

Array Signal Processing Techniques for Sonar

声纳阵列 信号处理技术

杜选民 周胜增 高原 著



声纳阵列信号处理技术

杜选民 周胜增 高源 著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书以声纳设备中接收水听器阵列的信号处理技术为研究对象,在建立声场模型、基阵模型和阵列信号模型等理论框架的基础上,对矢量水听器阵列处理、自适应波束形成与噪声抵消处理、声纳被动定位、目标运动分析、空时自适应处理等阵列信号处理技术的最新应用进行了深入研究,本书还对模基信号处理、MIMO 声纳、连续波主动声纳等阵列信号处理技术的最新发展进行了阐述。

本书深入、系统地介绍了可应用于实际声纳设备的阵列信号处理技术,算法均经过计算模拟仿真及实际湖、海试数据的检验,原理介绍简单明了,工程实用性较强。通过阅读本书,读者可以在掌握原理的基础上,对各种声纳阵列信号处理算法的应用场合、实用效果等有更加直观、深入的认识。另外本书用较大的篇幅介绍了声纳阵列信号处理领域的新技术、新方向,相关章节的最后附有大量参考文献,对水声专业在读学生、声纳工程技术人员及科研人员来说,在基础掌握、开拓眼界、把握选题方向等方面本书有较大的参考价值。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

声纳阵列信号处理技术 / 杜选民, 周胜增, 高源著. —北京: 电子工业出版社, 2018.3

ISBN 978-7-121-33649-2

I. ①声… II. ①杜… ②周… ③高… III. ①声纳—信号处理 IV. ①U666.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 024596 号

策划编辑: 米俊萍

责任编辑: 董亚峰 特约编辑: 邢剑飞

印 刷: 三河市华成印务有限公司

装 订: 三河市华成印务有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编: 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 16.25 字数: 396 千字 彩插: 2

版 次: 2018 年 3 月第 1 版

印 次: 2018 年 3 月第 1 次印刷

定 价: 58.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zltts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式: mijp@phei.com.cn。

前 言

阵列信号处理是现代声纳设备的核心功能之一。通过对接收阵列的信号处理，可以获取空间指向性增益，提高声纳作用距离，实现对目标的检测与跟踪、方位与距离估计；通过发射阵列的信号处理，可以获取具有一定时延差或相位差的阵元信号，从而形成指向性发射波束，提高声源级；通过空一时自适应处理，可以提高对弱目标的检测能力。近年来，声纳技术不断发展，出现了多线列阵声纳、连续波主动声纳、MIMO 声纳等新体制声纳及自适应盲处理、时反处理、矢量信号处理、鲁棒性波束形成、模基信号处理等新型处理算法，这些都是声纳阵列信号处理的发展与丰富。

本书作者一直从事水声及水声对抗技术研究和装备研制工作，在长期工作和学习中积累了较丰富的理论知识和工程经验，现将多年来在阵列信号处理方面的研究成果进行提炼和总结，形成本书。本书分为基础理论、阵列应用和新技术研究三个部分。基础理论部分（第 1~3 章）介绍了海洋信道中的声场模型、基阵理论基础和阵列信号模型，是各种阵列信号处理技术研究的理论基础。阵列应用部分（第 4~8 章）分别介绍了矢量水听器阵列处理、自适应波束形成与噪声抵消、声纳被动定位、目标运动分析、空时自适应处理技术和方法，是阵列信号处理的具体应用和实践。新技术研究部分（第 9 章）介绍了模基信号处理、MIMO 声纳处理、连续波主动声纳处理技术的原理和方法，是阵列信号处理的重要发展方向。

本书试图将阵列信号处理的理论模型和工程应用结合起来，侧重于工程实践。希望对从事水声及水声对抗技术研究和装备研制的科研人员有所帮助。本书可作为声纳设备设计人员开展相关研究工作的参考，也可作为水声工程、信号处理等专业研究生的教材。

本书在撰写过程中，得到了姚蓝教授、惠俊英教授、王广恩研究员等老一辈水声行业专家的指导，并提出了十分关键的修改意见，在此向他们表示崇高的敬意和衷心的感谢。另外，本书的研究工作得到了中船重工第七二六研究所水声对抗技术重点实验室主任孟昭文的大力支持，刘本奇、蒋小勇、潘谢帆、谭君红等参与了有关章节的研究工作，在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正。

