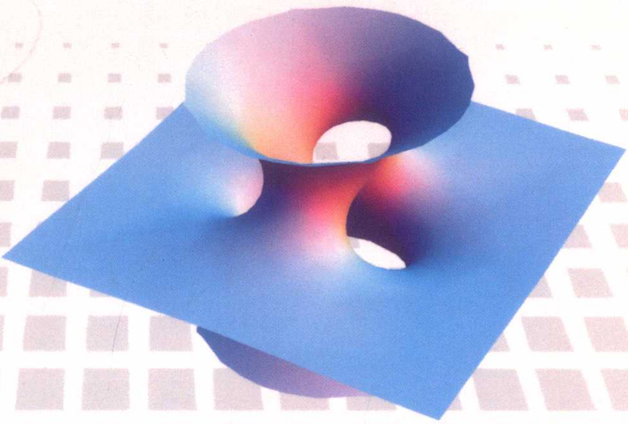
普通高等学校“十三五”规划教材

运筹学

YUNCHOUXUE

李万涛　孙李红　主编



中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校"十三五"规划教材

运　筹　学

主　编　李万涛　孙李红
副主编　丛瑞雪

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本书注重运筹学的实践应用指导，并以运筹学中最基本、最常用、最能反映其思想精髓的核心内容为重点。全书共分十三章，分别为 mathematica 软件介绍、线性代数、线性规划、整数规划、单纯形法、lindo/lingo 软件和灵敏度分析、运输问题、物流设施选址、图论方法、存贮论、决策分析、预测和盈亏分析。

本教材适合作为各普通本科院校和高职、高专院校相关专业运筹学课程的教材，也可作为从事运筹学、管理科学的工作者和工程技术人员的参考教材。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/李万涛，孙李红主编．—北京：中国铁道出版社，2018.3

普通高等学校“十三五”规划教材

ISBN 978-7-113-23742-4

Ⅰ.①运… Ⅱ.①李… ②孙… Ⅲ.①运筹学-高等学校-教材 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 210964 号

书　　名：运筹学
作　　者：李万涛　孙李红　主编

策　　划：潘星泉　　**读者热线：**(010)63550836
责任编辑：潘星泉　李学敏
封面设计：付　巍
封面制作：刘　颖
责任校对：张玉华
责任印制：郭向伟

出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市西城区右安门西街 8 号)
网　　址：http://www.tdpress.com/51eds/
印　　刷：虎彩印艺股份有限公司
版　　次：2018 年 3 月第 1 版　2018 年 3 月第 1 次印刷
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16　**印张：**16.25　**字数：**369 千
书　　号：ISBN 978-7-113-23742-4
定　　价：42.00 元

前　　言

运筹学是一门实践背景很强、应用广泛的学科，是现代管理的重要工具。近几十年来，运筹学模型已广泛应用于许多领域，如生产计划管理、市场预测与分析、资源分配与管理、工程优化设计、运输调度管理、库存管理、企业管理、区域规划与城市管理、计算机与管理信息系统、现代物流管理等。随着社会经济和计算机的迅速发展，运筹学模型在经济管理中的作用越来越受到重视，应用运筹学的领域越来越广泛。

“运筹学”课程是经济管理类学生的专业基础课，通过本课程的学习，学生可以获得经济管理决策中常用的运筹学的基本概念、基本理论与基本方法的知识，为进一步学习与掌握现代管理理论奠定必要的理论基础，并培养与提升学生对实际问题运用定量方法分析与求解，以及进行辅助决策的能力。为此，本教材主要的编写目的是满足经济管理类各专业本科生的运筹学教学要求，突出内容讲授的系统性、逻辑性和便利性，特别是在常见的疑难之处增加了详细讨论。内容选择则以运筹学中最基本、最常用、最能反映其思想精髓的核心内容为重点，包括线性规划、整数规划、运输问题、图论方法、存贮论和决策分析。运筹学教学的宗旨是理解其思想精髓和运筹理念，重在培养学生应用其解决实际管理问题的能力。因此，章节内容的安排遵循问题导向的逻辑思路，即从管理实践出发提出问题，阐明求解思路和建模方法，剖析算法的核心与实质，给出应用举例。每章都编写了习题，便于学生复习、练习和深入讨论。

