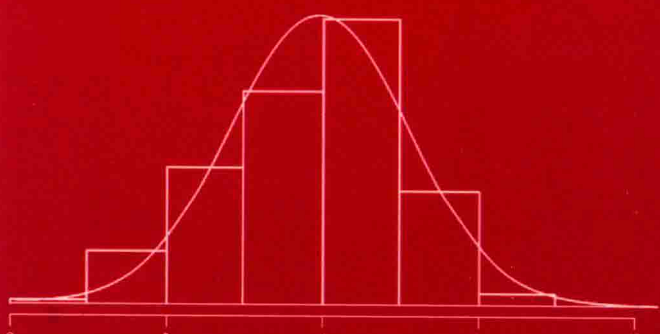
高等学校数学教材系列丛书

概率论与数理统计

李长伟　陈　芸
谭雪梅　王学敏　编著



西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

概率论与数理统计

李长伟　陈　芸
谭雪梅　王学敏　编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是为普通高等学校非数学专业编写的数学基础课教材. 全书共分为10章，内容包括随机事件的概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、线性回归分析与方差分析、相关软件简介. 书中配有相关习题，附录中配有部分习题的参考答案.

本书可作为高等学校理工、农医、经济、管理等非数学专业学生学习“概率论与数理统计”课程的教材，也可作为工程技术类人员或大学生考研复习的参考用书，还可供各类需要提高数学素质和能力的人员使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/李长伟等编著. —西安：西安电子科技大学出版社，2019.1
ISBN 978-7-5606-5112-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①李… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第249526号

策划编辑 杨丕勇
责任编辑 许青青
出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话 (029)88242885 88201467　　邮　　编 710071
网　　址 www.xduph.com　　电子邮箱 xdupfxb001@163.com
经　　销 新华书店
印刷单位 陕西日报社
版　　次 2019年1月第1版 2019年1月第1次印刷
开　　本 787毫米×1092毫米 1/16 印张 15.75
字　　数 371千字
印　　数 1～3000册
定　　价 38.00元
ISBN 978-7-5606-5112-5/O
XDUP 5414001-1

目　　录

第 1 章　随机事件的概率

自然现象和社会现象各异，但从它们发生的必然性的角度区分，可以分为两类：一类是在一定条件下必然会发生的，称为确定性现象，如太阳东升西落，一枚硬币向上抛后必然下落，同性电荷必相互排斥，异性电荷相互吸引等；另一类称为不确定性现象，其特点是在一定的条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而且在试验和观察之前，不能准确预知确切的结果，如向上抛一枚硬币，其落地后可能正面朝上，也可能反面朝上，某公司的股票可能上涨也可能下跌，某人射击一次可能射中 0 环，1 环，…，10 环. 因此，这里的不确定性有两方面的含义：一是客观结果的不确定性，二是主观猜测或判断的不确定性.

从另一个角度看，不确定性现象又可以分为两类：一类是个别现象，它是指原则上不能在相同条件下重复试验或观察的现象，如某一天的天气情况是晴天还是雨天等；另一类是随机现象，虽然它具有不确定性，但是在进行大量重复试验或观察时其结果会呈现出某种规律性. 例如，在相同的条件下多次抛一枚质地均匀的硬币，正面朝上的次数与抛的总数之比随着次数的增加会越来越接近于 0.5. 随机现象在大量重复试验中呈现出来的规律性称为统计规律性. 它是概率论与数理统计研究的基本出发点.

1.1　随 机 事 件

1.1.1　随机试验与样本空间

在研究自然现象和社会现象时，通常需要做各种各样的试验. 试验通常用 E 来表示. 试验是一个含义比较广泛的术语，包含各种科学试验，甚至对某一事物的某一特征进行观察都认为是一种试验. 下面举一些试验的例子：

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_2：将一枚硬币连续抛三次，观察出现正面的次数.

E_3：抛一枚骰子，观察出现的点数.

E_4：记录某大型超市一天内的顾客人数.

E_5：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命.

E_6：记录某地明天的最高温度和最低温度.

显然，这些试验都具有以下特点：

(1) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果.

