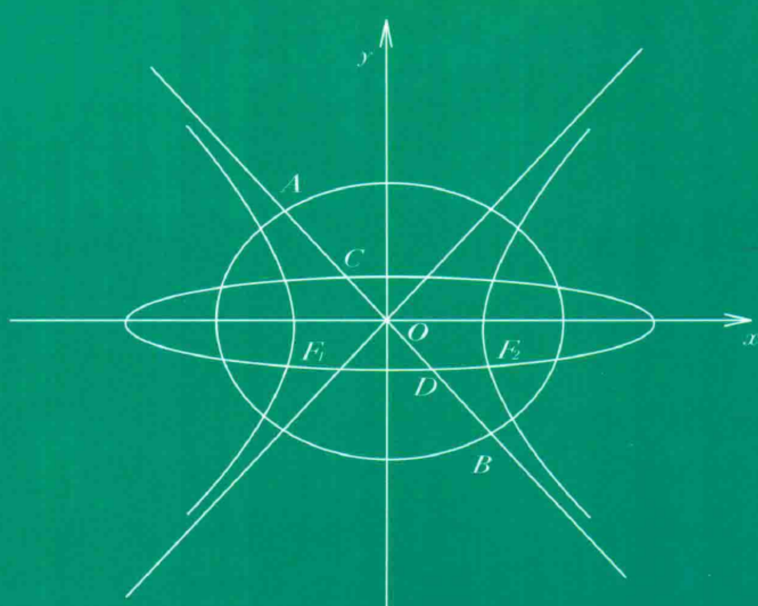
圆与圆锥曲线解题研究

YUAN YU YUANZHUI QUXIAN
JIETI YANJIU

高文珍 编著

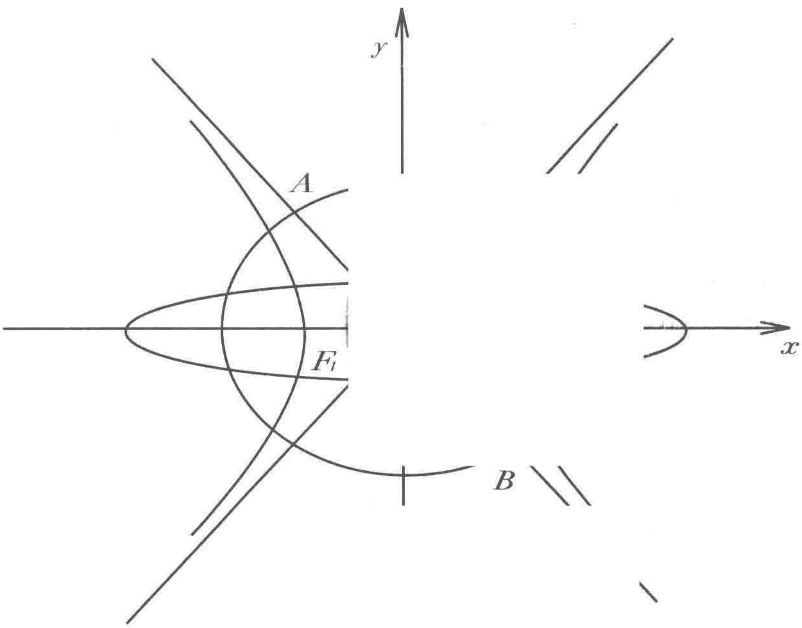


辽宁大学出版社

圆与圆锥曲线

解题研究

高文珍 编著



辽宁大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

圆与圆锥曲线解题研究 / 高文珍编著．—沈阳：
辽宁大学出版社，2018．7
ISBN 978-7-5610-9367-2

Ⅰ．①圆… Ⅱ．①高… Ⅲ．①圆—研究②圆锥曲线—
研究 Ⅳ．①O123．3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 158673 号