本书由哈尔滨商业大学李万涛和孙李红任主编，由哈尔滨金融学院丛瑞雪任副主编。具体分工如下：李万涛负责编写第 6 章～第 10 章，孙李红负责编写第 1 章～第 5 章，丛瑞雪负责编写第 11 章～第 13 章，全书由李万涛统稿、定稿。

由于编写时间仓促，作者水平有限，书中难免存在疏漏和不足之处，希望读者提出宝贵意见和建议。

本教材注重运筹学的实践应用指导，可作为各普通本科院校和高职、高专院校相关专业“运筹学”课程的教材，也可作为从事运筹学、管理科学工作者和工程技术人员参考之用。

编　者

2017 年 7 月

目　录

第 1 章 Mathematica 软件介绍

本章导入

Mathematica 是美国 Wolfram 公司研究开发的一种数学分析型的软件，是目前世界上应用最广泛的符号计算系统，具有高精度的数值计算功能和强大的图形功能。

1.1 Mathematica 软件的启动和运行

现假设在 Windows 环境下已安装好 Mathematica11.2，启动 Windows 后，在“开始”菜单的“程序”中单击 Wolfram Mathematica 11.2 ，就可以启动 Mathematica11.2，启动后新建一个空白的“笔记本”，在屏幕上显示如图 1-1 窗口，系统默认名称为“未命名-1”，直到用户保存时重新命名为止。

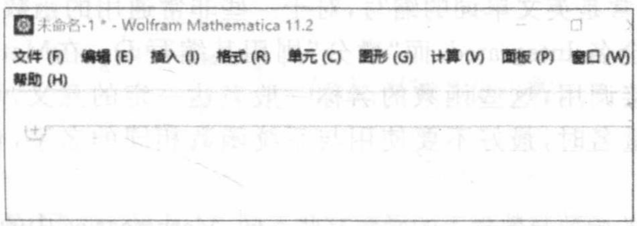


图 1-1 Wolfram Mathematica 11.2 窗口

如果要计算 23+78，则输入 23+78，然后把鼠标放在该行的最右边的“]”上，使“]”变黑并右击，选择“计算单元”命令（或直接按【Shift+Enter】组合键），如图 1-2 所示，这时系统开始计算并输出计算结果，并给输入行和输出行附上次序标识 In[1]和 Out[1]，如图 1-3 所示。注意：In[1]是计算机经过运行后系统自动给出的，用户不能自己输入。再输入第二个表达式，输入 Sin[π/4]，然后把鼠标放在该行的最右边的“]”上，使“]”变黑并右击，选择“计算单元”命令（或直接按【Shift+Enter】组合键），这时系统开始计算并输出计算结果，显示计算结果后，系统分别将其标识为 In[2]和 Out[2]，如图 1-3所示。本章以后将直接写出 In[n]和 Out[n]。

