



应用型本科院校“十三五”规划教材/数学

Mathematics Basics On Economics III: Probability and Statistics

经济数学基础（三） 概率统计

- 适用面广
- 应用性强
- 促进教学
- 面向就业

主编 侯嫚丹 刘 辉 凌春英
主审 张永士



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



应用型本科院校“十三五”规划教材/数学

Mathematics Basics On Economics III: Probability and Statistics

经济数学基础(三) 概率统计

主编 侯嫚丹 刘辉 凌春英
主审 张永士



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书为应用型本科院校规划教材,是按照传承与改革的精神,依据国家教育部高等教育司审定的“高等学校财经管理类”专业核心课程《经济数学基础教学大纲》,结合编者多年将数学与经济学相结合的教学实践成果编写而成的。

全书共分为9章,分别为概率论的基本概念、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本分布、参数估计、假设检验和回归分析简介。每章最后都有经济应用实例。

本书是应用型本科院校经济管理类各专业学生的推荐教材,也可作为相关专业学生的学习参考书和从事经济管理工作人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础(三):概率统计/侯嫚丹,刘辉,凌春英主编.

—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.1

应用型本科院校“十三五”规划教材

ISBN 978-7-5603-6595-4

I. ①经… II. ①侯… ②刘… ③凌… III. ①经济数学-高等学校-教材

②概率论-高等学校-教材 ③数理统计-高等学校-教材

IV. ①F224.0 ②021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 088363 号

策划编辑 杜 燕

责任编辑 刘 瑶

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 14 字数 300 千字

版 次 2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-6595-4

定 价 27.80 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

《应用型本科院校“十三五”规划教材》编委会

主 任 修朋月 竺培国

副主任 王玉文 吕其诚 线恒录 李敬来

委 员 (按姓氏笔画排序)

丁福庆 于长福 马志民 王庄严 王建华

王德章 刘金祺 刘宝华 刘通学 刘福荣

关晓冬 李云波 杨玉顺 吴知丰 张幸刚

陈江波 林 艳 林文华 周方圆 姜思政

庾 莉 韩毓洁 蔡柏岩 臧玉英 霍 琳

序

哈尔滨工业大学出版社策划的《应用型本科院校“十三五”规划教材》即将付梓,诚可贺也。

该系列教材卷帙浩繁,凡百余种,涉及众多学科门类,定位准确,内容新颖,体系完整,实用性强,突出实践能力培养。不仅便于教师教学和学生学,而且满足就业市场对应用型人才的迫切需求。

应用型本科院校的人才培养目标是面对现代社会生产、建设、管理、服务等一线岗位,培养能直接从事实际工作、解决具体问题、维持工作有效运行的高等应用型人才。应用型本科与研究型本科和高职高专院校在人才培养上有着明显的区别,其培养的人才特征是:①就业导向与社会需求高度吻合;②扎实的理论基础和过硬的实践能力紧密结合;③具备良好的人文素质和科学技术素质;④富于面对职业应用的创新精神。因此,应用型本科院校只有着力培养“进入角色快、业务水平高、动手能力强、综合素质好”的人才,才能在激烈的就业市场竞争中站稳脚跟。

目前国内应用型本科院校所采用的教材往往只是对理论性较强的本科院校教材的简单删减,针对性、应用性不够突出,因材施教的目的难以达到。因此亟须既有一定的理论深度又注重实践能力培养的系列教材,以满足应用型本科院校教学目标、培养方向和办学特色的需要。

哈尔滨工业大学出版社出版的《应用型本科院校“十三五”规划教材》,在选题设计思路认真贯彻教育部关于培养适应地方、区域和社会发展需要的“本科应用型高级专门人才”精神,根据前黑龙江省委书记吉炳轩同志提出的关于加强应用型本科院校建设的意见,在应用型本科试点院校成功经验总结的基础上,特邀请黑龙江省9所知名的应用型本科院校的专家、学者联合编写。

本系列教材突出与办学定位、教学目标的一致性和适应性,既严格遵照学科

体系的知识构成和教材编写的一般规律,又针对应用型本科人才培养目标及与之相适应的教学特点,精心设计写作体例,科学安排知识内容,围绕应用讲授理论,做到“基础知识够用、实践技能实用、专业理论管用”。同时注意适当融入新理论、新技术、新工艺、新成果,并且制作了与本书配套的 PPT 多媒体教学课件,形成立体化教材,供教师参考使用。

