DAXUE WULI JINGSAI DAODU

大学物理竞赛导读

籍远明　丁 霞　闫鹏飞　编

化学工业出版社

大学物理竞赛导读

籍远明　丁　霞　闫鹏飞　编

化学工业出版社
·北京·

本书根据教育部高等学校物理基础课程教学指导委员会编制的“理工科大学物理课程教学基本要求”，结合作者所在学校办学方向、专业特色和长期开展的大学物理竞赛实践经验编写而成。本书编写过程力争体现学生知识创新意识培养，科技创新能力的开发。全书共九章，包括质点力学、刚体力学、振动与波动、热学、静电场、磁场和电磁感应、光学、相对论和量子物理等内容。

本书可以作为理、工、农、医等高等院校本科大学物理课程教学的学习指导书，相关专业学生的考研复习资料，也可供有关师生及科技人员参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理竞赛导读/籍远明，丁霞，闫鹏飞编．—北京：化学工业出版社，2018.11
ISBN 978-7-122-33178-6

Ⅰ．①大… Ⅱ．①籍…②丁…③闫… Ⅲ．①物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ．①O4

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第237528号

责任编辑：郝英华 尉迟梦迪　　装帧设计：关 飞
责任校对：宋 夏

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号 邮政编码100011）
印　　装：三河市延风印装有限公司
787mm×1092mm 1/16 印张$11\frac{3}{4}$ 字数291千字 2019年1月北京第1版第1次印刷

购书咨询：010-64518888 售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：48.00元　

前言

大学物理是高等学校理工科大学生的一门必修课程，它不仅是大学生进一步学习其它专业课的基础，而且能提高学生自觉应用物理规律，发现、分析和解决实际中问题的能力，更具有培养学生的创新思维和科学研究能力的作用。

为适应日新月异科技创新和大学物理教学改革，我们根据所在学校办学方向、专业特色，结合长期开展的大学物理竞赛教学研究和实践经验编写出版了本书。全书共九章，包括质点力学、刚体力学、振动与波动、热学、静电场、磁场和电磁感应、光学、相对论和量子物理等内容，每章分为主要内容、解题指导、典型例题、习题四个部分，其中习题类型包括选择题、填空题和计算题。书后附有习题参考答案与解析。书中首先阐述各章基本知识内容，其次讲解如何运用这些知识点分析解决问题的思路和方法，然后给出大量练习题供学生学习训练，所选题目既具有覆盖知识点广泛的特点，又有相当水平难度，有利于帮助大学生对大学物理课程内容的深入理解和知识拓展。

本书的第一、二、三、四章及对应答案部分由籍远明编写，第五、六、七章及对应答案部分由丁霞编写，第八、九章及对应答案由闫鹏飞编写，全书由籍远明负责组织筹划与统稿工作。本书在编写过程中，作者参考了国内多部大学物理学教材和教学参考资料，在此向所有给予启迪、提供素材的作者表示谢意！

由于作者水平有限，书中不当之处在所难免，欢迎广大读者批评指正。

目录

第一章　质点力学 …………………… 1

一、主要内容 …………………… 1
二、解题指导 …………………… 5
三、典型例题 …………………… 5
四、习题 …………………… 11

第二章　刚体力学 …………………… 22

一、主要内容 …………………… 22
二、解题指导 …………………… 23
三、典型例题 …………………… 24
四、习题 …………………… 27

第三章　振动与波动 …………………… 31

一、主要内容 …………………… 31
二、解题指导 …………………… 34
三、典型例题 …………………… 35
四、习题 …………………… 37

第四章　热学 …………………… 42

一、主要内容 …………………… 42
二、解题指导 …………………… 46
三、典型例题 …………………… 46
四、习题 …………………… 50

第五章　静电场 …………………… 56

一、主要内容 …………………… 56
二、解题指导 …………………… 60
三、典型例题 …………………… 61
四、习题 …………………… 68

第六章　磁场和电磁感应 …………………… 79

一、主要内容 …………………… 79
二、解题指导 …………………… 81
三、典型例题 …………………… 82
四、习题 …………………… 85

第七章　光学 …………………… 91

一、主要内容 …………………… 91
二、解题指导 …………………… 94
三、典型例题 …………………… 95
四、习题 …………………… 97

第八章　相对论 …………………… 102

一、主要内容 …………………… 102
二、解题指导 …………………… 103
三、典型例题 …………………… 104
四、习题 …………………… 105

第九章　量子物理 …………………… 108

一、主要内容 …………………………… 108
二、解题指导 …………………………… 110
三、典型例题 …………………………… 110
四、习题 ………………………………… 113