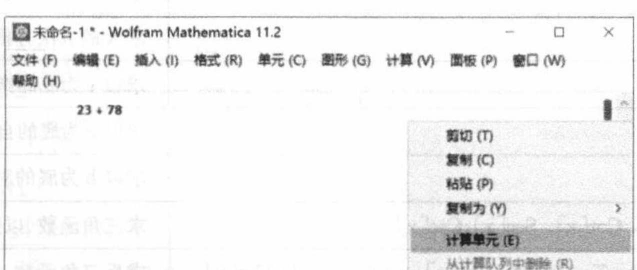


图 1-2 计算界面

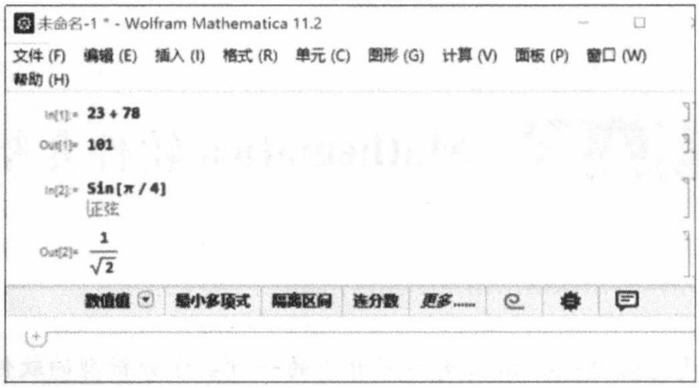


图 1-3 显示计算结果界面

1.2 函数和命令

Mathematica 中所有的命令和函数都是以大写英文字母开头，后面跟着小写的英文字母。英文字母区分大小写。Mathematica 中的数学函数是根据定义规则命名的，就大多函数而言，其名字通常是英文单词的缩写，对于一些非常通用的函数，系统采用传统的缩写。如“积分”用其全名 Integrated，而“微分”则用其缩写 D。在Mathematica中定义大量的数学函数可以直接调用，这些函数的名称一般表达一定的意义，可以帮助我们理解。我们定义函数或变量名时，最好不要使用与系统函数相同的名字，例如：不要使用字母 C、D 等表示变量。

Mathematica 中的函数与数学上的函数有些不同，Mathematica 中的函数是一个具有独立功能的程序模块，可以直接被调用。同时每一函数也可以包括一个或多个参数，也可以没有参数，参数要放在一对[ ]中。表 1-1 列举出一些常用的数学函数及其命令格式。

表 1-1 常用的数字函数及其命令格式

函 数	意 义
N[x]	将 x 转换成实数
N[x,n]	将 x 转换成近似实数，有效数字为 n 个
Abs[x]	求 x 绝对值
Sqrt[x]	求 x 的 2 次方根
x∧(1/n)	求 x 的 n 次方根
Exp[x]	求以 e 为底的指数 e^x
Log[x]	求以 e 为底的自然对数 lnx
Log[b,x]	求以 b 为底的对数 $\log_b x$
Sin[x],Cos[x],Tan[x], Cot[x], Sec[x],Csc[x]	求三角函数（以弧度为单位）
ArcSin[x],ArcCos[x],ArcTan[x],ArcCot[x],ArcSec[x],ArcCsc[x]	求反三角函数

1.3 运 算 符

Mathematica 的运算符见表 1-2。

表 1-2　Mathematica 运算符

运算符号		意　义	备　注
算术运算符号	+ - *(星号) /(斜杠) ^ % %%	加号 减号 乘号,可用空格代替 除号 乘方 上一个计算结果 上上一个计算结果	1. 在不引起误解的情况下,乘号可以省略。例如:当数值与变量、数值与函数相乘时,2a,2 * a,2 a 意义是相同的 2. 算术运算的顺序遵循数学中的习惯,乘方→乘或除→加或减 3. 同级运算符之间是从左到右
关系运算符	== != > >= < <=	等于 不等于 大于 大于等于 小于 小于等于	在 Mathematica 中,所有的变量和矩阵都不能用 C、D 表示,因为 C、D 在该软件中表示某一个命令

【例 1.1】　计算 $y=\dfrac{5^2+\sqrt{3^4+\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^2}}{\cos^2\dfrac{\pi}{4}}$的值,保留 2 位小数。

解:令在打开的空白"笔记本"中按照 Mathematica 函数的命令格式在空白"笔记本"中输入命令:$N\left[\dfrac{5^2+\sqrt{3^4+\sin[\pi/4]\hat{}2}}{\cos[\pi/4]\hat{}2}\right]$(公式输入可单击"面板"→"数学助手"命令进行输入)。

选择"计算单元"命令(或直接按【Shift+Enter】组合键),这时系统开始计算并输出计算结果。(保留 2 位小数)

故 $y=\dfrac{5^2+\sqrt{3^4+\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^2}}{\cos^2\dfrac{\pi}{4}}=68.06$。

【例 1.2】　计算$\dfrac{\dfrac{6.225}{3.268}+3.936+\dfrac{5.445}{4.98}}{\dfrac{4}{1.34}+2.36}$的值。

解:In[2]:=$\dfrac{\dfrac{6.225}{3.268}+3.936+\dfrac{5.445}{4.98}}{\dfrac{4}{1.34}+2.36}$

Out[2]=1.297 31

故$\dfrac{\dfrac{6.225}{3.268}+3.936+\dfrac{5.445}{4.98}}{\dfrac{4}{1.34}+2.36}=1.297\ 31$。