《应用型本科院校“十三五”规划教材》的编辑出版,是适应“科教兴国”战略对复合型、应用型人才的需求,是推动相对滞后的应用型本科院校教材建设的一种有益尝试,在应用型创新人才培养方面是一件具有开创意义的工作,为应用型人才的培养提供了及时、可靠、坚实的保证。

希望本系列教材在使用过程中,通过编者、作者和读者的共同努力,厚积薄发、推陈出新、细上加细、精益求精,不断丰富、不断完善、不断创新,力争成为同类教材中的精品。

马长利

前 言

数学是自然科学的基本语言,是人类知识结构中的重要一环,是应用数学模型探索世界物质运动机理的主要手段。对于经管专业的大学生而言,高等数学教育不仅仅是一种学习专业的工具。中外大量的教育实践充分显示,优秀的高等数学教育,是对人的理性思维品格和思辨能力的培养、是对人的聪明智慧的启发、是对人的潜能与创造力的开发,其价值远非一般专业技术教育可比。

进入 21 世纪,我国高等教育实现了从精英教育到大众化教育的过渡,教育规模的迅速扩大,高等数学课程在教与学两个方面都产生了新的问题和挑战。一方面,学生数学基础更加参差不齐;另一方面,现代社会对人才数学素质的要求越来越高。从 2014 年开始,国务院引导一批非研究型本科高校向应用技术性转型,为解决新建本科高校这些问题和挑战提供了契机。现在的问题是教材建设严重滞后,目前的本科高等数学教材主要是面向教学型和研究型普通高校,而缺乏面向应用型技术性本科的教材,因此,编写应用型本科高校教材成为当前的重要任务。

基于以上考虑,我们编写了这套《经济数学基础》(内容包括微积分、线性代数、概率统计三部分),编写过程主要突出以下几点:

1. 以《基本要求》为指导。编写中认真贯彻了教育部《经济管理类数学基础课教学基本要求》,注重讲清用数学知识解决实际问题的基本思想和方法,培养学生的逻辑能力、应用能力和创新思维能力。
2. 注重学法指导。每章前列出了学习目标和要求,使学生明确学习目标,帮助学生把握学习重点,提高学习的自觉性。
3. 优化内容结构。与传统教材相比,全书对有关内容进行了整合,本着“必需,够用”原则,对部分内容进行了合并,加强了知识间的联系。
4. 弱化定理公式的推导证明。缩减了复杂的理论推导,运用几何直观和实际背景介绍帮助学生理解理论问题的理解。
5. 加强数学知识的实际应用。选编了一些与经济密切相关的例题与习题,用于课堂教学和学生课后练习。每章专门编写了一节“经济应用实例”,丰富了教学内容,培养学生运用数学知识解决实际问题的能力。
6. 注重数学文化的熏陶。增加了延伸阅读,教材中穿插了许多数学小故事、相关的数学史和数学家的阅读材料,增加了教材的可读性和趣味性。

7. 加强与中学内容的衔接。对基本概念的讲述,多从初等数学说起,采用“低起点,慢爬坡”的方式将高等数学概念与中学数学相关内容对接,自然过渡,打消学生的“恐高症”。

8. 注重精讲多练。教材尽量压缩理论叙述,适当增加例题习题篇幅,为突出教师的主导作用和学生的主体地位、增加师生互动提供资源保证。

本书共分9章,第1章概率论的基本概念,主要内容是介绍随机事件与样本空间;概率的定义;条件概率以及独立性与贝努里概型。第2章随机变量及其分布,主要内容是介绍随机变量及其分布函数;离散型随机变量,连续型随机变量;随机变量的函数的分布。第3章二维随机变量及其分布,主要内容是介绍二维随机变量;二维离散型、连续型随机变量;二维随机变量的独立性;二维随机变量的函数的分布。第4章随机变量的数字特征,主要内容是数学期望和方差以及协方差与相关系数。第5章大数定律与中心极限定理,主要内容是切比雪夫不等式,大数定律以及中心极限定理。第6章样本分布,主要内容是统计量和抽样分布。第7章参数估计,主要内容是点估计及其评价标准以及区间估计。第8章假设检验,主要内容是假设检验的基本概念;单个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 μ 的假设检验;单个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 方差 σ^2 的假设检验。第9章回归分析简介,主要内容是一元线性回归方程;一元线性回归效果的显著性检验与预测。每章最后都有与之相应的经济应用实例。