圆与圆锥曲线解题研究
YUAN YU YUANZHUI QUXIAN JIE TI YANJIU

出 版 者：辽宁大学出版社有限责任公司
（地址：沈阳市皇姑区崇山中路 66 号　邮政编码：110036）
印 刷 者：鞍山新民进电脑印刷有限公司
发 行 者：辽宁大学出版社有限责任公司
幅面尺寸：170mm×240mm
印　　张：10
字　　数：180 千字
出版时间：2018 年 7 月第 1 版
印刷时间：2018 年 7 月第 1 次印刷
责任编辑：马　静
封面设计：高梦琦
责任校对：齐　月

书　　号：ISBN 978-7-5610-9367-2
定　　价：35．00 元

联系电话：024－86864613　　网　　址：http：//press．lnu．edu．cn
邮购热线：024－86830665　　电子邮件：lnupress@vip．163．com

前　言

数学是研究现实世界空间的形式和数量关系的学科，简单说就是研究“数”与“形”的学科. 在“数”与“形”的相互转换中，要想到由“形”的直观变为“数”的严密，还要由“数”的严密联想到“形”的直观. 解析几何用代数方法研究几何问题，是数与形结合最好的体现.

在高中数学学习中，解析几何因为涉及的数学知识多，数学思想丰富，计算量大而成为很多学生学习的障碍，甚至对其有一种莫名的恐惧心理. 高考中，就解析几何部分所占的分值和位置而言，它具有很重要的战略意义，因此，怎样学好解析几何就成为高中学生学好数学的关键，而圆锥曲线又是解析几何中最典型的部分，因此，学好圆锥曲线，就又成了关键之关键.

圆锥曲线又称为二次曲线，它的得名，源于有一个公共顶点的两个倒立的圆锥，被平面从不同角度截得而成，而圆也在其中. 另外，圆与椭圆通过伸缩可以相互转换，所以，在圆锥曲线研究中，也包含圆的研究. 圆的个性和共性都比较突出，而椭圆、双曲线、抛物线除了延续圆在圆锥曲线中的共性外，它们各自都还有自己的个性，即它们本身的定义、方程、图形和性质.

解析几何是高中数学的重要内容，高考主要考查直线与圆、椭圆、抛物线、双曲线的定义、标准方程和简单的几何性质. 其中直线与圆、直线与圆锥曲线的位置关系是考查重点. 运动与变化是研究几何问题的基本观点，利用代数方

法研究几何问题是基本方法，数形结合思想、函数方程思想、特殊与一般的思想等思想方法是基本思想方法.

学习圆锥曲线要对其内涵进行深刻的理解，解题时，不断对问题进行观察分析，归纳类比，抽象概括，对问题中所蕴含的数学思想及方法进行思考，享受解题带来的乐趣，享受探究带来的成就感.

作　者

2018 年 6 月 10 日

目 录

第一章　圆与圆的第二定义

第一节　圆

1.1　圆的方程

圆的方程有三种表达形式：标准式、一般式和参数式.标准式突出圆心和半径；一般式只是表现出圆的方程形式特征，没有直接体现圆心与半径；参数式以旋转角为参数，表达圆上点的坐标关系.求解圆的方程时，三种方程形式均可以，但在实际应用中由于题干不同，选取形式还是要加以考虑，以减少运算量，方便求解.

例 1　求以 $A(-1,2)$，$B(5,6)$为直径端点的圆的方程.

【解析】线段 AB 的中点坐标为 $M(2,4)$，则 $M(2,4)$是圆心，易求线段 AB 长为 $2\sqrt{13}$，从而圆的半径为 $\sqrt{13}$，进而得到圆的方程为$(x-2)^2+(y-4)^2=13$.

引申　一般性结论：以 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$为直径端点的圆的标准方程为：

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4}$$

将其整理可化为 $x^2-(x_1+x_2)x+y^2-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0$

写成对称形式则为$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

反思与体会　本题很明显可以求出圆心和半径，因此，用标准式为佳.