1.4 矩阵的表示法

一般地，用大写英文字母表示矩阵，并且把矩阵的元素放在一对{}中，每一行元素也放在一对{}中，元素与元素之间、行与行之间用逗号“,”分隔，例如：

对于矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 9\\ 0 & 11 & -2\\ 9 & 0 & 6\end{pmatrix}$，在 Mathematica 中要表示矩阵 $\boldsymbol{A}$，则输入：

```
A= {{1,2,9},{0,11,-2},{9,0,6}}
```

1.5 取矩阵的元素

在 Wolfram Mathematica 语言中，矩阵被表示为列表的列表，可以对矩阵使用所有的元素用标准的 Wolfram 语言进行选取并处理运算。选取举证分量的命令符号如表 1-3 所示。

表 1-3 举证分量的命令符号表

取矩阵分量的命令	意 义
U[[i,j]]	取矩阵 U 的第 i 行第 j 列的元素
U[[i]]	取矩阵 U 的第 i 行的全部元素
Transpose[U][[j]]	取矩阵 U 的第 j 列的全部元素
Tr[U,list]	取矩阵 U 对角线上的元素
ArrayRules[U]	取矩阵 U 非零元素的位置

例：对于矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 9\\ 0 & 11 & -2\\ 9 & 0 & 6\end{pmatrix}$，计算步骤及结果如图 1-4 所示。

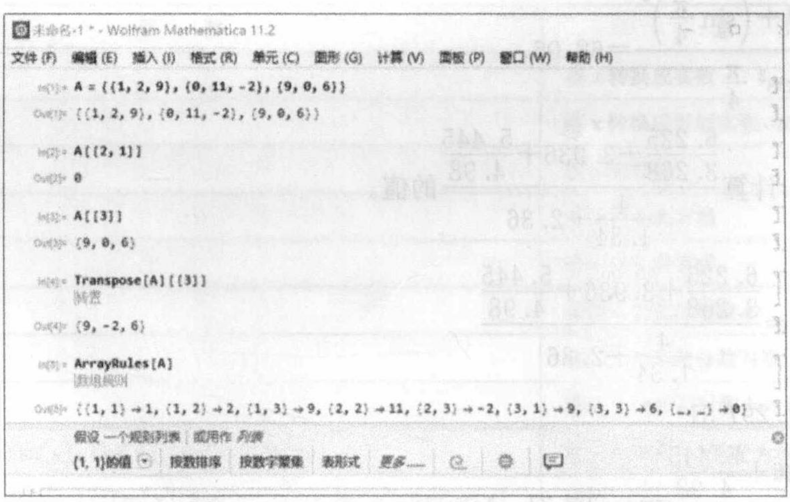


图 1-4 计算步骤及结果图

①首先在 Mathematica 的空白"笔记本"中输入：A={{1,2,9},{0,11,−2},{9,0,6}}；

②选取 **A** 矩阵第 2 行第 1 列的元素：在"笔记本"中继续输入：A[[2,1]]→单击"计算单元"命令（或直接按【Shift+Enter】组合键）"→系统给出结果"Out[2]=0"；

③选取 **A** 矩阵第 3 行全部元素：在"笔记本"中继续输入：A[[3]]→单击"计算单元"命令（或直接按【Shift+Enter】组合键）"→系统给出结果"Out[3]="；

④选取 **A** 矩阵第 3 列的全部元素：在"笔记本"中继续输入：Transpose[A][[3]]→单击"计算单元"命令（或直接按【Shift+Enter】组合键）"→系统给出结果"Out[4]="；

⑤选取 **A** 矩阵中的非零元素的位置：在"笔记本"中继续输入：ArrayRules[A]→单击"计算单元"命令（或直接按【Shift+Enter】组合键）"→系统给出结果。