教材是实现人才培养目标的重要载体,教材编写直接关系到教学质量,对人才培养的质量起到举足轻重的作用。以教材为载体,以教师为主导,以学生为主体,是高等数学教学应遵循的教学规律。近年来,各种教育理念,诸如微课堂、慕课、翻转课堂等,无一不在颠覆传统单一的教学模式,不断带来全新的教学体验,也接受教学实践的检验。我们编写这套经管类高等数学教材,是应用型本科高校教学改革的一项尝试。本书的编者都是应用型本科高校的一线数学教师,在长期的教学实践中积累了丰富的教学经验。在本书编写过程中,紧密结合经济管理专业特点,把数学知识在经济管理中的应用融合到教学中,更符合应用型本科人才培养目标。

本书由侯嫚丹、刘辉、凌春英任主编,张永士任主审。其中第1章、第2章和第7章由刘辉编写,第3章、第8章和第9章以及附录由侯嫚丹编写,第4章和第6章由凌春英编写,第5章由郎奠波编写,参考答案每人负责各自的章节,参编人员还有吴海燕,李宗秀,郑金山,全书由主编总纂定稿。

本书在编写过程中得到了黑龙江财经学院副院长于长福、教务处处长庾莉的宝贵指导和支持,在此一并致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限,疏漏和不当之处在所难免,敬请读者不吝赐教,使之日臻完善。

编者

2017年11月

目 录

第1章 概率论的基本概念	1
1.1 随机事件与样本空间	2
1.2 概率的定义	7
1.3 条件概率	14
1.4 独立性与贝努里概型	19
1.5 经济应用实例:抽签问题、借贷问题及树形图	22
延伸阅读:概率论的起源	25
习题一	26
第2章 随机变量及其分布	30
2.1 随机变量	31
2.2 离散型随机变量及其分布	31
2.3 随机变量的分布函数	37
2.4 连续型随机变量及其概率密度	39
2.5 随机变量的函数的分布	48
2.6 经济应用实例:期权定价计算方法之 Black-Scholes 公式	50
延伸阅读:泊松分布在生活中的应用	51
习题二	52
第3章 二维随机变量及其分布	57
3.1 二维随机变量	58
3.2 二维离散型随机变量	59
3.3 二维连续型随机变量	63
3.4 二维随机变量的独立性	67
3.5 二维随机变量的函数的分布	69
3.6 经济应用实例:这样找庄家公平吗?	72
延伸阅读:蒙特卡洛方法:浦丰试验	73
习题三	74
第4章 随机变量的数字特征	78
4.1 数学期望	79
4.2 方差	87
4.3 协方差与相关系数	93
4.4 经济应用实例:减少验血的工作量与马克维茨均值——方差投资组合方法	98

延伸阅读:典故“杯酒释兵权”的解读	101
习题四	102
第5章 大数定律与中心极限定理	106
5.1 切比雪夫不等式	107
5.2 大数定律	109
5.3 中心极限定理	111
5.4 经济应用实例:如何有效安排人力与股票瞬时价格的分布	115
延伸阅读:中心极限定理的创立与发展	118
习题五	119
第6章 样本分布	121
6.1 统计量	122
6.2 抽样分布	123
延伸阅读:数理统计的起源	128
习题六	129
第7章 参数估计	131
7.1 点估计	131
7.2 点估计的评价标准	137
7.3 区间估计	139
7.4 经济应用实例:捕鱼问题与样本容量的确定	145
延伸阅读:最小二乘法的起源	147
习题七	148
第8章 假设检验	150
8.1 假设检验的基本概念	150
8.2 单个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值 μ 的假设检验	155
8.3 单个正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 方差 σ^2 的假设检验	162
8.4 经济应用实例:食品检验与百合饮料的市场推广	165
延伸阅读:疾病,因家族遗传	168
习题八	169
第9章 回归分析简介	172
9.1 一元线性回归方程	173
9.2 一元线性回归效果的显著性检验与预测	175
9.3 经济应用实例:不良贷款与时间序列预测问题	178
延伸阅读:辽沈战役与大数据	183
习题九	183
附录 常用统计数值表	185
参考答案	203
参考文献	213