(2) 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

仔细分析发现 $E_1 \sim E_5$ 还有一个共同的特点：

(3) 可以在相同的条件下重复地进行.

但是 E_5 不具有特点(3)，除非时光倒流，否则无法进行重复试验. 以后我们把不满足条件(3)的随机试验称为不可能重复的随机试验，而把同时满足条件(1)、(2)、(3)的随机试验称为可重复的随机试验. 本书讨论的大多是可重复的随机试验，因此，若不作特别说明，以后指的随机试验都是可重复的随机试验.

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但由于试验的一切可能的结果是已知的，因此将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 Ω. Ω 的元素，即 E 的每个结果，称为样本点. 例如，上面 6 个随机试验的样本空间分别为

$\Omega_1=\{H, T\}$；

$\Omega_2=\{0, 1, 2, 3\}$；

$\Omega_3=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；

$\Omega_4=\{1, 2, \cdots, n\}$；

$\Omega_5=\{t \mid t\geqslant 0\}$；

$\Omega_6=\{(x, y) \mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度，并设该地的温度不会低于 T_0，也不会高于 T_1.

由此可以看出，样本空间可以是数集，也可以不是数集，如 Ω_1.

1.1.2 随机事件

进行随机试验时，人们关心的往往是满足某种条件的样本点所组成的集合. 例如，若规定灯泡的寿命超过 10 000 小时为合格品，则在试验 E_5 中我们关心的是灯泡的寿命是否大于 10 000 小时，满足这一条件的样本点组成 Ω_5 的一个子集 $A=\{t \mid t\geqslant 10\ 000\}$.我们称 A 为试验 E_5 的一个随机事件.

一般地，称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的随机事件，简称事件，常用大写字母 A，B，C，…表示，它是样本空间 Ω 的子集合. 在每次试验中，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，称事件 A 发生.

例如，在 E_5 中，若测试出灯泡的寿命 $t=11\ 000$ 小时，则事件“灯泡为合格品”即 $A=\{t \mid t\geqslant 10\ 000\}$ 在该次试验中发生；同样，若测试出灯泡的寿命 $t=3000$ 小时，则在该次试验中事件 A 没有发生.

显然，要判定一个事件是否在一次试验中发生，只有当该次试验有了结果以后才能知道.

由一个样本点组成的单点集称为基本事件. 例如，试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$，试验 E_2 有四个基本事件 $\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$.

对于一个试验 E，在每次试验中必然发生的事件，称为 E 的必然事件；在每次试验中都不发生的事件，称为 E 的不可能事件. 例如，在 E_3 中，“抛出的点数不超过 6”就是必然事件，用集合表示这一事件就是 E_3 的样本空间 $\Omega_3=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；而事件“抛出的点数大于 6”是不可能事件，这个事件不包括 E_3 的任何一个可能结果，所以用空集 $\varnothing$ 表示. 对于一个试验 E，它的样本空间 Ω 有两个特殊的子集：一个子集是 Ω 本身，因为它包含了试验的所有可能结果，所以在每次试验中它总是发生，Ω 称为必然事件；另一个特殊子集

是空集$\varnothing$，它不包含任何样本点，因此在每次试验中都不发生，称为不可能事件. 虽然必然事件与不可能事件已无随机性可言，但在概率论中，常把它们当作两个特殊的随机事件，这样做是为了数学处理上的方便.

1.1.3　事件间的关系与运算

事件是一个集合，因而事件间的关系和运算应该按集合间的关系和运算来处理. 设试验 E 的样本空间为Ω，而 A，B，$A_k(k=1, 2, \cdots)$是 Ω 的子集.

(1) 事件的包含与相等. 若事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B \supset A$ 或者 $A \subset B$. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

(2) 事件的和. 事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件，记为 $A \cup B$. 事件 $A \cup B$ 发生意味着：或事件 A 发生，或事件 B 发生，或事件 A 与事件 B 都发生.

事件的和可以推广到多个事件的情形. 一般地，$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的和事件. $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$的和事件.