作 者
2017 年 4 月

目 录

第 1 章 声场概述	1
1.1 引言	1
1.2 声波的基本概念	1
1.3 声学基本物理量	1
1.4 理想流体介质中小振幅波传播的基本规律	2
1.4.1 理想流体介质	2
1.4.2 连续性方程	3
1.4.3 状态方程	3
1.4.4 运动方程	4
1.4.5 波动方程	4
1.4.6 速度势函数	4
1.4.7 亥姆霍兹方程	5
1.4.8 三种不同坐标系下亥姆霍兹方程求解	5
1.4.9 线性滤波器理论框架下波动方程求解	9
1.4.10 介质特性阻抗	11
1.5 分层介质中的波传播	11
1.5.1 平行平面层中波传播的一般关系	11
1.5.2 边界条件	12
1.5.3 硬底均匀浅海声场	12
1.5.4 液态海底均匀浅海声场	14
1.6 声场传播基本模型	15
1.7 声学工具	16
1.8 本章小结	17
参考文献	17
第 2 章 基阵理论基础	18
2.1 引言	18
2.2 基阵的主要性能参数	18
2.2.1 常见的基阵类型	18

2.2.2	主要性能参数	18
2.3	均匀线列阵	21
2.3.1	基阵响应(指向性函数)	22
2.3.2	乘积定理	24
2.3.3	幅度加权	25
2.3.4	波束扫描	25
2.3.5	离散空间傅里叶变换	27
2.3.6	宽带声源	29
2.4	均匀平面阵	29
2.5	圆形阵	30
2.6	双线列阵	31
2.7	三元组线列阵	33
2.8	四元组线列阵	35
2.9	本章小结	36
	参考文献	37
第3章	阵列信号模型	38
3.1	引言	38
3.2	基阵信号与噪声	38
3.2.1	空间信号	38
3.2.2	基本假设条件	39
3.2.3	信号的窄带假设和解析表示	42
3.2.4	基阵噪声假设	45
3.3	阵列信号模型	46
3.3.1	基阵的阵列流形与模糊	46
3.3.2	基阵的离散时间信号模型	48
3.3.3	信号的空间采样	49
3.3.4	采样数据	50
3.4	波束形成	52
3.4.1	波束响应	52
3.4.2	输出信噪比	54
3.5	空间匹配滤波器	55
3.5.1	空间匹配滤波器介绍	55
3.5.2	阵元间距	56
3.5.3	阵列孔径和角度分辨率	58
3.6	本章小结	59
	参考文献	59
第4章	矢量水听器阵列处理技术	60
4.1	声场中的振速信息	60
4.1.1	平面波声场声学欧姆定律	60

4.1.2	各向同性噪声场中矢量水听器测量模型	61
4.2	矢量水听器的种类	62
4.2.1	声场振速的测量方法	62
4.2.2	矢量水听器的种类	62
4.2.3	几种矢量水听器	63
4.3	单矢量水听器探测技术	67
4.3.1	单矢量水听器的自然指向性	67
4.3.2	矢量水听器指向性的电子旋转	67
4.3.3	单个矢量水听器的测向方法	68
4.4	矢量水听器线列阵技术	68
4.4.1	矢量波束形成	68
4.4.2	矢量线列阵测向研究	70
4.4.3	目标跟踪算法研究	71
4.4.4	矢量线列阵的增益	71
4.4.5	矢量水听器线列阵校正	78
4.5	矢量拖线列阵技术	82
4.5.1	拖曳用矢量水听器	82
4.5.2	矢量水听器的姿态稳定技术	84
4.5.3	矢量拖线列阵拖曳噪声研究	84
4.5.4	拖曳试验数据处理	88
4.6	矢量时间反转镜	91
4.6.1	时反聚焦原理	91
4.6.2	声压时反镜聚焦理论	92
4.6.3	矢量时反聚焦理论	92
4.6.4	时反镜的聚焦稳健性	93
4.7	本章小结	93
	参考文献	93
第 5 章	自适应波束形成与噪声抵消技术	95
5.1	引言	95
5.2	常规波束形成技术	95
5.2.1	窄带相移波束形成	95
5.2.2	宽带波束形成	96
5.3	分裂阵波束形成技术	97
5.3.1	分裂阵参考阵元选取	97
5.3.2	分裂阵互相关检测	99
5.3.3	半波束相位单元化处理	101
5.4	自适应波束形成技术	108
5.4.1	MVDR 波束形成技术	108
5.4.2	MUSIC 算法	109

5.4.3	计算机仿真	110
5.4.4	快速收敛 MVDR 算法	112
5.4.5	海试数据处理结果	115
5.4.6	自适应波束形成改进的研究方向	115
5.5	自适应噪声抵消技术	116
5.5.1	自适应噪声抵消技术的基本原理	116
5.5.2	基于 LMS 算法的自适应噪声抵消	117
5.5.3	AIC 技术在拖船噪声抵消中的应用	118
5.5.4	逆波束形成拖船干扰抵消	121
5.6	本章小结	124
	参考文献	124
第 6 章	声纳被动定位技术	127
6.1	引言	127
6.2	三角定位法	127
6.2.1	基本原理	127
6.2.2	误差分析	128
6.2.3	实现方法	129
6.3	三点/四点测距	130
6.3.1	基本原理	131
6.3.2	误差分析	132
6.3.3	实现方法	133
6.4	聚焦波束形成定位	134
6.4.1	基本原理	134
6.4.2	理论计算	135
6.4.3	实现方法	136
6.4.4	高分辨聚焦波束形成方法	137
6.4.5	工程应用考虑	139
6.5	匹配场处理	140
6.5.1	概述	140
6.5.2	匹配场处理技术简介	141
6.5.3	匹配场处理发展	142
6.5.4	匹配场数据模型	143
6.5.5	匹配场处理仿真	145
6.5.6	匹配场处理存在问题	148
6.6	基于波导不变量的被动定位	150
6.6.1	问题的提出	150
6.6.2	干涉现象的产生机理	151
6.6.3	波导不变量 β	153
6.6.4	仿真实验	154