第 1 章

Chapter 1

概率论的基本概念

学习目标和要求

1. 了解随机试验、随机事件及样本空间的概念, 简单了解 n 重贝努里试验.
2. 理解随机事件间的关系和运算准则, 掌握概率的性质, 并会利用相关公式求解随机事件的概率.
3. 掌握古典概型的特点, 会利用古典概型的思想及方法计算概率.
4. 理解条件概率、乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式, 掌握利用这些公式解决实际问题的方法.
5. 理解随机事件的独立性, 注意区分随机事件的独立性和随机事件的互斥关系.

在日常生活中, 人们观察到的现象大体上可以分为两类: 一类是可以准确预计结果的, 即在某种特定的条件下, 某种现象必然发生, 这类现象称之为**确定现象**. 例如, 太阳东升西落; 物体抛向高处必然落下; 在 1 个标准大气压下, 纯水在零摄氏度就开始结冰; 磁铁同极相互排斥, 异极相互吸引等. 另一类现象与确定现象正好相反, 它们不能准确地预计结果, 即每次观察的结果都可能不相同, 这类现象称之为**随机现象**. 例如, 抛一枚质地均匀的硬币, 其结果可能是正面向上, 也可能是反面向上; 在相同条件下, 测试 10 只灯泡, 观察其正常工作的个数, 结果有可能为 $0, 1, \dots, 10$; 在经济方面, 保险业务的增长、银行利率的变化也是不能准确预计的. 但是, 通过大量的观察、试验和深入的分析, 发现随机现象的结果虽然不确定, 但也存在着某种规律. 例如, 重复地抛掷一枚质地均匀的硬币, 其正面向上和反面向上的次数之比接近 $1:1$; 通过精

确分析,也能发现经济现象中的某种规律性的东西,从而指导生产生活.正如恩格斯所说,在表面是偶然性起作用的地方,这种偶然性始终是受内部隐蔽着的规律支配的,而问题是在于发现这些规律.

这种随机现象中呈现出的规律性,称之为**随机现象的统计规律**.概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律的一门学科.

1.1 随机事件与样本空间

1.1.1 随机试验

试验是一个广泛的术语,在自然界和人类社会中,把对某一现象的一次观察称为一次试验.例如:

- (1) 抛一枚硬币,观察其是正面向上,还是反面向上;
- (2) 抛掷一颗骰子,观察其出现的点数;
- (3) 单位时间内,观察某个服务器接收到的请求次数;
- (4) 观察某校大一新生的身高情况.

上述试验有着共同的特点.首先是其观察的结果不确定,但却可以知道试验所有可能的结果.例如,抛掷一颗骰子,它的结果不确定,但只可能是1点到6点中的一个;测量一批大一新生的身高,测量值也不确定,但却在一定的范围内变化.其次是这些现象在一定条件下都可以重复地观察.综上所述,这些例子有以下特点:

- (1) 试验在相同的条件下可以重复进行;
- (2) 试验的所有可能结果都明确,但不唯一;
- (3) 试验前不能预计哪一个结果会出现.

在概率论与数理统计中,把具有以上特点的试验称为**随机试验**,通常用字母 E 表示.

1.1.2 随机事件及其相关概念

随机试验 E 的所有可能结果是明确的,对于 E 中的每一个可能的基本结果(不可分割)称为**基本事件**,一般用 $\{e\}$ 表示.基本事件对应的元素称为**样本点**,一般用 e 表示. E 中所有样本点的集合称为**样本空间**,用 Ω 表示.基本事件与样本空间的关系,可以表示为 $\Omega = \{e_1, e_2, \dots\}$.

下面写出引例中的基本事件和样本空间:

- (1) 抛一枚硬币,出现的结果可能有两种,令 e_1 表示“正面向上”, e_2 表示“反面向上”,则 $\{e_1\}, \{e_2\}$ 为基本事件, $\Omega = \{e_1, e_2\}$ 为样本空间.
- (2) 掷一颗骰子,出现的点数可能有6种,分别是1,2,3,4,5,6,可以令 $e_i = i (i = 1, 2, \dots, 6)$, 则 $\{e_i\}$ 为基本事件, $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_6\} = \{1, 2, \dots, 6\}$ 为样本空间.

