姜　静　王小双　主编

大学文科数学学习指导与精练

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

姜 静 王小双 主编

大学文科数学学习指导与精练

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

全书分 12 章，内容分别为函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程简介，行列式，矩阵与线性方程组，随机事件及其概率，随机变量及其分布，数理统计的基本知识，参数估计与假设检验等.

本书可作为高等院校纯文科类专业的数学基础课程的辅助教材，并可作为相关专业领域的教学参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学学习指导与精练/姜静，王小双主编. —上海：上海交通大学出版社，2018

ISBN 978-7-313-19495-4

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①姜… ②王… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 118096 号

大学文科数学学习指导与精练

主　　编：姜　静　王小双

出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号

邮政编码：200030　　电　　话：021－64071208

出 版 人：谈　毅

印　　制：虎彩印艺股份有限公司　　经　　销：全国新华书店

开　　本：787mm×1092mm　1/16　　印　　张：17

字　　数：326 千字

版　　次：2018 年 6 月第 1 版　　印　　次：2018 年 6 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-313-19495-4/O

定　　价：52.00 元

前言

大学数学是自然科学的基本语言，也是小学教育专业等文科专业的一门重要的基础课程. 它是小学教育专业学生后续学习的理论支撑与思辨能力培育的基石.

为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多的知识，我们根据多年的教学经验编写了本书. 旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧. 本书是浙江海洋大学小学教育专业教材建设专业成果，作为一本辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性，所配例题与习题都是教师多年积累的经典题型，只要认真练习，必定有所收获.

考虑到大学数学的课程特性，并针对小学教育专业等文科的学科特性，在内容上我们做了以下安排：

(1)基本要求、重点与难点. 在每一章的开头，设置了这一章的基本要求、重点与难点，便于让学生对本章的内容有一个清晰的认识，并在学习之始对本章的重点与难点有明确的把握.

(2)知识要点. 从本课程的知识体系出发，对每一节都列出了对应的知识要点，是为了对每一个章节的主要内容、知识要点、易错点等进行了概括与总结，使知识全面系统，便于掌握.

(3)典型例题解析. 对各章节的典型例题进行解析，引导学生思考问题，熟悉多种解题方法，掌握常规的解题思路和方法.

(4)课后习题. 根据每节课程内容的设置，设计课后习题，方便课堂与课后的双重配合，使学生熟练掌握基础知识与基本解题方法. 题目类型多变，根据不同的课程内容设置了不同的题目类型，有选择题、填空题、计算题、证明题、综合题等.

(5)单元综合题. 使学生对本章题目有一个综合认识，并在本章习题的基础上，难度略有提高，加深学生对本章课程内容的理解.

对大学数学课程最好的理解，是介于解题基础之上的实践训练. 本书提供的精

典例题解析，希望读者能够精心理解并吸收解题思路与方法;而课后习题与单元综合题的练习能在此基础上，将基础知识融会贯通，并能举一反三.

在编写本书的过程中，编者除了总结多年的教学经验外，还参考了一些其他教材和参考书，在很多方面得到启发与收益，在此不一一指明，谨对原书作者表示由衷的感谢.

由于编者水平有限，书中存在的不妥之处，恳请读者批评指正.

目 录

第 1 章　函数、极限与连续

基本要求：①理解函数的概念，掌握函数的表示法；了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；了解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念. ②知道基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念. ③了解数列极限和函数极限(包括左、右极限)的概念；知道极限的四则运算法则，会用两个重要极限. ④了解无穷小与无穷大的概念，了解无穷小比较方法，会利用无穷小等价求极限的方法. ⑤了解函数的连续与间断的概念，了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质. ⑥通过绪言与阿基米德介绍，了解数学的历史地位、作用以及古代数学家的创造与杰出贡献.

重点：①极限的四则运算法则；②两个重要极限；③会利用无穷小等价求极限的方法.

难点：①两个重要极限；②会利用等价无穷小求极限的方法.

1.1　函　数

知识要点

1. 实数

有理数与无理数统称为实数，记为 R(其中自然数集记为 N，整数集记为 Z，有理数集记为 Q).