例 2 已知圆满足:①截 y 轴所得弦长为 2,②被 x 轴分成两段弧,其弧长之比是 3∶1,③圆心到直线 $l:x-2y=0$ 的距离为$\frac{\sqrt{5}}{5}$,求这个圆的方程.

【解析】设所求圆的圆心为 $P(a,b)$,半径为 r,则点 $P(a,b)$到 x 轴,y 轴的距离分别为$|b|$,$|a|$,由题可知圆 P 截 x 轴所得劣弧对的圆心角为 90°,圆 P 截 x 轴所得的弦长为$\sqrt{2}r$ 故 $r^2=2b^2$,又圆 P 截 y 轴所得弦长为 2,所以有 $r^2=a^2+1$,从而有 $2b^2-a^2=1$,又因为圆心到直线 $l:x-2y=0$ 的距离为$\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $d=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,即$|a-2b|=1$,解方程组$\begin{cases}2b^2-a^2=1\\|a-2b|=1\end{cases}$,得 $a=b=1$ 或 $a=b=-1$,于是 $r^2=2$,所以,所求圆的方程为:$(x+1)^2+(y+1)^2=2$ 或$(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

反思与体会 这两道题涉及圆心的关系,因此选择标准形式.

例 3 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(-1,5)$,$B(-2,-2)$,$C(5,5)$,求其外接圆的方程.

【解析】设所求圆的方程为:$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,由题设可得方程组
$\begin{cases}-D+5E+F+26=0\\-2D-2E+F+8=0\\5D+5E+F+50=0\end{cases}$,解得 $D=-4$,$E=-2$,$F=-20$,所以$\triangle ABC$ 外接圆的方程为:$x^2+y^2-4x-2y+-20=0$.

反思与体会 本题可以由三个角度来解决,其一可用几何关系,通过垂直平分线的关系确定圆心,进而解决半径问题,但需要求直线,求交点,求距离等知识,运算步骤多,涉及关系多;其二,用标准式,但在待定系数时,所列的方程组是三元二次,求解比较繁琐;选用一般式,只需待定系数,求解一个普通的三元一次方程组即可,计算简单方便.求解圆的方程时,要根据题设条件,选取适当方式和方法,以便简化运算,减少运算量.

例 4 已知方程 $x^2+y^2-2(t+3)x+2(1-4t^2)y+16t^4+9=0(t\in\mathbf{R})$表示的图形是圆.

(1)求 t 的取值范围;

(2)求其中面积最大的圆的方程;

(3)若点 $P(3,4t^2)$ 恒在所给圆内，求 t 的取值范围.

【解析】(1)已知方程可化为 $(x-t-3)^2+(y+1-4t^2)^2=(t+3)^2+(1-4t^2)^2-16t^4-9$，则 $r^2=-7t^2+6t+1>0$，$-\frac{1}{7}<t<1$，故 t 的取值范围是 $(-\frac{1}{7},1)$.

(2)$r^2=-7t^2+6t+1=-7(t-\frac{3}{7})^2+\frac{16}{7}$，当 $t=\frac{3}{7}\in(-\frac{1}{7},1)$ 时，$r_{\max}=\frac{4\sqrt{7}}{7}$，此时圆的面积最大，圆的方程为 $(x-\frac{24}{7})^2+(y+\frac{13}{49})^2=\frac{16}{7}$.

(3)当且仅当 $3^2+(4t^2)^2-2(t+3)\times3+2(1-4t^2)(4t^2)+16t^4+9<0$ 时，点 $P(3,4t^2)$ 在圆内，此时 $8t^2-6t<0$，$0<t<\frac{3}{4}$，故 t 的取值范围是 $(0,\frac{3}{4})$.

例 5　已知曲线 C：$x^2+y^2-4mx+2my+20m-20=0$.

(1)求证：不论 m 取何实数时，曲线恒过一定点；

(2)求证：当 $m\neq2$ 时，曲线 C 是一个圆，且圆心在一条定直线上；

(3)若曲线 C 与 y 轴相切，求 m 的值.