(3) 单位时间内,服务器接收到的请求次数可能为 $0,1,2,\dots$,可以令 $e_i=i(i=0,1,2,\dots)$,则 $\{e_i\}$ 为基本事件, $\Omega=\{e_0,e_1,e_2,\dots\}=\{0,1,2,\dots\}$ 为样本空间.

(4) 观察某校大一新生的身高情况,以 m 为单位.从新生中挑选一位同学,以 h 表示其身高,则可以把在一定范围内的任意实数视为基本事件,样本空间可以用 $\Omega=\{h|0.5 < h < 2.5\}$ 表示.

在上述例子中,(1)、(2)的样本空间由有限个样本点组成;(3)、(4)的样本空间由无限个样本点组成,且(3)中的样本点个数为可列无穷多个,(4)中的样本点个数为不可列无穷多个.

在随机试验 E 中,把由一些样本点构成的集合称为**随机事件**,简称**事件**,用 $A,B,C,\dots$ 表示.这些集合中的样本点往往带有某些共同的特征.例如,对于掷骰子的试验,可以把“出现偶数点”的情况定义为一个随机事件.定义事件 A 表示“出现偶数点”,则记 $A=\{2,4,6\}$,可以看出事件 A 是由三个样本点组成.也可以定义事件 B 表示“出现2点”,则记 $B=\{2\}$.从以上事件 A,B 的定义可以看出,定义一个事件,可以用文字描述的方式,也可以写成样本点的集合的形式.

随机事件作为样本点的集合,当是所有样本点构成的集合时,它就是样本空间;当是一个样本点构成的集合时,就是基本事件.所以,从集合的观点来看,基本事件是随机事件的子集,随机事件又是样本空间的子集.

当随机试验 E 的结果是 A 中的样本点时,称为**事件 A 发生**.例如,掷骰子的试验,事件 A 表示“出现偶数点”,那么当试验结果出现2点时,事件 A 发生,当试验结果出现3点时,事件 A 就没有发生.

每次试验中一定发生的事件,称为**必然事件**,用 Ω 表示.试验中一定不发生的事件,称为**不可能事件**,用 $\varnothing$ 表示.由于样本空间是所有样本点的集合,那么每次试验的结果必然出现在样本空间中,所以如果把样本空间看做事件,就是必然事件,从符号的表示上也可以看出这一点.需要指出的是,必然事件与不可能事件是每次试验之前就可以准确预计的,其结果不具有随机性,但是为了讨论问题方便,也可以将它们看成是随机事件.

1.1.3 事件间的关系及运算

随机事件是一个由样本点组成的集合,因而事件间的关系可以和集合间的关系进行类比.此外,还可以用图的形式来模拟事件间的关系,用一个矩形来代表样本空间,用若干个圆来代表随机事件,以圆之间的关系类比事件间的关系,这类图形叫做**文氏(Venn)图**.

1. 事件间的关系及运算

(1) 包含关系.对于同一个随机试验 E 中的两个随机事件 A,B ,事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称**事件 A 包含于事件 B** ,记为 $A \subset B$.事件间包含的含义是属于 A 的样本点同时也属于 B ,即事件 A 是事件 B 的子集,如图1.1所示.

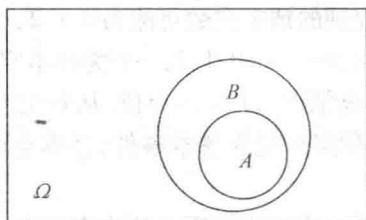


图 1.1

显然对于任意的事件 A , 有 $\emptyset \subset A \subset \Omega$.

特殊地, 还可以给出事件相等的概念. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则 $A = B$, 即事件 A 和事件 B 中含有相同的样本点.

(2) 和事件(事件的和). 事件 A, B 至少有一个发生(A 发生或者 B 发生) 所构成的事件, 称为事件 A 与 B 的和事件, 记为 $A + B$ 或 $A \cup B$, 如图 1.2 所示. 和事件的含义是属于 A 的样本点或属于 B 的样本点组成了 $A + B$ 的样本点, 即事件 A 与 B 的和事件为 A 与 B 的并集, 即 $A + B = \{e \mid e \in A \text{ 或 } e \in B\}$.