2. 区间

(1)按区间长度分：有限与无限区间.

(2)按区间端点包含与否分：闭区间$[a,b]$，开区间(a,b)，前闭后开区间$[a,b)$，前开后闭区间$(a,b]$.

(3) 邻域：$U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$；去心邻域：$\dot{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$.

3. 函数

定义：设有两个变量x和y，变量x的值域为D，如果对于D中的每一个x值，按照一定的法则，变量y有一个确定的值与之对应，则称变量y为变量x的函数，记作$y=f(x)$，其中x称为自变量，y称为因变量，D称为定义域，记作D_f，变量y的取值集合称为函数的值域，记作R_f.

注：①函数概念中包含定义域与对应关系两要素；②当且仅当两个函数的定义域与对应法则完全相同时，它们才表示同一函数，否则表示两个不同的函数.

4. 函数常用的表示方法

函数常用的表示方法：表格法，图像法，公式法.

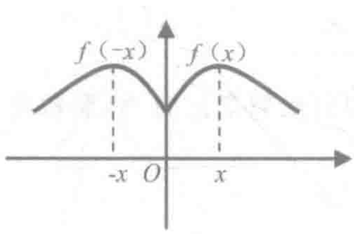
5. 函数的基本性质

(1)单调性. 设$f(x)$在区间I上有定义，若对任意$x,y\in I$，当$x<y$时，有$f(x)\leqslant f(y)$（或$f(x)\geqslant f(y)$），则称$f(x)$在区间I上为单调增加函数（或单调减少函数）；若对任意的$x,y\in I$，当$x<y$时，有$f(x)<f(y)$（或$f(x)>f(y)$），则称$f(x)$在区间I上为严格单调增加函数（或严格单调减少函数）.

(2)奇偶性. 设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称，即对$\forall x\in D$，有$-x\in D$，且若对$\forall x\in D$，有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数，若对$\forall x\in D$，有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数.

不是任何函数都有奇偶性，例如，$y=x+1$既不是奇函数也不是偶函数.

注：从几何特征来说，偶函数的图形关于y轴对称，奇函数的图形关于坐标原点对称（见图 1-1）.



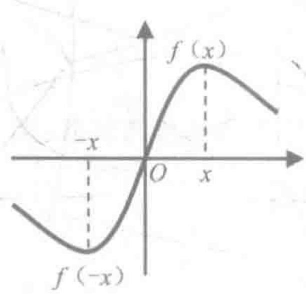


图 1-1

(3)有界性.设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在 $M>0$，使得对任意 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，否则称为无界.

如果存在 $M>0$，使得对任意 $x\in I$，恒有 $f(x)\leqslant M$(或者 $f(x)\geqslant M$)，那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有上界(或下界).其几何特征如图 1-2 所示，显然，$f(x)$ 在区间 I 上有界等价于它在区间 I 上既有上界又有下界.

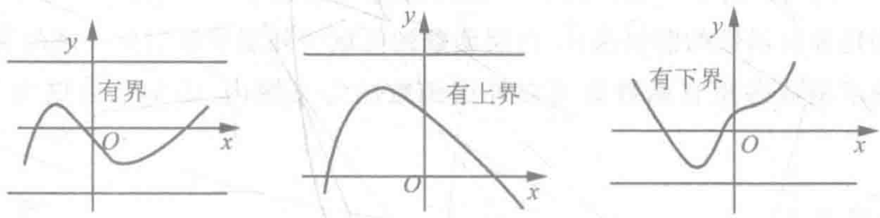


图 1-2

如三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界；函数 $y=\tan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无界.

(4)函数的周期性.设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 $T>0$，使得对 $\forall x\in D$，有 $x\pm T\in D$，并且有 $f(x\pm T)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，并称 T 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

注:①一个函数如果是周期函数则它有无穷多个周期，周期一般指它最小的正周期；②周期函数不一定存在最小正周期.如 $y=2$ 就是一个以任意正实数为一个周期的周期函数，由于不存在最小正实数，所以 $y=2$ 不存在最小正周期.

