为 n 个

非零元素的乘积.在行列式的第1行中,仅有 a_{11} 可能不为零,所以在式(16)中,a_{1j_1} 只能取 a_{11},而 a_{2j_2} 只能取 a_{22},不能取 a_{21},这是因为 a_{21} 与 a_{11} 同列.同理,a_{3j_3} 也只能取 a_{33}……依次推理,最后一行只能选 a_{nn},从而

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

若行列式主对角线上方的元素全为零,则称之为**下三角行列式**(主对角线下方的元素全为零的行列式,称为**上三角行列式**).由上述讨论知,**上、下三角行列式**的值都等于对角线元素的乘积.

特别地,主对角线以外元素全为零的行列式(称为**对角行列式**)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 5 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 由于行列式中4个不同行不同列的非零数之积只有 $1\times2\times3\times4$,而这作为行列式的项,元素已经按照行下标自然顺序排好,它的列下标排列是(4321),这是一个偶排列,故这一项带正号.所以,此行列式的值为 $1\times2\times3\times4=24$.

第二节 行列式的性质

对于一般的行列式,若用行列式的定义计算 n 阶行列式,需要计算 $n!$ 个乘积项,这显然比较麻烦.为此,下面研究行列式的性质,利用这些性质可以简化行列式的计算.

建议读者用二阶行列式验证一下这些性质,以加深对它们的理解和体会.

把行列式 D 的行与列互换后得到的行列式,称为 D 的**转置行列式**,记为 D^{T}(或 D').即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

笔记栏

显然,$(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$.