6.6.5 基于波导不变量的快速被动估距技术	156
6.7 多途定位	159
6.7.1 多途定位基本原理	159
6.7.2 计算机仿真	160
6.8 本章小结	163
参考文献	163
第 7 章 目标运动分析	165
7.1 引言	165
7.2 多基阵联合的被动纯方位目标运动分析	166
7.2.1 常规单基阵纯方位 TMA	166
7.2.2 双基阵被动纯方位 TMA 的数据融合模型	168
7.2.3 仿真计算	171
7.3 利用多维信息的被动目标跟踪性能研究	174
7.3.1 基本概念	174
7.3.2 方位—频率 TMA 及多阵纯方位 TMA 的最大似然估计	177
7.3.3 仿真计算	180
7.4 本章小结	183
参考文献	184
第 8 章 空时自适应处理	186
8.1 引言	186
8.2 混响空时分布特性	186
8.2.1 主动拖曳线列阵声纳	187
8.2.2 海试混响空时分布特性	188
8.2.3 主动声纳检测背景分析	189
8.3 STAP 原理介绍	191
8.3.1 空时数据结构	191
8.3.2 全维 STAP 处理方法	194
8.3.3 降维 STAP 处理方法	195
8.4 STAP 数据处理结果验证	201
8.5 STAP 在被动声纳中的应用	205
8.5.1 空—频二维自适应处理	205
8.5.2 仿真处理	206
8.6 本章小结	207
参考文献	208
第 9 章 新型声纳信号处理技术	209
9.1 引言	209
9.2 模基信号处理	209
9.2.1 卡尔曼滤波技术	210
9.2.2 MBSP 在水声信号处理中的应用方向	211

9.2.3	模基信号处理小结	214
9.3	多输入多输出声纳处理	214
9.3.1	MIMO 声纳原理	215
9.3.2	MIMO 声纳数学模型	215
9.3.3	MIMO 声纳特点	217
9.3.4	MIMO 声纳正交波形	219
9.3.5	MIMO 声纳等效虚拟阵	227
9.3.6	MIMO 声纳指向性	229
9.3.7	MIMO 声纳波束形成	233
9.3.8	MIMO 声纳信号处理小结	233
9.4	连续波主动声纳处理	234
9.4.1	研究现状	235
9.4.2	直达波干扰抑制	236
9.4.3	CAS 发射信号	237
9.4.4	基于差拍—分数阶傅里叶变换的 CAS 回波检测算法	242
9.4.5	小结	247
9.5	本章小结	247
	参考文献	247

第1章 声场概述

1.1 引言

水声信号处理是在复杂海洋环境下，对水听器或水听器阵列（基阵）信号进行空间、时间或空一时联合处理，完成对水下目标的检测、跟踪、定位和识别。水声信号处理是一门综合性学科，涉及换能器基阵、水声信道、海洋环境、频谱分析、随机过程、阵列信号处理、自适应信号处理、图像处理、模式识别、信息融合等诸多学科。基阵一般是由多个水听器按照一定结构进行组合形成的，基阵信号处理（Array Signal Processing, ASP）是水声信号处理的重要方面，声场及其传播规律是基阵信号处理的基础。声纳设备通过基阵对声场进行测量，从声场中提取声源或介质的信息。在理想的无界空间环境中，如果介质是均匀的，对于射线理论成立的高频段，可以忽略声场的影响。对于有界的非均匀介质，在衍射现象占主导作用的低频段，声波的物理特性在 ASP 算法中起非常重要的作用。因此，本章首先给出声场中声波传播的一些基本概念，从而更好地理解 ASP 问题的复杂性。

1.2 声波的基本概念

声音是一种机械振动状态的传播现象，它表现为一种机械波，即声波。习惯上，振动频率在 $16\sim 20000\text{Hz}$ 的声振动称为音频声波。频率高于 20000Hz 的声振动称为超声波，低于 20Hz 的声振动称为次声波或甚低频声波。超声波和次声波不能引起人们的声感觉。

产生声波的条件：①有做机械振动的物体——声源；②有能传播机械振动的介质。

一切弹性介质都可以传播声音，声音的传播与介质本身的弹性及惯性有关。当振动在气体和液体中传播时，会形成压缩和伸张交替运动现象，因此声音在流体介质中表现为压缩波的传播，即纵波。