6.反函数

定义:设函数 $y=f(x)$ 为定义在数集 D 上的函数，其值域为 W.如果对于数集 W 中的每个数 y，在数集 D 中都有唯一确定的数 x 使 $y=f(x)$ 成立，则得到一个定义在数集 W 上以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 W，值域为 D.

通常把 $x=f^{-1}(y)$ 中的 y 换为 x，把 x 换为 y，从而得 $y=f^{-1}(x)$，并称 $y=f^{-1}(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数.由于这种符号上的改变并没有改变 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和对应法则，所以它们是相同的函数.从上面的定义很容易看出.

性质:①易见反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域即是原来函数 $y=f(x)$ 的值域，而其值域即是原来函数的定义域，两者图形重合，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称；②单调函数必有反函数，且其反函数的单调性与原来函数的单调性一致.

7. 复合函数

(1)**定义**:设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ,值域为 R_φ,当 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$ 时,$\forall x\in D_{f\circ\varphi}=\{x|x\in D_\varphi,\varphi(x)\in D_f\}$,即有函数 $\varphi(x)$ 的值落在 D_f 内,这样通过变量 u 就得到 y 与 x 之间的对应关系,称为复合函数,记为 $y=f\{\varphi(x)\}$,$x\in D_{f\circ\varphi}$,其中 x 是自变量,y 是因变量,u 称为中间变量.

(2)构建复合函数的前提条件. 内层函数的值域与外层函数的定义域的交不空. 也就是说,内层函数必须有函数值落在外层函数的定义域内. 否则就会成为无意义的函数.

8. 初等函数

(1)**定义**:由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算得到的,并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

(2)五类基本初等函数:

幂函数　$y=x^\alpha$(α 为实数).

指数函数　$y=a^x(a>0,a\neq1)$.

对数函数　$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$.

三角函数　$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$.

反三角函数　$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\text{arccot}\,x$.

典型例题解析

例:下列各组函数,哪些是同一函数,哪些不是?

(1)$\log_a x^2$ 与 $2\log_a x$.　　(2)$\sec^2x-\tan^2x$ 与 1.

(3)$\cos^2x-\sin^2x$ 与 $\cos2x$.　　(4)$x-1$ 与 $\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

分析:判断两个函数是否等价一般有两种方法:①考虑两个函数的定义域与值域是否一致;②对于同一个自变量的取值,检验各自对应的函数值是否相等.

解:(1)不等同,两者定义域不同.

(2)不等同,两者定义域不同,前者在 $\cos x\neq0$ 时才有意义.

(3)两者等同.

(4)不等同,两者定义域不同.

课后习题

1. 求函数的定义域.

(1)已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[-3,1]$,求 $f(2x+1)$ 的定义域.

(2)已知 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,5]$,求 $f(\tan x)$ 的定义域.

2. 已知 $f(x)=\begin{cases}2^x & x\leqslant 0\\ 1-x & 0<x\leqslant 1\\ 1 & x>1\end{cases}$,求 $f(-2)$,$f(0)$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,$f(2)$,并做出图形.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1)$f(x)=5x^4-x^2+1$ __________.

(2)$f(x)=2x^2+x\cos x$ __________.

(3)$f(x)=\dfrac{1}{2}(e^{-x}-e^x)$ __________.

4. 求函数 $y=\dfrac{12}{2-x}$ 的反函数.

5. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\ln\tan^2(x^3)$.　　(2) $y=\ln\sin\dfrac{x}{3}$.

1.2　极限的概念

知识要点

1. 数列极限

(1)**定义**:设有数列 $\{x_n\}$ 与常数 a,若对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总 $\exists$ 正整数 $N>0$,使得对于 $n>N$ 的一切 x_n,不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立,则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限,或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(2)数列极限说明:①上述定义中 ε 对极限全过程而言,要多小就可以取多小,而 N 是指由 ε 而确定存在的正整数,它不是唯一的,一般而言,ε 越小,所取的 N 越大;

②若数列$\{x_n\}$收敛，则其任一子列必收敛，且收敛于同一极限.