【解析】(1)曲线 C 的方程可化为 $x^2+y^2-20+m(-4x+2y+20)=0$，令 $x^2+y^2-20=0$，且 $-4x+2y+20=0$，解得 $x=4$，$y=-2$，所以，不论 m 取何实数时，曲线 C 恒过一定点 $(4,-2)$.

(2)因为曲线 C 的方程可化为 $(x-2m)^2+(y+m)^2=5(m-2)^2$，当 $m\neq2$ 时，$(m-2)^2>0$，所以，曲线 C 是一个圆，设圆心坐标为 $C(x,y)$，则 $\begin{cases}x=2m\\y=-m\end{cases}$，消去 m 得 $x+2y=0$，所以，该圆圆心恒在直线 $x+2y=0$ 上.

(3)若曲线 C 与 y 轴相切，则曲线 C 为圆，由 $m\neq2$，得半径 $r=\sqrt{5(m-2)^2}=\sqrt{5}|m-2|$，$\sqrt{5}|m-2|=|2m|$，解得 $m=10+4\sqrt{5}$ 或 $m=10-4\sqrt{5}$.

反思与体会　此两题是对圆的方程一般式的解读与应用，注意内涵与形式的统一，并加以灵活运用.

例 6　已知圆 C：$x^2+(y-1)^2=1$，$P(x,y)$ 为圆上任意一点.

(1)求 $t=2x+y$ 的取值范围；

(2)若不等式 $x-y+m\geqslant 0$ 恒成立,求实数 m 的取值范围.

【解析】(1)法一:转化为直线 $2x+y-t=0$ 与圆 $C:x^2+(y-1)^2=1$ 有公共点,从而圆心到直线的距离满足 $d=\frac{|1-t|}{\sqrt{5}}\leqslant 1$,解得 $1-\sqrt{5}\leqslant t\leqslant 1+\sqrt{5}$,即 $t=2x+y$ 的取值范围是$[1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}]$.

法二:用圆的方程的参数式$\begin{cases}x=\cos\theta\\y=1+\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),则 $t=2x+y=\sin\theta+2\cos\theta+1=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)+1$,其中$\begin{cases}\sin\varphi=\frac{2\sqrt{5}}{5}\\\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$,进而得到 $1-\sqrt{5}\leqslant t\leqslant 1+\sqrt{5}$,即 $t=2x+y$ 的取值范围是$[1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}]$.

(2)用圆的方程的参数式$\begin{cases}x=\cos\theta\\y=1+\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),由 $x-y+m\geqslant 0$ 恒成立,等价转化为 $\cos\theta-1-\sin\theta+m\geqslant 0$ 恒成立,因此,$m\geqslant\sin\theta-\cos\theta+1$ 恒成立,即 $m\geqslant\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})+1$,从而 $m\geqslant\sqrt{2}+1$,所以,实数 m 的取值范围是$[\sqrt{2}+1,+\infty)$.

反思与体会 本题中取值范围问题的求解选用参数式比较方便,圆的方程的三种形式各有优势,具体应用时要根据题目特点加以选择.

1.2 与圆有关的轨迹问题

例 1 已知直角$\triangle ABC$ 的斜边为 AB,且 $A(-1,0)$,$B(3,0)$.

(1)求直角顶点 C 的轨迹方程;

(2)求直角边 BC 中点 M 的轨迹方程.

【解析】(1)法一:设顶点 $C(x,y)$,因为 $AC\perp BC$,且 A,B,C 三点不共线,所以 $x\neq 3$,$x\neq -1$,又 $k_{AC}=\frac{y}{x+1}$,$k_{BC}=\frac{y}{x-3}$,且 $k_{AC}k_{BC}=-1$,所以$\frac{y}{x+1}\cdot\frac{y}{x-3}=-1$,化简得 $x^2+y^2-2x-3=0$,因此,直角顶点 C 的轨迹方程为 $x^2+y^2-2x-3=0(x\neq 3,x\neq -1)$.