(3) 事件的积. 事件 A 与事件 B 同时发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A \cap B$，简记为 AB. 事件 $A \cap B$(或 AB)发生意味着：事件 A 发生且事件 B 也发生，即 A 与 B 都发生.

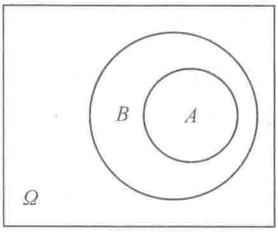
类似地，可以定义 n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的积事件 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$，$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$的积事件.

(4) 事件的差. 事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$. 它表示的是“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一新的事件.

(5) 互斥事件. 若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互斥的，或称它们是互不相容的. 若事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 中的任意两个都互斥，则称这些事件是两两互斥的.

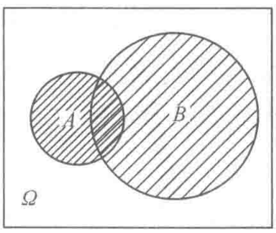
(6) 对立事件. 事件 $\Omega-A$ 称为事件 A 的对立事件或逆事件，记为 $\overline{A}$. A 和 $\overline{A}$ 满足：$A \cup \overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\varnothing$，$\overline{\overline{A}}=A$. 因此在每次试验中，事件 A、$\overline{A}$ 中必有一个且仅有一个发生. 又 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，所以称事件 A 与 $\overline{A}$ 互逆.

事件间的关系可用图 1.1～图 1.6 表示。



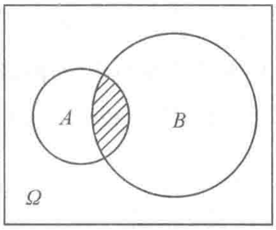
$A \subset B$

图　1.1



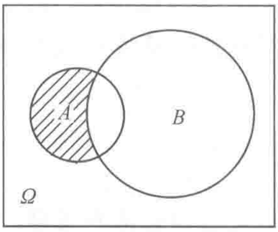
$A \cup B$

图　1.2



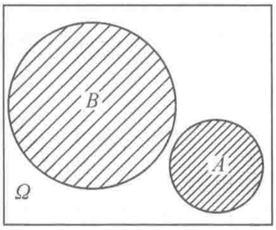
$A \cap B$

图　1.3



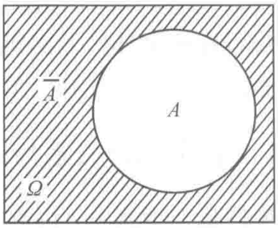
$A-B$

图 1.4



$A\cap B=\varnothing$

图 1.5



$A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$

图 1.6

事件之间的运算满足下述运算规律，设 A、B、C 为事件，则有：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$；

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

这些运算规律可以推广到任意多个事件上去.

【例 1.1】 设 A、B、C 为三个随机事件，用运算关系表示下列各事件.

解 (1) A 发生，而 B、C 不发生——$A\overline{B}\,\overline{C}$.

(2) A、B 都发生，而 C 不发生——$AB\overline{C}$.

(3) A、B、C 至少一个发生——$A\cup B\cup C$.

(4) A、B、C 不多于一个发生——$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

(5) A、B、C 至少两个发生——$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$ 或者 $AB\cup BC\cup AC$.

【例 1.2】 向指定目标射三枪，观察射中目标的情况. 设 A_1、A_2、A_3 分别表示事件“第一、二、三枪击中目标”，试用 A_1、A_2、A_3 表示以下各事件：

(1) 只击中第一枪；

(2) 只击中一枪；

(3) 三枪都没击中；

(4) 至少击中一枪.

解 (1) 事件“只击中第一枪”，意味着第二枪不中，第三枪也不中，所以可以表示成 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(2) 事件“只击中一枪”，并没有指定是击中哪一枪，三个事件“只击中第一枪”、“只击中第二枪”、“只击中第三枪”中，任意一个发生，都意味着事件“只击中一枪”发生. 同时，因为上述三个事件互不相容，所以，可以表示成 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

(3) 事件“三枪都没击中”，就是事件“第一、二、三枪都未击中”，所以，可以表示成$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(4) 事件“至少击中一枪”，就是事件“第一、二、三枪至少有一次击中”，所以，可以表示成 $A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3\cup A_1A_2A_3$.

