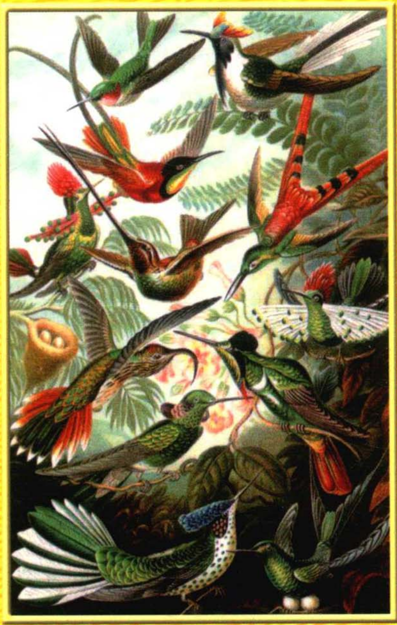
阿贝尔恒等式与经典不等式及应用

《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）



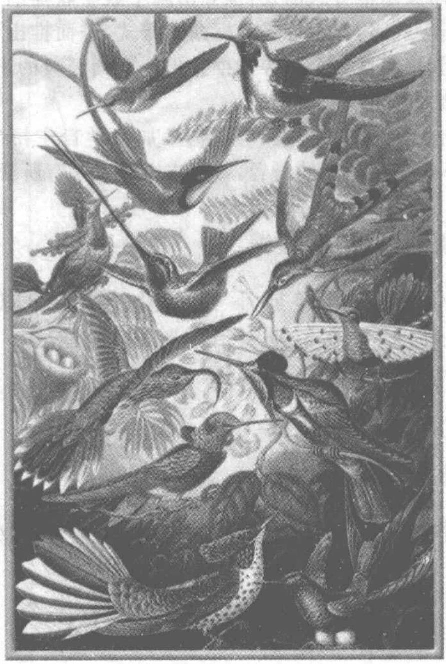
杨志明 编著

◎ 阿贝尔恒等式
◎ 切比雪夫不等式及其应用
◎ 均值不等式
◎ 闵可夫斯基不等式及其应用
◎ 卡拉玛特不等式
◎ 公开的问题

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

阿贝尔恒等式与经典不等式及应用



杨志明 编著

◎阿贝尔恒等式
◎切比雪夫不等式及其应用
◎均值不等式
◎闵可夫斯基不等式及其应用
◎卡拉玛特不等式
◎公开的问题

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从阿贝尔恒等式出发，推导出高中数学联赛的三大不等式：排序不等式、均值不等式和柯西不等式，进而推出卡拉玛特不等式．同时，由这四个不等式推导出一系列经典的不等式．一线串珠，给人以一气呵成之感．

本书适合于参加高中数学竞赛、参加大学自主招生的学生，以及对不等式感兴趣的读者，希望本书对大家有所帮助．

图书在版编目(CIP)数据

阿贝尔恒等式与经典不等式及应用/杨志明编著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.6

ISBN 978-7-5603-7400-0

Ⅰ.①阿…　Ⅱ.①杨…　Ⅲ.①不等式-研究
Ⅳ.①O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 101705 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　穆　青
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 50.25　字数 542 千字
版　　次　2018 年 6 月第 1 版　2018 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-7400-0
定　　价　98.00 元

序一

近日，杨志明老师将此书的校对书稿发给我，邀我作序.

这本书，是杨老师花了很多心血，阅读了大量古今中外的有关名著，结合自己教学和研究经验汇集而成. 全书逻辑上一线串通，可读性强；常见的著名不等式尽收书中，并且提供各种不等式的应用以及一题多解、多题一解，实用性好.

杨必成先生为此书写了很好的序，详细分析了这本书的特色、优点. 我这里就不再多说了.

相信广大读者能从书中得到有关不等式理论及数学思想方法的启迪，更好地从事数学的教学、学习或研究，为我国的数学教育和研究做出更多、更大的贡献。

张景中

2017 年 3 月

于羊城

◎ 序二

杨志明老师是广东广雅中学的一名数学高级教师(在湖北八大名校之一的湖北省黄石二中任教14年),他于1993年毕业于湖北师范学院数学系,至今二十多年来一直孜孜不倦,坚持于一线的数学教学及指导中学生数学竞赛的工作.他现任“全国初等数学研究会”常务理事兼副秘书长,还是“全国不等式研究会”常务理事.除教书育人,搞好常规的数学教学外,他还执着于不等式的钻研及学生的数学竞赛培训.多年来,他发表了数量可观的数学论文、著作,探索经典不等式的理论应用;他坚持培养中学生的数学探索能力,指导优生参加数学竞赛,成绩不错,得到多次奖励;2009年至今,他组织本校团队参加“丘成桐中学数学科学奖”的论文竞赛活动,获得铜奖及“优胜奖指导老师”荣誉称号多次.因之,2012年底,《羊城晚报》以《广雅数学奇人杨志明:我为猜想狂》对他进行了热情报道.2005年,我因主持“第三届全国不等式学术年会”认

识了他;2008年后,我任“全国不等式研究会”理事长,因工作需要又接触了他;前几年,我作为“丘成桐中学数学科学奖”的评委参以审评过他指导学生的若干论文,了解较为深刻;最近几年,他积极参加我主持的“解析不等式”讨论班,接触交谈更多了些.印象中的他是一个热情、爽朗、执着且好学不倦的中学数学教师.