声波在介质中传播有一定的速度，称为声波的传播速度，简称声速。在介质中，声波所及的区域统称为声场。

1.3 声学基本物理量

在连续介质中，任意一点附近的运动状态可用压强、密度及介质运动速度来表述。声场中的不同地点，这些物理量有不同的值，对同一地点，这些量又是随时间改变的。因此

可用 $P(\mathbf{r}, t)$, $\rho(\mathbf{r}, t)$ 及 $V(\mathbf{r}, t)$ 表示介质中的压强、密度和质点速度。

在理想流体中, 压力强度为一个标量。

设介质中没有扰动时静压强为 $P_0(\mathbf{r}, t)$, 声波传来时, 同一点的压强变为 $P(\mathbf{r}, t)$, 因此介质压强变化量为 p , 称为声压, 写成:

$$p(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}, t) - P_0(\mathbf{r}, t) \quad (1.3.1)$$

由于声波的作用, 介质质点的压强与静压相比可大可小, 即声压有正负。

声压的单位是 N/m^2 , 简称帕 (Pa)。在空气中, 人们对 1000Hz 纯声的闻域约为 $2 \times 10^{-5} \text{Pa}$, 人们在室内高声谈话时, 声压的幅值约为 $1 \mu\text{Pa}$ 。靠近飞机几米处发动机声音的声压可达几百帕, 此时感到震耳。在水中, 水声设备接收声音的声压最低不到 1Pa, 而靠近大功率发射源, 声压可高达几十万帕。一磅 TNT 炸药在水下爆炸时, 100 米处声压峰值可达 $2 \times 10^5 \text{Pa}$ 。

在声波的作用下, 介质质点围绕其平衡位置往复振动, 其瞬时位置即振动位移和瞬时速度均随时间变化, 因此也可用质点的振动位移或速度描述声场的一个参量。声场中各处振速不仅随时间变化, 方向也不同, 振速分布是个向量场。

设介质中没有扰动时静态流速为 $V_0(\mathbf{r}, t)$, 在声波作用下变为 $V(\mathbf{r}, t)$, 其改变量 $v(\mathbf{r}, t)$ 即介质质点的振动速度, 写成:

$$v(\mathbf{r}, t) = V(\mathbf{r}, t) - V_0(\mathbf{r}, t) \quad (1.3.2)$$

位移的单位为 m, 振速的单位为 m/s。

在空气中, 1Pa 声压对应的振速约为 $2.3 \times 10^{-3} \text{m/s}$, 相应于 1000Hz 声音的质点位移约为 $3.7 \times 10^{-5} \text{cm}$, 所以声场中介质质点位移振幅是很微小的。在水介质中, 1Pa 声压对应的振速约为 $7 \times 10^{-7} \text{m/s}$, 相应于 1000Hz 声音的位移仅 10^{-8}cm , 远小于空气中的位移。

无扰动时, 介质静态密度为 $\rho_0(\mathbf{r}, t)$, 当声波通过时, 介质密度变为 $\rho(\mathbf{r}, t)$, 其改变量为

$$\rho_c(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) - \rho_0(\mathbf{r}, t) \quad (1.3.3)$$

取介质密度的相对变化量 s 为压缩量:

$$s(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t) - \rho_0(\mathbf{r}, t)}{\rho_0(\mathbf{r}, t)} \quad (1.3.4)$$

声场中质点的振速和声波传播速度是两个概念。小振幅波的传播速度是取决于介质本身的物理常数。空气中声速约 340m/s, 海水中声速约为 1500m/s。但声场中质点振速幅值却小得多。

1.4 理想流体介质中小振幅波传播的基本规律

1.4.1 理想流体介质

考虑声传播介质是理想流体介质, 即该介质是连续的、静态均匀的且运动过程中没有能量损耗。因此, 理想流体介质中的基本规律, 可以用连续性方程、运动方程和状态方程

来表述。由以上三个方程推导可得声波的波动方程。

小振幅波是指在理想流体介质中传播的声波，在其传播的过程中，介质质点振动的位移比波长小得多，而且声压幅值也远小于介质的静压力 P_0 。在这种小振幅波的近似条件下，波动方程为线性。

理想流体介质中，速度势随时间变化做简谐振动是一种最简单的声波传播方式，分析简谐波的传播过程，将给出声传播的一些基本特性。而且由于通过傅里叶分析的方法可以将以任意时间函数振动的波分解成多个简谐率振动的波的和，因此作为波传播分析的基础，我们将主要分析简谐波的传播过程。

1.4.2 连续性方程

连续性方程来源于普遍的质量守恒定律。即在连续介质中，某一空间体积中如果流进与流出的流体质量不等，则该体积中介质密度必然产生变化。声波在介质中的传播引起介质质点的振动，产生压缩和伸张形变，此时介质中任一位置体积元中密度变化所引起的质量增量，与流进和流出流体体积元的流量之差相等。由此可推得：