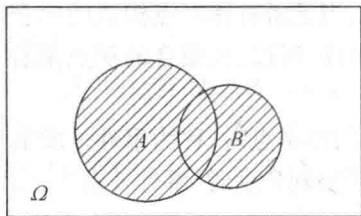


图 1.2

显然, $A \subset A + B, B \subset A + B$.

类似地, 可以定义 n 个事件的和事件.

事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生所构成的事件称为它们的和事件, 记为 $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 此式为可列个事件的和事件.

(3) 积事件(事件的积). 事件 A, B 同时发生所构成的事件, 称为事件 A 与 B 的积事件, 记为 AB 或 $A \cap B$, 如图 1.3 所示. 积事件的含义是属于 A 的样本点且属于 B 的样本点组成了 AB 的样本点, 即事件 A 与 B 的积事件为 A 与 B 的交集, 即 $AB = \{e \mid e \in A \text{ 且 } e \in B\}$.

显然, $AB \subset A, AB \subset B$.

类似地, 可以定义 n 个事件的积事件. 事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生所构成的事件为它们的积事件, 记为 $A_1 A_2 \dots A_n = \prod_{i=1}^n A_i$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 此式为可列个事件的积事件.

(4) 互斥事件. 事件 A, B 不能同时发生, 即 $AB = \emptyset$, 称事件 A 与事件 B 互斥或互不相容,

如图 1.4 所示. 事件 A, B 互斥的含义是 A 与 B 没有公共的样本点.

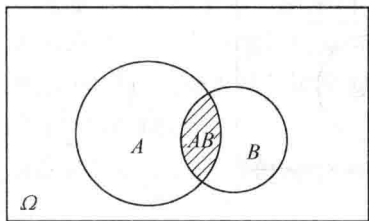


图 1.3

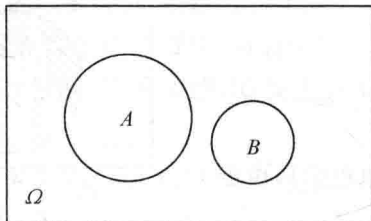


图 1.4

显然,基本事件是两两互斥的.

(5) 互逆事件. 事件 A, B 必有且只有一个发生, 即 $AB = \emptyset$, 且 $A + B = \Omega$, 称事件 A 与事件 B 互为逆事件或对立事件. 事件 A, B 互逆的含义是事件 A 与 B 没有公共的样本点, 而且 A 与 B 的样本点组成了样本空间中的样本点.

不属于 A 的样本点的集合, 构成了事件 A 的逆事件, 记为 $\bar{A}$, 如图 1.5 所示.

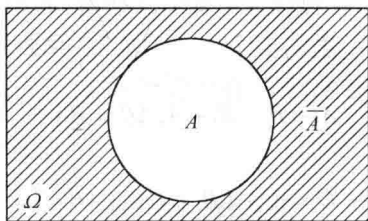


图 1.5

显然, $\bar{A}$ 与 A 互为逆事件.

一般地, $\overline{\Omega} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \Omega$, 若 $A \subset B$, 则 $\bar{A} \supset \bar{B}$.

(6) 差事件(事件的差). 事件 A 发生但是事件 B 不发生所构成的事件称为 A 与 B 的差事件, 记为 $A - B$, 如图 1.6 所示. 差事件的含义是属于 A 的样本点但不属于 B 的样本点构成了 $A - B$ 的样本点. 用集合表示为 $A - B = \{e \mid e \in A \text{ 且 } e \notin B\}$.

从图 1.6 中可以看出一个简单的关系式: $A - B = A - AB = A\bar{B}$.

(7) 完备事件组. 对于事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 若 $A_i A_j = \emptyset (i \neq j)$ 且 $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$, 称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为一个完备事件组. 完备事件组的含义是 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥, 且它们的和事件为必然事件.

【例 1.1】同时掷两颗骰子, 观察它们的点数之和. 定义事件 A 表示“点数和为 2 的倍数”, B 表示“点数和为 3 的倍数”, C 表示“点数和最大”, D 表示“点数和最小”. 请表示事件 (1) $A + C$; (2) AB ; (3) CD ; (4) $A - B$; (5) $\bar{A}$.