习题 1.1

1. 用集合的形式表示下列随机试验的样本空间与随机事件 A：

(1) 同时抛两枚骰子，观察两枚骰子出现的点数之和，事件 A 表示“两点数之和不超过 3”；

(2) 抛一枚骰子，观察向上一面的点数，事件 A 表示“出现偶数点”；

(3) 对目标进行射击，击中后便停止射击，观察射击次数，事件 A 表示“射击次数不超过 5 次”.

2. 设 A、B、C 为三个事件，用 A、B、C 的运算关系表示下列各事件：

(1) A 发生，B 与 C 不发生；

(2) A、B、C 中至少有一个发生；

(3) A、B、C 都发生；

(4) A、B、C 都不发生；

(5) A、B、C 中不多于两个发生；

(6) A、B、C 中至少有两个发生.

3. 设某工人连续生产了 4 个零件，A_i 表示第 i 个零件是正品($i=1, 2, 3, 4$)，试用 A_i 表示下列各事件：

(1) 没有一个是次品；

(2) 至少有一个是次品；

(3) 只有一个是次品；

(4) 至少有三个不是次品；

(5) 恰好有三个是次品.

4. 请用语言描述下列事件的对立事件：

(1) A 表示“抛两枚硬币，都出现正面”；

(2) B 表示“生产 4 个零件，至少有一个合格”.

1.2　随机事件的概率

1.2.1　频率与概率

除必然事件和不可能事件外，任一事件在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们希望知道事件 A 在一次试验 F 中发生的可能性的大小.

设 E 为任一随机试验，A 为其中任一事件，在相同条件下，重复做 n 次试验，n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中出现的次数(称为频数)，则称比值$\frac{n_A}{n}$为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

显然，频率 $f_n(A)$的大小表示在 n 次试验中事件 A 发生的频繁程度. 频率大，事件 A

发生频繁，在一次试验中 A 发生的可能性就大，也就是事件 A 发生的概率大，反之亦然. 因此，直观的想法是用频率来描述概率.

人们在实践中发现：在相同条件下重复进行同一试验，当试验次数 n 很大时，某事件 A 发生的频率具有一定的“稳定性”，就是说其值在某确定的数值上下摆动. 一般来说，试验次数 n 越大，事件 A 发生的频率就越接近那个确定的数值. 事件 A 发生的可能性的大小就可以用这个数量指标来描述. 因此，可以用频率来描述概率，定义概率为频率的稳定值，我们称这一定义为概率的统计定义.

下面给出频率稳定性的例子.

(1) 在抛一枚均匀硬币时，出现正面的概率为 0.5. 为了验证这一点，一些科学家都做了大量的重复试验. 表 1.1 记录了历史上抛硬币试验中正面出现的频率，在重复次数较小时，波动剧烈，随着抛硬币次数的增大，波动的幅度逐渐变小，正面出现的频率逐渐稳定在 0.5. 这个 0.5 就是频率的稳定值，也是正面出现的概率. 这与用下面即将讲到的古典概率方法计算出的概率是相同的.

表 1.1

实验者	抛硬币次数	正面出现次数	频率
德·摩根(De Morgan)	2048	1061	0.5181
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
费勒(Feller)	10 000	4979	0.4979
皮尔逊(Pearson)	12 000	6019	0.5016
皮尔逊(Pearson)	24 000	12 012	0.5005

(2) 在英语中某些字母出现的频率远高于另外一些字母. 人们对各类典型的英语书刊中字母出现的频率进行了统计，发现各个字母的使用频率相当稳定，其使用频率见表 1.2. 这项研究在计算机键盘设计(在方便的地方安排使用频率较高的字母)、印刷铅字的铸造(使用频率高的字母应多铸一些)、信息的编码(使用频率高的字母用较短的码)、密码的破译等方面都是十分有用的。