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (1.4.1)$$

$\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ 表示单位时间内通过与流速方向垂直的单位面积的流量，称为流通密度。式 (1.4.1) 表示流通密度在某一点散度的负值等于该点介质密度的时间变化率。

1.4.3 状态方程

在声传播的过程中，由于声波的作用，传输介质会产生压缩和伸张形变，此时不止介质密度会发生变化，压强也将发生变化。即当声波通过介质时，介质的状态将发生变化。这种状态变化的具体体现就是在声波作用下，介质密度和压强等热力学参量的变化，变化的关系可以用热力学中描述状态变化过程的关系式来描述。由于介质压缩和膨胀过程的周期小于热量传导需要的时间，因此在声传播的过程中，可以忽略介质的热传导作用。即介质的压缩和膨胀是一个绝热过程（等熵过程），此时压强仅是密度的函数。由于压强和密度变化微小，对于等熵过程应满足 $dP = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s \cdot d\rho$ ，式中下角标 s 表示变化过程是等熵的。

显然，当介质的压强变化 $dP > 0$ 时，其密度的变化 $d\rho > 0$ ，此时介质处于被压缩的状态；当介质的压强变化 $dP < 0$ 时，其密度的变化 $d\rho < 0$ ，此时介质处于伸张的状态。因此，小振幅波在理想流体介质中传播的过程中，介质的状态系数 $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s > 0$ ，该状态系数可用 c^2

表示，即 $c^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s$ ，可得：

$$\frac{dP}{dt} = c^2 \frac{d\rho}{dt} \quad (1.4.2a)$$

或

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.4.2b)$$

式中， c 为小振幅波在介质中的传播速度。由上式计算得出的气体和液体中的声速值与实验测定的结果非常接近，因此采用介质绝热过程对声波传播过程进行分析的途径是正确的。

1.4.4 运动方程

根据牛顿运动定律可以导出介质中压强和质点振速之间的关系，即运动方程。小振幅声场中，静止介质的运动方程（又称尤拉方程）为

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p \quad (1.4.3)$$

1.4.5 波动方程

对于静止的介质，以上连续性方程、状态方程和运动方程表征了无源声场中的声学量声压 p 、振速 \mathbf{v} 和密度 ρ 之间的基本关系。由以上基本方程，经推导可得关于 p 的微分方程式，即理想流体介质中小振幅波的波动方程：

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = 0 \quad (1.4.4)$$

式中， ∇^2 为拉普拉斯算子，对不同的坐标系具有不同的形式。

式 (1.4.4) 波动方程反映了声压 $p(\mathbf{r}, t)$ 随空间 \mathbf{r} 和时间 t 变化的关系，给出了声传播物理过程的波动性质。通过式 (1.4.4) 可知，声波传播的过程仅与传播介质的性质有关，而与声源信号的波形及其具体的发射方式无关。因此，大大简化了声传播分析的数学模型。但是，以上的波动方程只能给出关于声压函数的普遍解的形式，即解是待定系数的函数形式。具体的声压函数形式需要根据初始条件和边界条件而定。

1.4.6 速度势函数

定义 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 为速度势函数，它等于介质单位质量所具有的声扰动冲量。经推导，得到速度势的波动方程：

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4.5)$$

速度势波动方程与声压波动方程有相同的形式，两个方程都适用于变声速的情况，但是密度必须是恒定的。

声场中的声压 $p(\mathbf{r}, t)$ 和质点振速 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ 与速度势函数 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ 的关系如式 (1.4.6) 和式 (1.4.7) 所示。因此，只要求出满足初始和边界条件的波动方程式的解 $\Psi(\mathbf{r}, t)$ ，就可以求得声场中的声压 $p(\mathbf{r}, t)$ 和振速 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ 。

$$\mathbf{v} = -\nabla \Psi \quad (1.4.6)$$

$$p = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (1.4.7)$$

如果在理想流体介质中, 求解有源声场时, 需要把声源的源函数带入线性波动方程, 即求解以下方程:

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\mathbf{r}, t) = x(\mathbf{r}, t) \quad (1.4.8)$$

式中, $x(\mathbf{r}, t)$ 为声源输入到流体介质中的声信号, 称作源分布或源函数, 它可以是时间 t 和声场中点位置 \mathbf{r} 的函数。假设源分布 $x(\mathbf{r}, t)$ 满足一个时间简谐依赖关系, 即在空间任一点上任一时刻的值只依赖于某个单一频率成分, 则源函数可以表示为

$$x(\mathbf{r}, t) = x_f(\mathbf{r}) \exp(j\omega t) \quad (1.4.9)$$

式中, $x_f(\mathbf{r})$ 为源函数中与空间有关的部分。

如果源分布有时间简谐依赖关系, 则所产生的速度势同样也有时间简谐依赖关系, 即

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_f(\mathbf{r}) \exp(j\omega t) \quad (1.4.10)$$