1.6　矩阵的相关运算

Mathematica 中矩阵的相关运算见表 1-4。

表 1-4　矩阵的相关运算

Mathematica 中矩阵的运算函数	意　义
A+B	**A** 与 **B** 为同阶矩阵，**A**+**B** 是指 **A** 与 **B** 的对应元素相加
c*A 或 cA	**A** 为矩阵，c 为常数，c**A** 是指 c 分别与 **A** 中的每个元素相乘
A.B	矩阵 **A** 与矩阵 **B** 相乘，要求 **A** 的列数等于 **B** 的行数
A*B	矩阵 **A** 与矩阵 **B** 的对应元素相乘
Det[A]	求方阵 **A** 的行列式的值
Transpose[A]	求矩阵 **A** 的转置矩阵
Inverse[A]	求方阵 **A** 的逆矩阵
MatrixForm[A]	按向量或矩阵形式输出矩阵 **A**（与数学上的表达形式一致）
TableForm[A]	按表格形式输出矩阵 **A**(以表格输出，无矩阵符号)
RowReduce[A]	用"行"初等变换化简矩阵 **A**，设 **A** 为 m 行 n 列的矩阵，此命令把 **A** 化为阶梯形矩阵，也可以用此命令求矩阵的秩

【例 1.3】　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\4&8&0\\3&-1&7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&7&-2\\9&-2&6&10\\7&10&5&-4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1&9&0\\7&6&4\\3&8&9\end{pmatrix}$，求下列结果：

(1)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{F}$，$4\boldsymbol{A}$；　　(2)$\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{AF}$ 和 $\boldsymbol{FB}$；

(3)求矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{F}$ 的秩；　　(4)求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵；

(5)求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵；　　(6)分别求方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{F}$ 的行列式的值。

解：在 Mathematica 中新建空白"笔记本"，并在窗口中输入 A={{1,0,3},{4,8,0},{3,−1,7}}；B={{0,−1,7,−2},{9,−2,6,10},{7,10,5,−4}}；F={{1,9,0},{7,6,4},{3,8,9}}；计算结果如图 1-5 所示。

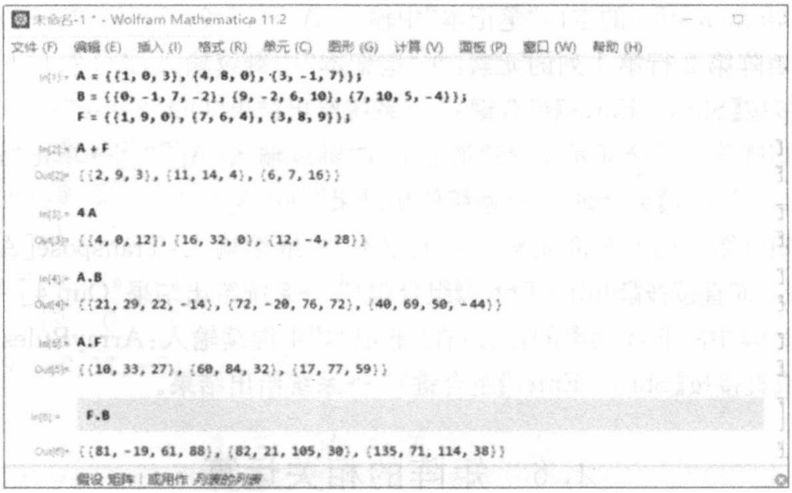


图 1-5 计算步骤及结果图

(1)求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{F}$ 和 $4\boldsymbol{A}$

求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{F}$:在窗口中继续输入:A+F→单击“计算单元”命令(或直接按【Shift+Enter】组合键)”→系统给出结果“Out[2]={{2,9,3},{11,14,4},{6,7,16}}”;

求 $4\boldsymbol{A}$:在窗口中继续输入:4A→单击“计算单元”命令(或直接按【Shift+Enter】组合键)”→系统给出结果“Out[3]={{4,0,12},{16,32,0},{12,-4,28}}”;

所以,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}2&9&3\\11&14&4\\6&7&16\end{pmatrix}$,$4\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0&12\\16&32&0\\12&-4&28\end{pmatrix}$。

(2)求 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{AF}$ 和 $\boldsymbol{FB}$

求 $\boldsymbol{AB}$:在窗口中继续输入:A. B→单击“计算单元”命令(或直接按【Shift+Enter】组合键)”→系统给出结果“Out[4]={{21,29,22,-14},{72,-20,76,72},{40,69,50,-44}}”;

求 $\boldsymbol{AF}$:在窗口中继续输入:A. F→单击“计算单元”命令(或直接按【Shift+Enter】组合键)”→系统给出结果“Out[5]={{10,33,27},{60,84,32},{17,77,59}}”;