这本书是杨老师花了近两年的心血写出来的,确是他长期教学经验及理论钻研的成果结晶.全书分六章,从一个著名恒等式谈起,涉及6个经典不等式的导入,并推证出几十个重要不等式,拓展其多角度、全方位的应用.真可谓洋洋大观、一气呵成!该书涉及多个经典不等式的理论应用,纲线明了,深入浅出,兼具如下四个特色:

(1)本书内容能做到一线串通.即六章的内容是通过逻辑论证联系在一起的,且多数式子之间具有明确的理论联系,由此及彼,涉及广泛应用,由此可见,在收集、整理及拓展材料方面,作者是花了不少心血的;作者还用巧妙的数学推理剖析了不等式的内在联系,这样,就形成清晰的理论知识脉络,既方便学习理解,又利于导出应用.

(2)充分关注了各类经典不等式的实际应用.该书所列举及推导的多数不等式都考虑了它们的实际应用,特别是在竞赛数学方面的应用,这就使得一些不等式竞赛题不再显得神秘而不可及了,方便了数学竞赛题的学习理解及数学竞赛的辅导、培训工作.

(3)十分注重数学方法及数学思想的例析.该书不但注重严格论证,还穿插数学方法的说明及数学思想的阐述,并在多个地方,对“一题多解”“一题多证”做了

淋漓尽致的描述，且不乏精彩之笔，如对内斯比特不等式的证明，竟列举了41种方法，这体现出作者一丝不苟的治学精神及丰富的数学竞赛培训经验.

(4)该书侧重于对中学数学竞赛及指导论文的实践案例的论述.作者能理论联系工作实际，面向竞赛数学及培养优生这一课题，现身说法，向广大读者传授自身多年的实践经验及鲜活的理论探索心得.

深信广大不等式爱好者及一线数学教师能从这本书的阅读理解中得到不等式理论及数学思想方法的启迪，提高数学修养及审美意识，更好地从事数学教学、教育及不等式的理论研究工作，为祖国的数学教育事业做出更大的贡献.

杨必成

广东第二师范学院

2017年元月

于广州

◎ 前言

所谓公理化方法，就是从尽可能少的、不加定义的基本概念和一组不加证明的初始命题（公理）出发，应用严格的逻辑推理，使某一数学分支成为演绎系统的方法.

公理化方法是一种演绎的方法，使得数学变得容易，因而逐渐发展，产生了元数学的基本思想. 所谓元数学，笼统地讲，就是指把某种数学理论（如自然数理论、几何理论等）作为一个整体加以研究，研究系统的相容性、完备性及公理的独立性等问题.

基于公理化方法，法国布尔巴基学派力图把整个数学建立在集合论的基础上，“数学结构”的观念是布尔巴基学派的一大重要发明. 他们认为全部数学基于三种母结构：代数结构、序结构和拓扑结构. 所谓结构就是“表示各种各样的概念的共同特征仅在于它们可以应用到各种元素的集合上. 而这些元素的性质并没有专门指定，定义一个结构就是给出这些元素之间的一个或几个关

系，人们从给定的关系所满足的条件（它们是结构的公理）建立起某种给定结构的公理理论就等于只从结构的公理出发来推演这些公理的逻辑推论.”

我国著名的科普专家张景中院士，晚年致力于科普宣传，提出“要把数学变容易”，亲身发表论文，并且出版书籍《一线串通的初等数学》.

随着信息时代的到来，各种新的不等式应运而生.不等式的机器自动发现，为发现新的不等式提供了有力的工具.中国科学院研究员杨路教授编写的Bottema软件，更是这些机器证明软件中的佼佼者.笔者在2002年第二届全国不等式研究会上亲睹这一软件的神奇，从此掌握了这一软件，为自己研究不等式节省了大量宝贵的时间和精力.在这类软件中，值得一提的还有西藏刘保乾的agl2012软件，陈胜利的Schur01软件.

鉴于此，利用公理化方法和建构主义的观点，来整合众多的不等式势在必行，这也和我国提出的“核心价值观”相吻合.我国高中课程标准修订组，按照内涵、价值和表现的框架，给出的高中数学核心素养是：数学抽象、逻辑推理、数学建模、运算能力、直观想象、数据分析，这一要求正是“核心价值观”的体现.