式中, $\Psi_f(\mathbf{r})$ 为速度势中与空间相关的部分。

1.4.7 亥姆霍兹方程

对于简谐波, 可以通过傅里叶变换给出频域波动方程, 即亥姆霍兹方程:

$$[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})]\Psi(\mathbf{r}, \omega) = 0 \quad (1.4.11)$$

式中, $k(\mathbf{r})$ 是角频率 ω 上介质的波数, 有

$$k(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c(\mathbf{r})} \quad (1.4.12)$$

亥姆霍兹方程构成了水声学中数值方程的理论基础。它虽然形式简单, 但没有一种通用的求解方法, 需要根据实际问题中的相关因素寻求适用的求解方法。例如, 需要把环境声场的声速梯度分布、边界条件、发射接收的距离和深度、频率和带宽等条件带入亥姆霍兹方程, 采用解析、数值或两者综合的方法进行声场求解。

具有宽带分布的声源亥姆霍兹方程求解时, 同样需要带入声源源函数的频域形式, 即求解以下方程:

$$[\nabla^2 + k^2(\mathbf{r})]\Psi(\mathbf{r}, \omega) = f(\mathbf{r}_0, \omega) \quad (1.4.13)$$

1.4.8 节将对三种常用坐标系下的亥姆霍兹方程进行求解。

1.4.8 三种不同坐标系下亥姆霍兹方程求解

1. 直角坐标系

平面波是一种在传播过程中其等相位面为平面的波形。分析平面波是一种将三维波简化为二维波的分析方法, 此种方法可以表征波的特性, 但实际中并不存在平面波。在进行远场分析时, 即分析的声场满足远场条件时, 声波的等相位面可以近似看作一个平面, 声波可以近似看作二维平面波。

对于平面波, 使用直角坐标系(见图 1-1)最方便。

在直角坐标系下，拉普拉斯算子表示为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.4.14)$$

对于理想流体介质，考虑波传播时介质没有边界，不存在反射波。这一类的波传播问题也称作无界介质中的波传播。求解亥姆霍兹方程式 (1.4.11) 的空间部分，去除速度势方程式 (1.4.10) 中的时间依赖关系并应用分离变量法，可得速度势的空间相关部分，表示为

$$\Psi_f(\mathbf{r}) = A \exp[-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (1.4.15)$$

式中， $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$ 表示波数向量， A 表示幅度，位置向量 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 为场中一点在直角坐标系中的位置（坐标值）。波数向量的三个分量分别代表波数在 x, y, z 轴上的分量。由于该向量给出了波的传播方向，因此波数向量通常又称作传播向量或波矢量。波矢量的幅度为

$$|\mathbf{k}|^2 = (\omega/c)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

将式 (1.4.15) 代入式 (1.4.10)，则有：

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = A \exp[-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \exp[j2\pi f t] \quad (1.4.16)$$

它代表了一列在传播向量 \mathbf{k} 方向上传播的时间简谐波。如果

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const} \quad (1.4.17)$$

则式 (1.4.16) 中在空间位置 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 的函数的相位在任何给定的时刻 t 都是一个常数。因此式 (1.4.17) 定义了一个等相位面。等相位面又称作波前。在声速恒定的均匀介质中，由式 (1.4.17) 定义的波前是平面时，声场称为平面波声场。传播向量 \mathbf{k} 是在波前的法线方向上，即与波前垂直。

传播向量 \mathbf{k} 也可以表示为

$$\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{n} \quad (1.4.18)$$

式中，波数 k 为 \mathbf{k} 的幅度， \mathbf{n} 为 \mathbf{k} 同一方向上的单位向量，即

$$\mathbf{n} = (u, v, w) \quad (1.4.19)$$

如图 1-2 所示，有：

$$\begin{cases} u = \cos \alpha = \sin \theta \cos \phi \\ v = \cos \beta = \sin \theta \sin \phi \\ w = \cos \gamma = \cos \theta \end{cases} \quad (1.4.20)$$

u, v, w 分别为 x, y, z 轴上无量纲的方向余弦， α, β, γ 分别为向量 \mathbf{n} 与 x, y, z 轴的夹角， θ, ϕ 为柱坐标系中的坐标角。 $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ ，所以 u, v, w 取值在 -1 和 1 之间，且有：

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1 \quad (1.4.21)$$

由式 (1.4.7) 和式 (1.4.16) 可得平面波声压：

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0 \exp[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (1.4.22)$$

$$\mathbf{k} = k \cdot \mathbf{n} = k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j} + k_z \mathbf{k} \quad (1.4.23)$$