法二：同法一：$x\neq 3, x\neq -1$，由勾股定理得 $AB^2=AC^2+BC^2$，即 $(x+1)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=16$，化简可得 $x^2+y^2-2x-3=0$，因此，直角顶点 C 的轨迹方程为：$x^2+y^2-2x-3=0(x\neq 3, x\neq -1)$.

(2)设 $M(x,y)$，$C(x_0,y_0)$，因为 $B(3,0)$，则有 $x=\dfrac{x_0+3}{2}(x\neq 3, x\neq 1)$，$y=\dfrac{y_0}{2}$，于是有 $x_0=2x-3$，$y_0=2y$，由(1)知点 $C(x_0,y_0)$ 在圆 $x^2+y^2-2x-3=0(x\neq 3, x\neq -1)$ 上，将 $C(x_0,y_0)$ 代入并化简可得 $x^2+y^2-4x+3=0(x\neq 3, x\neq 1)$. 因此，直角边 BC 中点 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2-4x+3=0(x\neq 3, x\neq 1)$.

例 2　等腰三角形的顶点是 $A(4,2)$，底边一个端点是 $B(3,5)$，求另一个端点 C 的轨迹方程，并说明它的轨迹是何种曲线.

【解析】设另一端点 C 的坐标为 (x,y)，依题意有 $|AC|=|AB|$，结合两点间距离公式并化简可得 $(x-4)^2+(y-2)^2=10$，这是以 $A(4,2)$ 为圆心，以 $\sqrt{10}$ 为半径的圆，又因为 A,B,C 三点不共线，且三点不重合，所以，点 C 不能为 $(3,5)$，也不能为 $(5,-1)$，故端点 C 的轨迹方程为 $(x-4)^2+(y-2)^2=10$，除去点 $(3,5)$ 和点 $(5,-1)$；它的轨迹是以 $A(4,2)$ 为圆心，以 $\sqrt{10}$ 为半径的圆，除去两点 $(3,5)$ 和 $(5,-1)$.

例 3　求点 $P(4,-2)$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 上任意一点连线的中点的轨迹方程.

【解析】设圆上任意一点为 $Q(x_0,y_0)$，PQ 中点为 $M(x,y)$，则 $\begin{cases}x=\dfrac{x_0+4}{2}\\ y=\dfrac{y_0-2}{2}\end{cases}$，整理得 $\begin{cases}x_0=2x-4\\ y_0=2y+2\end{cases}$，代入 $x^2+y^2=4$，得 $(2x-4)^2+(2y+2)^2=4$，化简得 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$，故所求中点的轨迹方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$.

例 4　已知圆 $O: x^2+y^2=4$ 上一定点 $A(2,0)$，点 $B(1,1)$ 为圆内一点，P，Q 为圆上的动点.

(1)求线段 AP 中点的轨迹方程；

(2)若 $\angle PBQ=90^\circ$，求线段 PQ 中点的轨迹方程.

【解析】(1)设线段 AP 的中点为 $M(x,y)$，则 $P(2x-2,2y)$，又 P 在已知圆 O 上，所以 $(2x-2)^2+(2y)^2=4$，因此，线段 AP 中点的轨迹方程为 $(x-1)^2+y^2=1$.

(2)设线段 PQ 中点为 $N(x,y)$，由 $\angle PBQ=90°$ 可以得出 $|BN|=\frac{1}{2}|PQ|$，而由垂径定理又有 $\frac{1}{2}|PQ|=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{4-|ON|^2}$，从而 $|BN|=\sqrt{4-|ON|^2}$，$|BN|^2+|ON|^2=4$，所以 $(x-1)^2+(y-1)^2+x^2+y^2=4$，整理得 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$，所以，线段 PQ 中点的轨迹方程为 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$.