求 $\boldsymbol{FB}$:在窗口中继续输入:F. B→单击“计算单元”命令(或直接按【Shift+Enter】组合键)”→系统给出结果“Out[6]={{81,-19,61,88},{82,21,105,30},{135,71,114,38}}”;

所以,有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}21&29&22&-14\\72&-20&76&72\\40&69&50&-44\end{pmatrix},\boldsymbol{AF}=\begin{pmatrix}10&33&27\\60&84&32\\17&77&59\end{pmatrix},\boldsymbol{FB}=\begin{pmatrix}81&-19&61&88\\82&21&105&30\\135&71&114&38\end{pmatrix}。$$

(3)求矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{F}$ 的秩(求解详细步骤同上),系统计算后的结果如下:

In[7]:=RowReduce[A]

Out[7]={{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1}}

In[8]:= RowReduce[B]

Out[8]=$\{\{1,0,0,\frac{858}{731}\},\{0,1,0,-\frac{736}{731}\},\{0,0,1,-\frac{314}{731}\}\}$

In[9]:=RowReduce[A]

Out[9]={{1,0,0},{0,1,0},{0,0,1}}

所以，$r(\boldsymbol{A})=3, r=(\boldsymbol{B})=3, r(\boldsymbol{F})=3$。

(4)求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵(求解详细步骤同上)，系统计算后的结果如下：

In[10]:= Inverse[A]

Out[10]= $\{\{-2,\frac{3}{82},\frac{6}{7}\},\{1,\frac{1}{14},-\frac{3}{7}\},\{1,-\frac{1}{28},-\frac{2}{7}\}\}$

所以，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{82} & \frac{6}{7} \\ 1 & \frac{1}{14} & -\frac{3}{7} \\ 1 & -\frac{1}{28} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$。

(5)求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵(求解详细步骤同上)，系统计算后的结果如下：

In[11]:= Transpose[B]

Out[11]={{0,9,7},{-1,-2,10},{7,6,5},{-2,10,-4}}

所以，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的转置矩阵为：

$$\boldsymbol{B}'=\begin{pmatrix} 0 & 9 & 7 \\ -1 & -2 & 0 \\ 7 & 6 & 5 \\ -2 & 10 & -4 \end{pmatrix}。$$

(6)分别求方阵 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{F}$ 的行列式的值(求解详细步骤同上)，系统计算后的结果如下：

In[12]:= Det[A]

Out[12]= -28

In[13]:= Det[F]

Out[13]= -437

所以，$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 8 & 0 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}=-28, |\boldsymbol{F}|=\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 7 & 6 & 4 \\ 3 & 8 & 9 \end{vmatrix}=-437$。

1.7　解方程(组)

1.7.1　求方程的根

1. 方程及其根的意义

在 Mathematica 中，等号“=”作为赋值号或用于定义变量的值，代数方程中的等号用逻辑等号“==”表示，如 $x\wedge2-6x-5==0$，这样在 Mathematica 中的方程就表示成一个逻辑表达式，意义是方程中等号两边的量是否相等。例如：

In[1]:= x=1;

In[2]:= x^2-6x-5= = 0

Out[2]=False

方程的解同方程的根一样，也可看成一个逻辑表达式，例如：

```
In[3]:=Roots[x^2+x==6,x]
out[3]=x== -3 x==2
```
（这种表示形式说明方程的解为 x= -3 或 x=2）

函数 Roots 生成关于 x 的根的表达式，形如 x==-3，x==2。x 的值，对应于一元二次方程的两个根。用函数 Solve 解方程时，则以解的转换规则表示，如：

```
In[4]:=Solve[x^2+x==6,x]
out[4]={{x->-3},{x->2}}
```

2. 一元方程求根

函数 Solve 主要处理多项式方程，它的目标是尽量找出方程的精确解。Mathematica总可以解出四次或四次以下的多项式方程的精确解。对于三次或四次方程，结果可能相当复杂。在解四次以上的多项式方程时，Mathematica 碰到数学理论上的障碍而不能给出精确解的表达式，只能得到方程的数值解。但仍有两大类方程可以给出精确解：第一类是可用因式分解法将方程写成低次多项式的方程，第二类是可用多项式分解法将方程写成低次多项式组的方程。这样 Solve 也能给出许多高次多项式方程精确值的代数解。