表 1.2

字母	使用频率	字母	使用频率	字母	使用频率
E	0.1268	L	0.0394	P	0.0186
T	0.0978	D	0.0389	B	0.0156
A	0.0788	U	0.0280	V	0.0102
O	0.0776	C	0.0268	K	0.0060
I	0.0707	F	0.0256	X	0.0016
N	0.0706	M	0.0244	J	0.0010
S	0.0634	W	0.0214	Q	0.0009
R	0.0594	Y	0.0202	Z	0.0006
H	0.0573	G	0.0187		

(3) 频率的稳定性在人口统计方面表现得较为明显。拉普拉斯在他的名著《概率论的

哲学探讨》中研究了男婴出生的频率。他对伦敦、彼得堡、柏林和全法国的大量人口资料进行研究，发现男婴出生频率几乎完全一致，并且这些男婴的出生频率总在一个数左右波动，这个数大约是 22/43。另外一位统计学家克拉梅(1893—1985 年)在他的名著《统计学数学方法》中引用了瑞典 1935 年的官方统计资料(见表 1.3)，该资料表明，女婴出生的频率总是稳定在 0.482 左右。

表 1.3

月份	1	2	3	4	5	6	
婴儿数	7280	6957	7883	7884	7892	7609	
女婴数	3537	3407	3866	3711	3775	3665	
频率	0.486	0.490	0.490	0.471	0.478	0.482	
月份	7	8	9	10	11	12	全年
婴儿数	7585	7393	7203	6903	6552	7132	88 273
女婴数	3621	3596	3491	3391	3160	3371	42 591
频率	0.477	0.486	0.485	0.491	0.482	0.473	0.4825

但是，实际生活中有些试验不可重复进行，无法计算事件发生的频率，即使对可重复进行的试验，也不可能对每一个事件做大量的试验，然后求出事件的频率，用以表征事件发生的可能性的大小. 因此，需要引出一个能够揭示概率本质属性的定义.

由定义可知，频率具有如下性质：

(1) 非负性：$f_n(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：$f_n(\Omega)=1$；

(3) 有限可加性：若 A_1，A_2，…，A_k 是一组两两互不相容的事件，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)=\sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

定义 1.1(概率的公理化定义)　设 E 为随机试验，Ω 是它的样本空间，对 E 的每一个事件 A，将其对应于一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，这里集合函数 $P(\cdot)$ 要满足下列条件：

(1) 非负性：对任一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：对必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性：设 A_1，A_2，…是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，i，$j=1$，2，…，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

1.2.2　概率的性质

由概率的定义不难推出概率的一些性质.

性质 1　对任一事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$，且 $P(\varnothing)=0$，$P(\Omega)=1$.

性质 2(加法公式)　对任意两个事件 A、B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

推论(有限可加性)　若事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

设 A_1、A_2、A_3 为任意三个事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

一般地，对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，可由归纳法证得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

性质 3 若事件 A、B 满足 $A \subset B$，则有

$$P(B-A) = P(B) - P(A)$$

$$P(B) \geqslant P(A)$$

推论 对任意两个事件 A、B，有 $P(B-A) = P(B) - P(AB)$.

性质 4 对任一事件 A，有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

性质 1、3 的证明留给读者，这里仅给出性质 2、4 的证明.

证 性质 2：因为 $A \cup B = A \cup (B - AB)$，且 $A(B-AB) = \varnothing$，$AB \subset B$，所以由性质 3 得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

性质 4：因为 $A \cup \overline{A} = \Omega$，且 $A \cap \overline{A} = \varnothing$，所以由性质 2 可得

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

【例 1.3】 设 A、B 为两事件，且设 $P(B) = 0.5$，$P(A \cup B) = 0.8$，求 $P(A\overline{B})$.

解

$$P(A\overline{B}) = P(A(\Omega - B)) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A\overline{B}) = P(A \cup B) - P(B) = 0.8 - 0.5 = 0.3$$

【例 1.4】 设 A、B 为两互不相容事件，$P(A) = 0.5$，$P(B) = 0.3$，求 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解

$$P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B)] = 1 - (0.5 + 0.3) = 0.2$$

【例 1.5】 设事件 A、B 的概率分别为 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$，在下列三种情况下分别求 $P(B\overline{A})$ 的值：

(1) A 与 B 互斥；

(2) $A \subset B$；

(3) $P(AB) = \frac{1}{8}$.