笔者经过二十多年的教学实践，发现借助阿贝尔恒等式，可将高中数学联赛的三大不等式：排序不等式、均值不等式和柯西不等式，一线串通.我把这个想法告诉哈尔滨工业大学出版社的副社长刘培杰先生，他鼓励我出版此书.经过近两年的整理、补充、修订，终于写成本书.还要感谢张景中院士，他在百忙之中抽出时间，审阅了全书，并欣然为之作序.同时，还要感谢杨

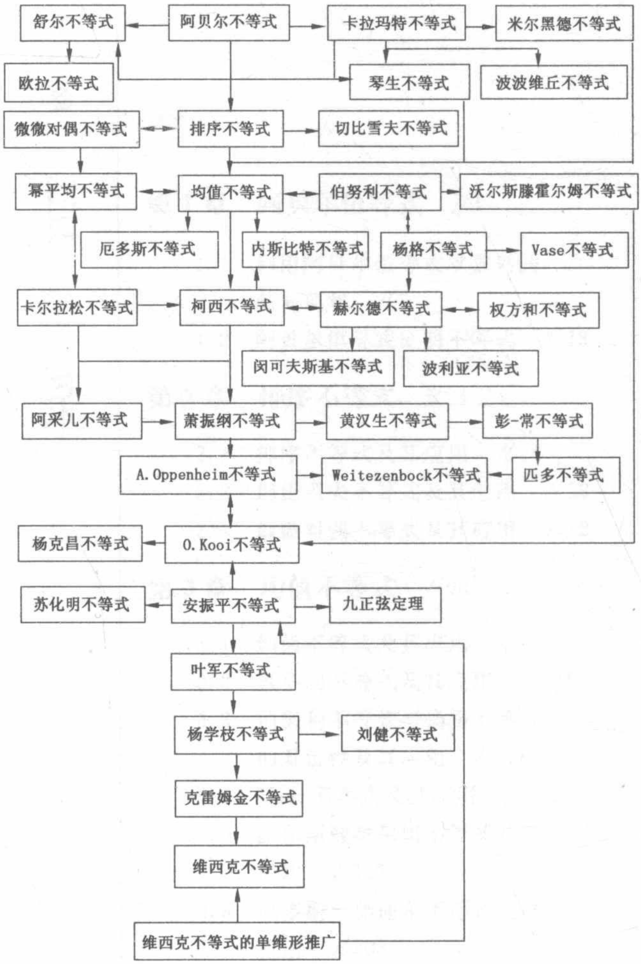
必成教授的热心帮助,帮本书作序,并且对全书校对.在此,我还要感谢那些热切关心本书的朋友们,是他们给了我勇气和信心.由于参考书目和文章较多,有时由于时间太久,已不记得不等式的出处,敬请谅解.书中疏漏在所难免,敬请批评指正,我的邮箱是:yzm876@163.com.

杨志明

2017年3月

于广州

阿贝尔恒等式簇有向图


舒尔不等式
阿贝尔不等式
卡拉玛特不等式
米尔黑德不等式
欧拉不等式
琴生不等式
波波维丘不等式
微微对偶不等式
排序不等式
切比雪夫不等式
幂平均不等式
均值不等式
伯努利不等式
沃尔斯滕霍尔姆不等式
厄多斯不等式
内斯比特不等式
杨格不等式
Vase不等式
卡尔拉松不等式
柯西不等式
赫尔德不等式
权方和不等式
闵可夫斯基不等式
波利亚不等式
阿采儿不等式
萧振纲不等式
黄汉生不等式
彭-常不等式
A. Oppenheim不等式
Weitezenbock不等式
匹多不等式
杨克昌不等式
O. Kooi不等式
苏化明不等式
安振平不等式
九正弦定理
叶军不等式
杨学枝不等式
刘健不等式
克雷姆金不等式
维西克不等式
维西克不等式的单维形推广

◎ 目录

第1章 阿贝尔恒等式

2008 年上海市春季高考试题的第 11 题是:

已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n$($n$ 是正整数),令 $L_1 = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, $L_2 = b_2 + b_3 + \cdots + b_n, \cdots, L_n = b_n$. 某人用图 1 分析得到恒等式

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = c_1 L_1 + c_2 L_2 + c_3 L_3 + \cdots + c_k L_k + \cdots + c_n L_n$$

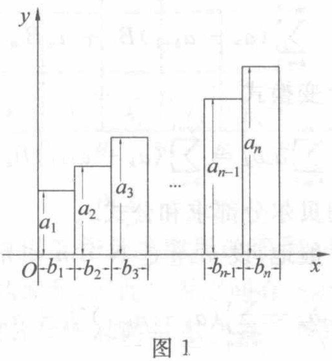


图 1

则 $c_k =$ ________ $(2 \leqslant k \leqslant n)$.