2. 数列极限的几何意义

常数 a 是数列$\{x_n\}$的极限，则以 a 为中心的任意 δ 邻域中一定有数列$\{x_n\}$中的无穷多个点，而在 δ 邻域外面最多只有数列$\{x_n\}$中的有限多个点.

3. 函数极限的分类

(1)自变量趋于无穷时的函数极限的概念. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，存在常数 $M>0$，当 $x>M$ 时，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2)自变量趋于有限值时函数极限的概念. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，存在常数 $\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，总有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(3)单侧极限的概念. 记 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$为 $f(x)$在 x_0 的左极限；$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$为 $f(x)$在 x_0 的右极限.

4. 函数极限的定理

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f_-(x_0)=f_+(x_0)=A.$$

注：常用于讨论函数在某一点的连续性

5. 极限的性质

(1)唯一性：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$极限存在，则其极限值唯一.

(2)有界性：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$极限存在，则 $f(x)$必在 x_0 某个邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$内有界.

(3)保号性：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，在 x_0 某个邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$内，有 $f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$)，则 $A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

典型例题解析

例：直接用极限定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-6n}{3+2n}=-3.$$

分析：①以下的证明是极限证明的重要方式，完全用定义证明；②对数学要求不高的专业此题目可忽略，只需要知道题目结果的计算方法即可，但其在微积分中的重要

性是不可忽略的，对微积分有兴趣的同学可以学习此题.

证明：要证 $\left|\dfrac{1-6n}{3+2n}-(-3)\right|=\dfrac{10}{3+2n}<\dfrac{5}{n}$，

只需证明对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N=\left[\dfrac{\varepsilon}{5}\right]$，当任意的 $n>N$ 时，必有

$$\left|\frac{1-6n}{3+2n}-(-3)\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-6n}{3+2n}=-3.$$

例：求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^4-4x^2+3}$.　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+2x^5}$.　(3) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1-\sqrt{x-4}}{x-5}$.

分析：(1)(2)题，首先都需要将原题目化简，这是一般解极限题目最先要做的事；(1)(2)(3)在解题的最后阶段具有相同的方法，将化简后的式子约去相同的因式，变成连续函数直接代入求极限.(3)式用 $1-\sqrt{1+(x-5)}\sim-\dfrac{1}{2}(x-5)$ 替换，可很快得到结果；另外，此式还可用分子有理化来化简式子，由此得出结果的方法.

解：(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^4-4x^2+3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x^2-3)(x-1)(x+1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-3}{(x^2-3)(x+1)}=\frac{1}{2}.$$

(2)
$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+2x^5}=\lim_{x\to0}\frac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2}{x^2+2x^5}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3+5x^2+10x+10}{1+2x^3}=10.$$

(3)
$$\lim_{x\to5}\frac{1-\sqrt{x-4}}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{1-\sqrt{1+(x-5)}}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to5}\frac{-(x-5)}{2(x-5)}=-\frac{1}{2}.$$

课后习题

1.数列填空题.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}+2\right)=$ ______.　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-(-1)^{3n}\dfrac{1}{5n}\right)=$ ______.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{4n+1}=$ ______.　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[5+\dfrac{(-1)^n}{n^3}\right]=$ ______.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{n^2-1}=$____________.　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)=$____________.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{e^n}=$____________.　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}=$____________.

(9) 数列 $\left\{2,\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\cdots,\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots\right\}$ 的通项表达式是____________.

(10) $n\to\infty$ 时，数列 $x_n=\dfrac{n+\cos n}{n}$ 的极限是____________.

(11) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$____________.

2. 函数填空题.

(1) 已知 a,b 为常数，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+2}{2x-1}=3$，则 $a=$____________，$b=$____________.

(2) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 在 $x=0$ 处的极限____________.

(3) 函数极限 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=$____________，$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=$____________，$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=$____________.

3. 讨论下列函数在 $x=0$ 点的极限.

(1) $f(x)=\operatorname{sgn}x$.　(2) $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$.　(3) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0\\ 0, & x=0.\\ 1+x, & x<0\end{cases}$

4. 求函数 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ 的极限.