解

$$P(B\overline{A}) = P(B) - P(AB)$$

(1) 因为 A 与 B 互斥，所以

$$AB=\varnothing$$

$$P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)=P(B)=\frac{1}{2}$$

（2）因为 $A\subset B$，所以

$$P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

（3）
$$P(B\bar{A})=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

1.2.3 古典概型

“概型”是指某种概率模型. 古典概型是概率论发展初期的主要研究对象，所以也称为古典概型. 它是一种最简单、最直观的概率模型. 如果做某个随机试验 E 时，只有有限个事件 A_1，A_2，…，A_n 可能发生，且事件 A_1，A_2，…，A_n 满足下面三条：

（1）A_1，A_2，…，A_n 发生的可能性相等(等可能性)；

（2）在任意一次试验中，A_1，A_2，…，A_n 至少有一个发生(完备性)；

（3）在任意一次试验中，A_1，A_2，…，A_n 至多有一个发生(互不相容性)，

则将具有上述特性的概型称为古典概型或等可能概型，A_1，A_2，…，A_n 称为基本事件.

在古典概型中，试验 E 共有 n 个基本事件，事件 A 包含了 m 个基本事件，则事件 A 的概率为 $P(A)=m/n$，即

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含基本事件数}}{\Omega\text{ 中所含基本事件数}}$$

【例 1.6】 将一枚硬币抛两次：

（1）设事件 A_1 为“恰好有一次出现正面”，求 $P(A_1)$；

（2）设事件 A_2 为“至少有一次出现正面”，求 $P(A_2)$.

解 （1）设随机试验 E 为：将一枚硬币抛两次，观察正反面出现的情况，则其样本空间为 $\Omega=\{HH, HT, TH, TT\}$. 它包含 4 个元素，且每个基本事件发生的可能性相同，故此实验为等可能概型. 又 $A_1=\{HT, TH\}$ 中包含 2 个基本事件数，故 $P(A_1)=\frac{1}{2}$.

（2）因为 $\overline{A_2}=\{TT\}$，所以 $P(A_2)=1-P(\overline{A_2})=1-0.25=0.75$.

使用古典概率的计算公式来计算概率时，涉及计数的运算，当样本空间 Ω 中的元素较多而不能一一列出时，我们只需要根据有关计数的原理和方法(如排列组合)计算出 Ω 及 A 中所包含的基本事件的个数，即可求出 A 的概率.

（1）加法原理.

例如，某件事采用两种方法完成，第一种方法又可采用 m 种方法完成，第二种方法可采用 n 种方法完成，则这件事可采用 $m+n$ 种方法完成.

（2）乘法原理.

例如，某件事由两个步骤完成，第一个步骤可采用 m 种方法完成，第二个步骤可采用 n 种方法完成，则这件事可采用 $m\times n$ 种方法完成.

（3）排列组合公式：

$A_m^n=\dfrac{m!}{(m-n)!}$：计算从 m 个人中挑出 n 个人进行排列的可能数.

$C_m^n=\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$：计算从 m 个人中挑出 n 个人进行组合的可能数.

这里给出一个记号，它是组合数的推广，规定：

$$\binom{n}{r}=\begin{cases}1 & (r=0)\\ \dfrac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} & (r=1,2,\cdots,n)\\ 0 & (r>n)\end{cases}$$

其中，n 为正整数. 显然，当 $r\leqslant n$ 时，$\binom{n}{r}=C_n^r$.

【例 1.7】 设袋中有 4 个白球和 2 个黑球，现从袋中无放回地依次摸出 2 个球(即第一次取一球不放回袋中，第二次再从剩余的球中取一球，此种抽取方式称为无放回抽样)，试求：

(1) 取到的两个球都是白球的概率；

(2) 取到的两个球颜色相同的概率；

(3) 取到的两个球中至少有一个是白球的概率.