该题的背景就是著名的阿贝尔(Abel)恒等式.

众所周知,数列$\{a_n\}$的前n项和S_n与a_n的关系是

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \Leftrightarrow a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1) \\ S_n - S_{n-1} & (n \geqslant 2) \end{cases}$$

利用此关系,我们能够很快推出阿贝尔恒等式.

阿贝尔变换 设有两组数 $a_k, b_k (k = 1, 2, 3, \cdots, m)$,为了求和数

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_m b_m$$

引入 $B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, B_3 = b_1 + b_2 + b_3, \cdots, B_m = b_1 + b_2 + \cdots + b_m$. 这样, $b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, \cdots, b_m = B_m - B_{m-1}$,把它们代入和式中得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} a_k b_k = {} & a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + a_3 (B_3 - B_2) + \cdots + \\ & a_m (B_m - B_{m-1}) = \\ & (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + \cdots + \\ & (a_{m-1} - a_m) B_{m-1} + a_m B_m = \\ & \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_m B_m \end{aligned}$$

这个变换式

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_m B_m \tag{1}$$

就称为阿贝尔分部求和公式.

更一般地,设 $m, n \in \mathbf{N}^*, m < n$,则

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_m B_m - a_n B_{n-1} \tag{2}$$

此式称为阿贝尔变换.

上述阿贝尔变换,有一个简单的几何解释. 我们以

$m=6$ 为例，设 $a_k\geqslant 0, b_k\geqslant 0(k=1,2,3,4,5,6)$，且 a_k 单调下降.这时，$\sum_{k=1}^{6}a_kb_k$ 在图1中就表示以 b_k 为底，a_k 为高的六个矩形的面积之和，这恰好是图2中大的阶梯形的面积，它等于以 $B_6=\sum_{k=1}^{6}b_k$ 为底，以 a_6 为高的矩形面积，以及以 $B_k=\sum_{i=1}^{k}b_i$ 为底，$a_k-a_{k+1}(k=1,2,3,4,5)$ 为高的五个“扁”矩形的面积之和，可见，阿贝尔变换在几何上只是把大阶梯形面积转化成两种不同方向的矩形面积之和.

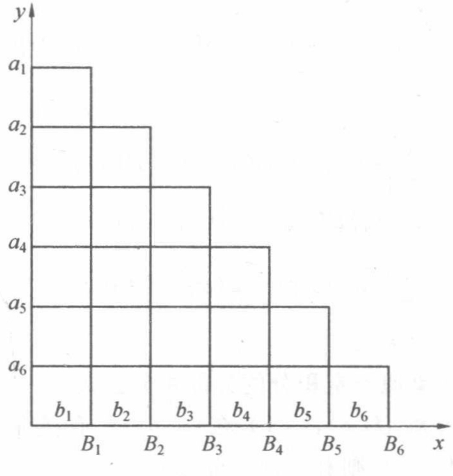


图 2

阿贝尔变换可以看作是求图形的面积，而定积分运算也是求图形的面积，因此二者之间有一定的联系.从广义上看，定积分运算和阿贝尔变换一样都是一种求和的运算.

我们进一步分析

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_m B_m$$

(约定 $B_0 = 0$).

不妨将数项看成是函数在某些点的函数值，即设函数 $a(x)$，$B(x)$ 定义在区间$[\alpha,\beta]$上，$\alpha = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_m = \beta$，令

$$a_1 = a(x_1), a_2 = a(x_2), \cdots, a_m = a(x_m)$$

$$B_k = B(x_k) \quad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

将其代入式(1) 得

$$\sum_{k=1}^{m} a(x_k)[B(x_k) - B(x_{k-1})] =$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} (a(x_k) - a(x_{k-1}))B(x_k) + a(x_m)B(x_m)$$

或

$$\sum_{k=1}^{m-1} a(x_{k+1})[B(x_{k+1}) - B(x_k)] =$$

$$a(x_m)B(x_m) - a(x_1)B(x_1) -$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} (a(x_{k+1}) - a(x_k))B(x_k) \tag{3}$$

其中 $B(x_0) = 0$.

上式类似于定积分的分部积分公式：

若函数 $U(x)$，$V(x)$ 在$[a,b]$上有连续的微商 $U'(x)$，$V'(x)$，则有分部积分公式

$$\int_a^b U(x)V'(x)\mathrm{d}x = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)U'(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

事实上，可以利用阿贝尔变换而得到，式(4) 给出定积分的分部积分公式的一种证明. 在此从略，留给有兴趣的读者去思考.