反思与体会 求动点的轨迹方程就是要建立动点的坐标所满足的等量关系，并把这个方程化为最简形式.求解与圆有关的轨迹问题时，除了有解析思想的运用，也常常会有圆的相关性质与结论的运用，另外，轨迹与轨迹方程不同，前者是曲线，后者是方程，但要求轨迹往往是先求出轨迹方程再回答轨迹问题，无论求轨迹还是求轨迹方程都要考虑完备性和纯粹性.

1.3 直线与圆、圆与圆的位置关系

1.3.1 直线与圆位置关系中的两个重要结论

设点 $P(x_0,y_0)$，圆 O：$x^2+y^2=R^2(R>0)$.

结论 1 当点 $P(x_0,y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=R^2(R>0)$ 上时，$x_0x+y_0y=R^2$ 表示 P 处的切线方程.

结论 2 当点 $P(x_0,y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=R^2(R>0)$ 外时，$x_0x+y_0y=R^2$ 表示过 P 作圆的两条切线，两个切点连线所在的直线方程(可简称为切点弦直线方程).

【解析】结论 1：圆心 $O(0,0)$ 到直线 $x_0x+y_0y=R^2$ 的距离为 $d=\frac{|x_0\cdot 0+y_0\cdot 0-R^2|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{R^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$，由于 $P(x_0,y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=R^2(R>0)$ 上，故 $x_0^2+y_0^2=R^2$，从而 $d=R$，所以，直线 $x_0x+y_0y=R^2$ 与圆相切，且 $P(x_0,y_0)$ 是切点.

结论 2：设过 P 作圆 O 的两条切线之切点分别为 A，B，则 $PA\perp OA$，PB

$\perp OB$,从而,O,A,P,B,四点共圆,线段 OP 长为直径,进而该圆的方程为$(x-\frac{x_0}{2})^2+(y-\frac{y_0}{2})^2=\frac{x_0^2+y_0^2}{4}$,$A$,$B$ 为该圆与圆 O 的公共点,由 $\begin{cases}(x-\frac{x_0}{2})^2+(y-\frac{y_0}{2})^2=\frac{x_0^2+y_0^2}{4}\\ x^2+y^2=R^2\end{cases}$,得到 $x_0x+y_0y=R^2$. 所以,两圆公共弦 AB 所在直线的方程为 $x_0x+y_0y=R^2$,即过 P 作圆的两条切线,两个切点连线所在的直线方程(可简称为切点弦直线方程)为 $x_0x+y_0y=R^2$.

引申 将圆的方程变为$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2(R>0)$,则上面相应的形式为$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2$.

例 1 过点(3,1)作圆$(x-1)^2+y^2=1$的两条切线,切点分别为 A,B,求直线 AB 的方程.

【解析】由上面结论可知,直线 AB 的方程满足$(3-1)(x-1)+1\cdot y=1$,化简得 $2x+y-3=0$.

例 2 已知点 $M(a,b)$在圆 $O:x^2+y^2=1$ 外,则直线 $ax+by=1$ 与圆的位置关系为(　　)

A. 相交　　B. 相切　　C. 相离　　D. 不确定

【解析】法一:求圆心到直线的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$,然后由 $a^2+b^2>1$ 得到 d 与半径的大小关系为 d 小于半径,从而选择 A.

法二:由上面结论可知,直线 $ax+by=1$ 表示切点弦所在直线方程,故该直线与圆相交,因此选择 A.

例 3 已知圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=2$,点 $P(2,-1)$,过点 P 作圆 C 的切线,切点分别为 A,B,则(1)直线 AB 的方程为________;(2)弦长 $AB=$________.

【解析】(1)由上面结论有 $AB:(2-1)(x-1)+(-1-2)(y-2)=2$,化简得 $AB:x-3y+3=0$.

(2)圆心(1,2)到直线 $AB:x-3y+3=0$ 的距离为 $d=\frac{|1-3\times2+3|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{2}{\sqrt{10}}$,所以$|AB|=2\sqrt{2-(\frac{2}{\sqrt{10}})^2}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

反思与体会 这三个问题都是填空题，作为填空题，不需要解题过程，只需填对答案，故可由上面结论进行判断.