解 记

$$A=\{取到的两个球都是白球\}$$
$$B=\{取到的两个球都是黑球\}$$
$$C=\{取到的两个球中至少有一个是白球\}$$
$$D=\{取到的两个球颜色相同\}$$

显然，$D=A\cup B$，$C=\overline{B}$.

(1) 用两种方法求 $P(A)$.

方法一 把 4 个白球和 2 个黑球彼此间看作是可区分的，将 4 个白球编号为 1、2、3、4，将 2 个黑球编号为 5、6，那么把第一次取到 3 号球(白球)和第二次取到 5 号球(黑球)这个基本事件与一个二维向量(3，5)相对应，从而基本事件的总数等于从 6 个不同元素中取出 2 个元素的无重复元素的排列总数 $A_6^2=6\times5=30$，而由于抽取的任意性，这 30 种排列中出现任一种的可能性相同，因此这是一个古典概型问题. 事件 A 包含的基本元素事件个数为 $A_4^2=4\times3=12$，所以 $P(A)=\dfrac{A_4^2}{A_6^2}=\dfrac{2}{5}$.

方法二 把摸得的 2 个球如 4 号球(白球)和 6 号球(黑球)看作一个基本事件(不管它们摸到的顺序如何)，则基本事件的总数为从 6 个不同的元素中任取 2 个元素的组合数 $\binom{6}{2}$. 由对称性可知，每个基本事件发生的可能性相同. 这时，事件 A 包含的基本元素事件数为 $\binom{4}{2}$，所以 $P(A)=\dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}}=\dfrac{\dfrac{A_4^2}{2!}}{\dfrac{A_6^2}{2!}}=\dfrac{2}{5}$.

(2) 类似(1)，可求得 $P(B)=\frac{2\times1}{6\times5}=\frac{1}{15}$.

(3) 因为 $C=\bar{B}$，所以有 $P(C)=P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$.

(4) 由于 $AB=\varnothing$，因此由概率的有限可加性得 $P(D)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{5}+\frac{1}{15}=\frac{7}{15}$.

对于有放回抽样的情形(即第一次取出一个球，观察颜色后放回袋中，搅匀后再抽取第二个)，读者可类似地解决例 1.7 中的 3 个问题.

此抽象模型对应许多实际问题.

例如，设每个人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的，即都等于$\frac{1}{365}$，那么随机选取 $n(n\leqslant365)$个人，他们的生日各不相同的概率为

$$\frac{365\times364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n}$$

因而，n 个人中至少有两个人生日相同的概率为

$$P=1-\frac{365\times364\times\cdots\times(365-n+1)}{365^n}$$

如果 $n=50$，可算出 $P=0.970$，即在一个 50 人的班级里，“至少有两个人的生日相同”这一事件发生的概率与 1 的差别不大. 如果 $n=100$，则 $P=0.9999997$，这一概率几乎是 1.

1.2.4 几何概型

如果一个试验具有以下两个特点：

(1) 样本空间 Ω 是一个大小可以计量的几何区域(如线段、平面、立体)；

(2) 向区域内任意投一点，落在区域内任意点处都是“等可能的”，那么，事件 A 的概率由下式计算：

$$P(A)=\frac{A\text{ 的计量}}{\Omega\text{ 的计量}}$$

【例 1.8】 甲乙两人相约 8～12 点在预定地点会面，先到的人等候另一人 30 分钟后离去，求甲乙两人能会面的概率.

解 以 X、Y 分别表示甲、乙二人到达的时刻，那么 $8\leqslant X\leqslant12$ ，$8\leqslant Y\leqslant12$. 若以(X,Y)表示平面上的点的坐标，则所有基本事件可以用这个平面上的边长为 4 的一个正方形 $0\leqslant X'\leqslant4$，$0\leqslant Y'\leqslant4$ 内的所有点表示出来. 二人能会面的充要条件是 $|X'-Y'|\leqslant\frac{1}{2}$，如图1.7所示(假设叫作阴影部分)，所以所求的概率为

$$P=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{正方形的面积}}=\frac{16-2\times\left[\frac{1}{2}\times\left(4-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{16}=\frac{15}{64}$$