式中， $k_x = k \cos \alpha$ ， $k_y = k \cos \beta$ ， $k_z = k \cos \gamma$ ，分别为波矢量 \mathbf{k} 在三个坐标轴上的投影。

因而声压也可以表示为

$$p(x, y, z, t) = p_0 \exp[j(\omega t - kx \cos \alpha - ky \cos \beta - kz \cos \gamma)] \quad (1.4.24)$$

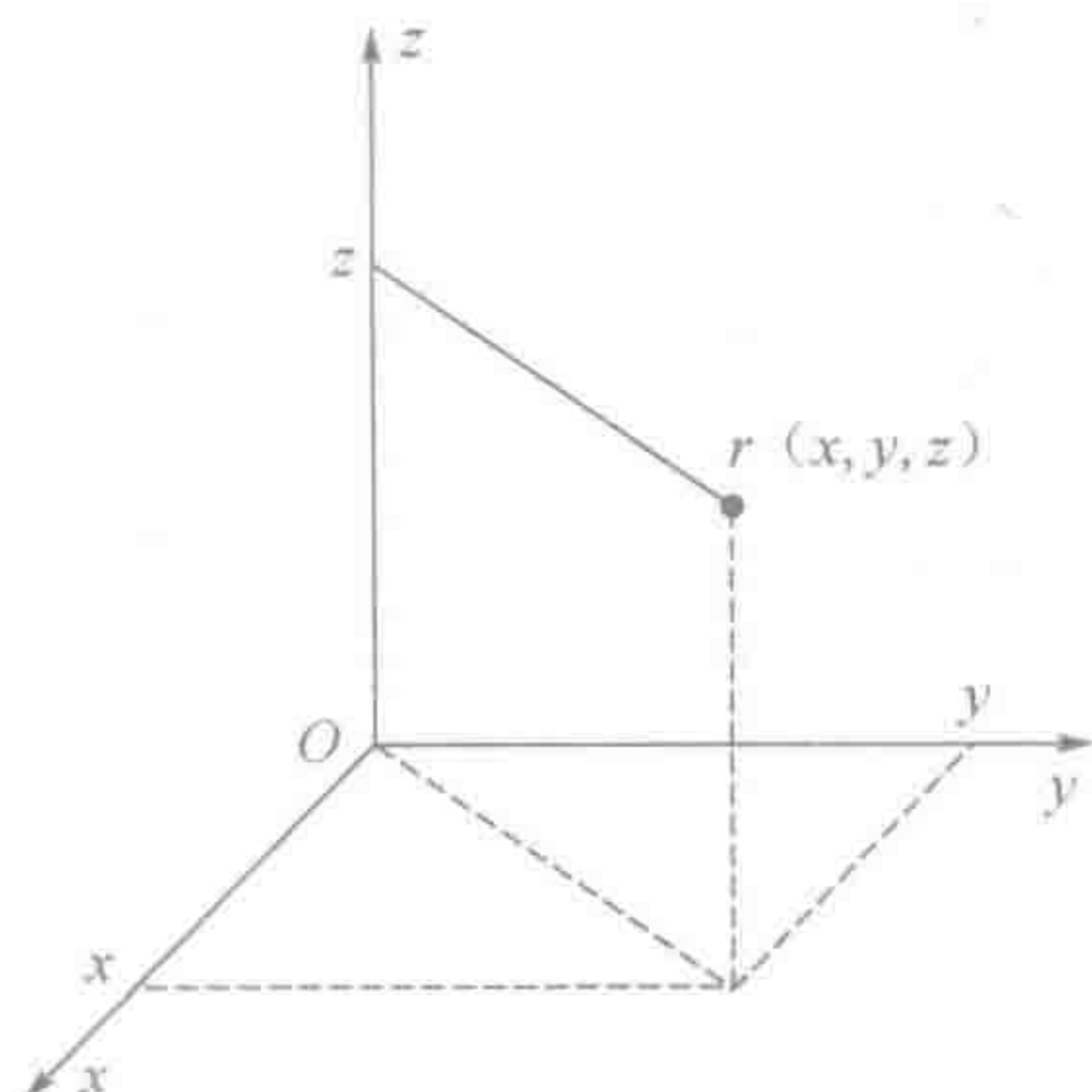


图 1-1 直角坐标系

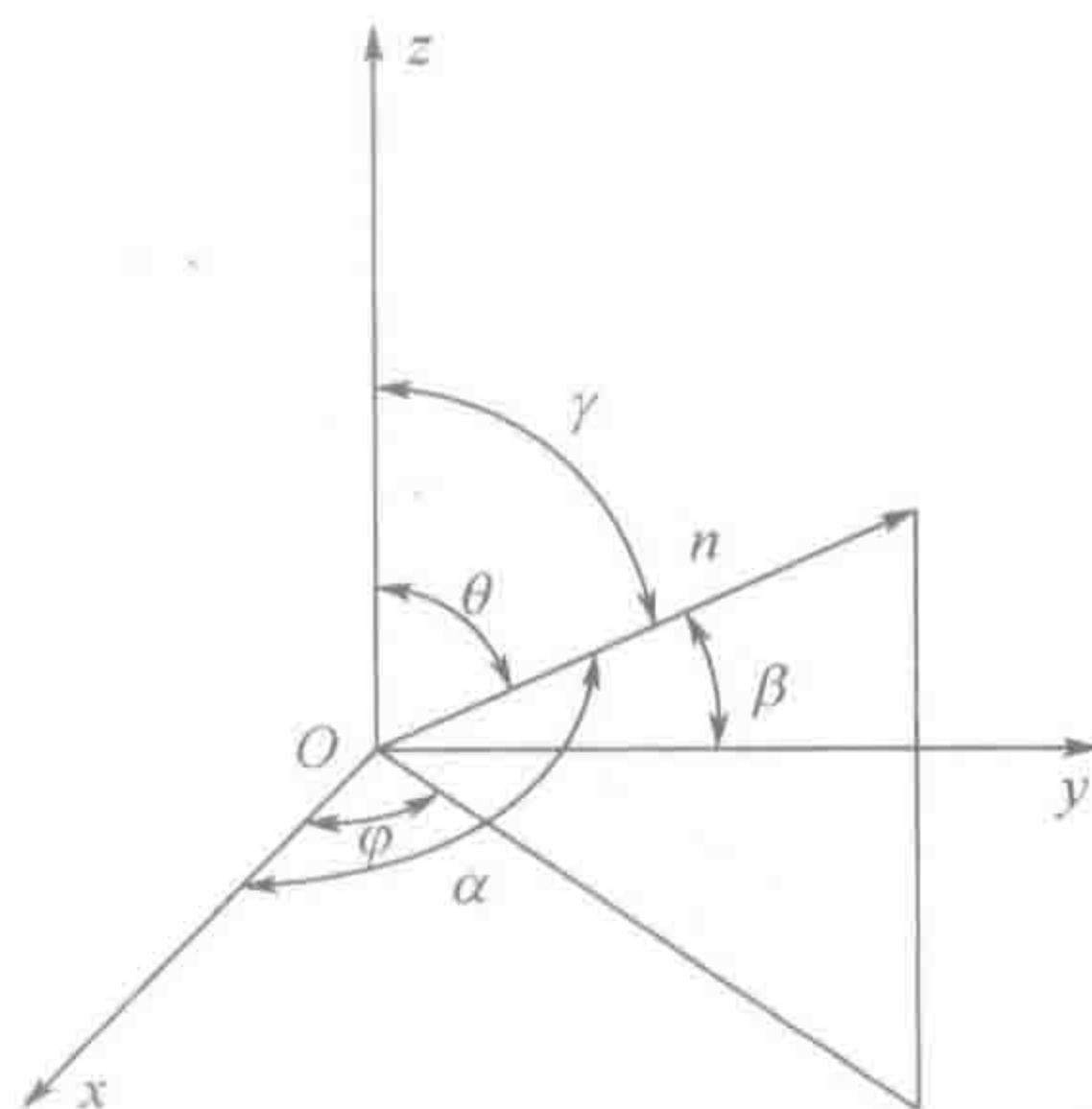


图 1-2 坐标示意图

2. 柱坐标系

圆柱面波的波阵面是由同心轴线的一组圆柱面所组成的。若只讨论理想流体介质中无限长线源辐射的均匀简谐柱面波声场，则用柱坐标系表示比较方便。

在柱坐标系中，空间一点的位置用 $r = (r, \varphi, z)$ 表示，如图 1-3 所示。通常假定声源位于 z 轴上。其拉普拉斯算子为

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.4.25)$$

式中， r 为圆柱半径， φ 为方向角， z 为轴向坐标。

对于均匀线性声源，声场只随距离 r 变化，亥姆霍兹方程可简化为贝塞尔方程，即

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right] \Psi = 0 \quad (1.4.26)$$

其解为

$$\Psi_f(r) = AJ_0(kr) + BY_0(kr) \quad (1.4.27)$$

式中， $J_0(kr)$ 和 $Y_0(kr)$ 分别为宗量为 kr 的第一类和第二类零阶贝塞尔函数。用汉克尔函数表示为

$$\Psi(r) = \begin{cases} CH_0^{(1)}(kr) = C[J_0(kr) + jY_0(kr)] \\ DH_0^{(2)}(kr) = D[J_0(kr) - jY_0(kr)] \end{cases} \quad (1.4.28)$$

式中， $H_0^{(1)}$ 和 $H_0^{(2)}$ 分别为第一类和第二类的零阶汉克尔函数，也称作第三类贝塞尔函数。

当 $kr \gg 1$ 时，

$$H_0^{(1)}(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \exp[j(kr - \pi/4)] \quad (1.4.29)$$