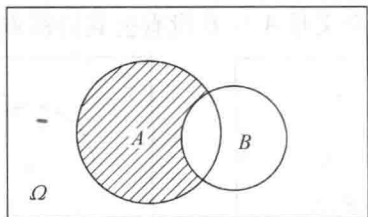


图 1.6

解 根据题意,可以写出事件 A, B, C, D .

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, B = \{3, 6, 9, 12\}, C = \{12\}, D = \{2\}$, 由定义有

(1) $A + C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$;

(2) $AB = \{6, 12\}$;

(3) $CD = \emptyset$;

(4) $A - B = \{2, 4, 8, 10\}$;

(5) $\bar{A} = \{3, 5, 7, 9, 11\}$.

2. 事件间的运算律

(1) 交换律

$$A + B = B + A, AB = BA$$

(2) 结合律

$$(A + B) + C = A + (B + C), (AB)C = A(BC)$$

(3) 分配律

$$(A + B)C = AC + BC, (AB) + C = (A + C)(B + C)$$

(4) 对偶律

$$\overline{A + B} = \bar{A}\bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

对偶律可以推广到有限个事件的情形

$$\overline{\sum_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n \bar{A}_i, \overline{\prod_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n \bar{A}_i$$

【例 1.2】 A, B, C 为 3 个随机事件, 用 A, B, C 的运算关系表示下列各事件.

(1) A, C 发生, 但 B 不发生;

(2) A, B, C 至少有一个发生;

(3) A, B, C 至少有两个发生;

(4) A, B, C 至多有一个发生;

(5) A, B, C 至多有两个发生;

(6) A, B, C 恰好有两个发生.

解 此题考察对事件间关系的理解,对此加以分析.

(1)“ A, C 发生,但 B 不发生”是 A 与 $\bar{B}$ 与 C 的积事件,可表示为 $A\bar{B}C$.

(2)“ A, B, C 至少有一个发生”就是 A 发生或 B 发生或 C 发生,可表示为 $A + B + C$.

(3)“ A, B, C 至少有两个发生”可理解为 AB 发生或 BC 发生或 AC 发生或 ABC 发生,可表示为 $AB + BC + AC + ABC$.

实际上, $AB + BC + AC$ 已经包含了 ABC 发生的情况,所以(3)也可以简单地表示为 $AB + BC + AC$.

(4)“ A, B, C 至多有一个发生”意思是只有一个事件发生或者都没有发生,可表示为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC$.

事件 A, B, C 发生包含了四种情况:“都没有发生”、“恰有一个发生”、“恰有两个发生”、“恰有三个发生”.此问中包含了前两种情况,可以用后两种情况的逆事件表示,而后两种情况可概括为 A, B, C 至少有两个发生,故“ A, B, C 至多有一个发生”还可以表示为 $\overline{AB + BC + AC}$.

(5)“ A, B, C 至多有两个发生”包含了三种情况:“都没有发生”、“恰有一个发生”、“恰有两个发生”,所以可以用第四种情况“恰有三个发生”的逆事件来表示,即 $\overline{ABC}$.

“至多有两个发生”还可以理解为“至少有一个不发生”,表示为 $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$.

(6)“ A, B, C 恰好有两个发生”说明当其中有两个发生时,另一个一定不发生,表示为 $A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$.

1.2 概率的定义

对于一个随机事件,在一次试验中可能发生,也可能不发生,试验前不能预计结果.在概率论中,不仅关心事件的发生与否,还关心事件发生可能性的大小.概率正是用来刻画随机事件发生可能性大小的度量.

在现实生活中,经常接触到“彩票中奖率”、“药物有效率”、“射击命中率”等带有“率”字的词语.这些“率”反映的恰恰是可能性的大小.概率是随机事件 A 发生可能性大小的度量,度量值就是事件 A 的概率,记为 $P(A)$.

本节将介绍概率的两种定义方式以及概率公理化定义.

1.2.1 频率与概率

一般来说,单凭一次随机试验是不容易估计随机事件发生的可能性大小的.但如果多次重复地进行试验,事件的发生就会呈现出一定的统计规律.为此,引入频率的概念,它描述的是多次试验中事件发生的频繁程度.所以,经过多次重复试验,如果频率趋于稳定,那么就可以用频率来度量随机事件发生可能性的大小,即用频率来逼近概率.