函数 NSolve 是找出方程的数值解，因此总能求出方程的解。表 1-5 所列的是解方程函数的一般形式：

表 1-5　解方程函数的一般形式

解方程的函数	意　义
Solve[方程或{方程组}，{变量表列}]	求方程或方程组的精确解
NSolve[方程或{方程组}，{变量表列}]	求方程或方程组的数值解
Solve[方程或{方程组}]	对方程或方程组中的所有变量求精确解
NSolve[方程或{方程组}]	对方程或方程组中的所有变量求数值解

当方程或方程组的系数是整数、有理数等准确数时，用 Solve 或 NSolve 解方程分别得到的是精确解和数值解；当方程或方程组的系数是实数或复数等近似值时，用 Solve 或 NSolve 解方程得到的都是数值解。

```
In[5]:= Solve[6x^2- 5x+ 1= = 0,x]
```

$$\text{out[5]}=\left\{\left\{x\to\frac{1}{3}\right\},\left\{x\to\frac{1}{2}\right\}\right\}$$

```
In[6]:= NSolve[6x^2-5x+ 1= = 0,x]
out[6]= {{x->0. 333 333},{x->0. 5}}
```

虽然用 Solve 或 NSolve 函数都能解方程 6x^2－5x＋1＝0，但是它们表示解的意义和方式不同。如$\frac{1}{3}$是一个准确的有理数，而 0. 333 333 是一个近似的实数。

3. 非线性方程求根

一般使用形式：

FindRoot[方程，{变量，初值}]

从初值开始，计算函数在初值附近的 1 个数值解。

FindRoot[方程，{变量，初值，a，b}]

从初值开始，在区间[a，b]范围内计算函数 1 个数值解。

```
FindRoot[{方程组},{x,x0},{y,y0}…]
```

计算联立方程组的 1 个数值解。如：

```
In[7]:=FindRoot[Cos[x]-x== 0,{x,1}]
out[7]={x→0.739 085}
```

用 FindRoot 求解方程的根时，一次只能算出 1 个近似数值解。如果无法确定根的初值，不妨先画出方程的简图，或许在简图上能得到有关方程的根的一些信息。FindRoot 函数总是从给定的初始点开始逐步逼近方程的一个解，即使方程有几个解，也总是返回初始点附近的解。如果想要用 FindRoot 计算方程的复根，必须用复数作为初始值，例如：

```
In[8]:=FindRoot[Sin[x]==0.9,{x,1}]
Out[8]={x→1.11977}
```

4. 解线性方程组（低阶）

求线性方程组解的方法：

①Solve[{方程 1,方程 2,…},{变量列表}]

②Solve[{方程 1 && 方程 2 &&…},{变量列表}]

③Solve[{lhs1,lhl2,…}= ={b1,b2,…},{变量列表}]

【例 1.4】 解方程组$\begin{cases}3x-2y=5a\\x+y=5b\end{cases}$。

解：In[9]:=Solve[{3x−2y==5a,x+y==5b},{x,y}]

out[9]={{x→a+2 b,y→−a+3 b}}

1.7.2 求线性方程组的全部解

在 Mathematica 中，用 LinearSolve[A,B]求满足方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解。如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式不为 0，那么这个解是方程组的唯一解；如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为零，那么这个解是方程组的一个特解，方程组的全部解由基础解系向量的线性组合加上这个特解构成。

NullSpace[A]提供计算方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的向量表，这样 LinearSolve[A,b]和 NullSpace[A]联合求得方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的全部解，命令列见表 1-6。

表 1-6 Mathematica 中解方程的函数

在 Mathematica 中解方程组的函数	意 义
LinearSolve[A,b]	求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解
NullSpace[A]	求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 基础解系的向量表

【例 1.5】 (1)已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&-1&1\\3&1&-1&3\\3&2&1&3\end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{A}$ 的秩，并计算 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系。

(2)解方程组$\begin{cases}x_1-3x_2-x_3+x_4=1\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=6\end{cases}$。