1.3.2 直线与圆的位置关系

直线与圆的位置关系有三种：相离、相切和相交，判断直线与圆的位置关系问题可以将直线与圆的方程联立，通过判别式的作用完成，也可以通过圆心到直线的距离与半径的大小关系来解决，还可以通过直线所过定点与圆的位置关系进行判断.

例 1 已知直线 l：$2mx-y-8m-3=0$ 和圆 C：$(x-3)^2+(y+6)^2=25$.

(1)求证：不论 m 取什么实数，直线 l 与圆 C 总相交；

(2)求直线 l 被圆 C 截得的线段最短时直线的方程.

【解析】法一：将直线 l 的方程与圆 C 的方程联立，得到 $(4m^2+1)x^2+2(-16m^2+6m-3)x+(64m^2-48m-7)=0$，由于 $\Delta=16(24m^2+3m+4)>0$ 恒成立，所以，不论 m 取什么实数，直线 l 与圆 C 总相交.

法二：将直线 l：$2mx-y-8m-3=0$ 重新整理可得 l：$2m(x-4)-y-3=0$，显然$\begin{cases}x=4\\y=-3\end{cases}$恒满足方程，得出直线 l 恒过定点 $P(4,-3)$. 而由 $(4-3)^2+(-3+6)^2<25$ 知 $P(4,-3)$ 在圆内，故不论 m 取什么实数，直线 l 与圆 C 总有相交.

(2)当直线 l 与 PC 垂直时，圆心到直线 l 的距离最大且为线段 PC 的长，此时弦长最短，从而，由 $2m\cdot k_{PC}=-1$，得到 $2m\cdot 3=-1$，$m=-\frac{1}{6}$，所以，直线 l 被圆 C 截得的线段最短时直线的方程为：$x+3y+5=0$.

例 2 在直角坐标系中，已知点 $Q(3,0)$ 和圆 O：$x^2+y^2=1$，动点 M 到圆 O 的切线长与 $|MQ|$ 的比等于常数 $\lambda(\lambda>0)$，求动点 M 的轨迹方程，并说明它表示什么曲线.

【解析】设 $M(x,y)$，则 M 到圆 O 的切线长为 $\sqrt{x^2+y^2-1}$，而 $|MQ|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$，由题意可得 $\frac{x^2+y^2-1}{(x-3)^2+y^2}=\lambda^2$，即 $(\lambda^2-1)x^2+(\lambda^2-1)y^2-6\lambda^2x+1+9\lambda^2=0$，此方程即为 M 点的轨迹方程. 当 $\lambda=1$ 时，M 点的轨迹方程为 $x=\frac{5}{3}$，它表示垂直于 x 轴且与 x 轴交于点 $(\frac{5}{3},0)$ 的直线；当 $\lambda\neq1$ 时，x^2+

$y^2-\frac{6\lambda^2}{\lambda^2-1}x+\frac{1+9\lambda^2}{\lambda^2-1}=0$，$D^2+E^2-4F=(\frac{6\lambda^2}{\lambda^2-1})^2-4(\frac{1+9\lambda^2}{\lambda^2-1})=\frac{32\lambda^2+4}{(\lambda^2-1)^2}>0$，动点 M 的轨迹是以$(\frac{3\lambda^2}{\lambda^2-1},0)$为圆心，以$\frac{\sqrt{8\lambda^2+1}}{|\lambda^2-1|}$为半径的圆.

例 3　设圆 C：$(x-3)^2+(y+5)^2=r^2(r>0)$上有且仅有两点到直线 $4x-3y-2=0$ 的距离等于 1，则圆半径的取值范围是(　　)

A. $\{r|3<r<5\}$　　　　B. $\{r|4<r<6\}$

C. $\{r|r>4\}$　　　　D. $\{r|r>5\}$

【解析】圆心$(3,-5)$到直线 $4x-3y-2=0$ 的距离 $d=\frac{|12+15-2|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5$，由于圆上有且仅有两个点到直线 $4x-3y-2=0$ 的距离等于 1，所以 $4<r<6$，从而本题选 B.

例 4　圆 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 上到直线 $x+y+1=0$ 的距离为$\sqrt{2}$的点共有(　　)

A. 1 个　　　　B. 2 个

C. 3 个　　　　D. 4 个

【解析】圆的方程可化为$(x+1)^2+(y+2)^2=8$，圆心 $P(-1,-2)$，半径 $r=2\sqrt{2}$，易求圆心到直线的距离为 $d=\sqrt{2}$，所以，满足要求的点共有三个，从而本题选 C.

变式　将直线方程改为 $x+y+c=0$ 的形式，试分别求出满足下列条件的实数 c 的取值范围.

(1)圆上有且仅有一个点到直线距离为$\sqrt{2}$；(2)圆上有且仅有两个点到直线距离为$\sqrt{2}$；(3)圆上有且仅有三个点到直线距离为$\sqrt{2}$；(4)圆上有且仅有四个点到直线距离为$\sqrt{2}$.

【解析】圆心 $P(-1,-2)$到直线 $x+y+c=0$ 的距离为 $d=\frac{|-1-2+c|}{\sqrt{2}}=\frac{|c-3|}{\sqrt{2}}$，(1)$d=\frac{|c-3|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，所以，$c=7$ 或 $c=-1$时符合要求；(2)$\sqrt{2}<d=\frac{|c-3|}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}$，所以，$-1<c<1$ 或 $5<c<7$ 时符合要求；(3)$d=\frac{|c-3|}{\sqrt{2}}=$

$\sqrt{2}$,所以,$c=5$ 或 $c=1$ 时符合要求;(4)$d=\frac{|c-3|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}$,所以,$1<c<5$ 时符合要求.

例 5 (1)若过点 $A(4,0)$ 的直线 l 与圆 $(x-2)^2+y^2=1$ 有公共点,则直线 l 的斜率的取值范围是( )

A. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　B. $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

C. $[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}]$　　D. $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$

(2)当曲线 $y=1+\sqrt{4-x^2}$ 与直线 $y=k(x-2)+4$ 有两个相异交点时,实数 k 的取值范围是( )

A. $(\frac{5}{12},+\infty)$　　B. $(\frac{5}{12},\frac{3}{4}]$

C. $(0,\frac{5}{12})$　　D. $(\frac{1}{3},\frac{3}{4}]$

(3)若圆 O_1:$x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上至少有三个不同点到直线 l:$ax+by=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$,则直线 l 的倾斜角的取值范围是( )

A. $[0,\frac{\pi}{2}]$　　B. $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$

C. $[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}]$　　D. $[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$

【解析】(1)设直线方程为 $y=k(x-4)$,即 $kx-y-4k=0$,直线与圆有公共点,则圆心到直线的距离 $d=\frac{|2k-4k|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant 1$,解得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,因此答案为 C.(本题也可以画出图形,判断出斜率 k 的最大值和最小值分别为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,$-\frac{\sqrt{3}}{3}$)

(2)曲线 $y=1+\sqrt{4-x^2}$ 是以(0,1)为圆心,以 2 为半径的上半圆,直线 $y=k(x-2)+4$ 恒过定点 $P(2,4)$,设切线 PC 的斜率为 k,由圆心(0,1)到直线 PC 的距离等于半径 2,即 $d=\frac{|1+2k-4|}{\sqrt{1+k^2}}=2$,得 $k=\frac{5}{12}$. 设 $A(-2,1)$ 又直线 PA 的斜率为 $k_{AP}=\frac{3}{4}$,所以实数 k 的取值范围是 $\frac{5}{12}<k\leqslant\frac{3}{4}$,因此答案为 B.