参考答案与分析 …………………… 115

参考文献 …………………………………… 182

第一章
质点力学

一、主要内容

1. 参考系和坐标系

为了描述物体的运动而选的标准物称为参考系，参考系的选择是任意的。为了定量地描述质点的运动，在参考系上还需要建立一个坐标系，坐标系有直角坐标系、自然坐标系、平面极坐标系、球坐标系等。物体的运动状态完全由参考系选取决定，与坐标系的选取无关。

2. 运动方程和轨迹方程

质点位置随时间的变化规律称为运动方程，即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$。若已知质点的运动方程，将其中的时间消去便可得到轨迹方程：$f(x,y,z)=0$。

3. 描述质点运动的基本物理量

（1）位矢：从坐标原点指向某时刻质点所在位置的有向线段。在直角坐标系中，位矢表示为：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

（2）位移：从质点的初位置指向末位置的有向线段，它描述质点在某段时间内位置的变化：$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$，在直角坐标系中，位移矢量可表示为：

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$

（3）速度：描述质点运动快慢和运动方向的物理量，速度大小称为速率。

平均速度：
$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

瞬时速度：
$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

在直角坐标系中，速度可以表示为：

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

在自然坐标系中，速度可以表示为：

$$\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_t=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$$

（4）加速度：反映质点速度随时间变化的物理量。

平均加速度：
$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

瞬时加速度：
$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在直角坐标系中，加速度可以表示为：

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}$$

在自然坐标系中，加速度可以表示为：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_t+\boldsymbol{a}_n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t+\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$$

式中的切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$ 反映了速度大小的变化引起的加速度，法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$ 反映了速度方向的变化引起的加速度。

（5）特别提示：

① 不要将位移大小与位矢大小的增量混淆，即：

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|,\quad |\Delta r|=|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_1|,\text{一般情况下}|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r$$

② 速度是位矢的时间变化率，不是位移的时间变化率。

③ 一般情况下，位移大小不等于路程，即 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$，所以平均速度的大小不等于平均速率，即 $|\overline{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$。

4. 圆周运动

（1）角坐标：某时刻质点和坐标原点的连线与参考轴的夹角 θ 称为角坐标，质点在运动时，角坐标随时间变化，可表示为：

$$\theta=\theta(t)$$

（2）角位移：角坐标在 Δt 时间内的变化量，$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$。

（3）角速度：$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{v}{R}$。

（4）角加速度：$\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$。

（5）线量与角量的关系：

$$\Delta S=R\Delta\theta,\quad v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=R\omega$$

切向加速度
$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=R\alpha\text{（沿切线方向）}$$

法向加速度
$$a_n=\frac{v^2}{R}=R\omega^2\text{（指向圆心）}$$

$$\boldsymbol{a}=a_n\boldsymbol{e}_n+a_t\boldsymbol{e}_t$$

5. 相对运动

位置变化
$$\boldsymbol{r}_{AC}=\boldsymbol{r}_{AB}+\boldsymbol{r}_{BC}$$

位移变化 $\Delta \boldsymbol{r}_{AC}=\Delta \boldsymbol{r}_{AB}+\Delta \boldsymbol{r}_{BC}$

速度变化 $\boldsymbol{v}_{AC}=\boldsymbol{v}_{AB}+\boldsymbol{v}_{BC}$

加速度变化 $\boldsymbol{a}_{AC}=\boldsymbol{a}_{AB}+\boldsymbol{a}_{BC}$ （该式只适用于两个参考系之间做平动情形）

6. 几种典型运动规律

（1）匀变速直线运动

$$v=v_0+at$$

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$v^2-v_0^2=2a(x-x_0)$$

（2）匀变速圆周运动

$$\omega=\omega_0+\alpha t$$

$$\theta=\theta_0+\omega_0t+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2-\omega_0^2=2\alpha(\theta-\theta_0)$$

（3）斜抛运动

$$a_x=0, a_y=-g$$

$$v_x=v_0\cos\theta, v_y=v_0\sin\theta-gt$$

$$x=v_0t\cos\theta, y=v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2$$

$$y=x\tan\theta-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

射程：$x=\dfrac{v_0^2}{g}\sin2\theta$， 射高：$y=\dfrac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta$

7. 牛顿定律

（1）牛顿第一定律：任何物体都要其保持静止或沿直线匀速运动状态，直到外力迫使它改变运动状态为止。

（2）牛顿第二定律：动量为 $\boldsymbol{p}$ 的物体，在合外力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下，其动量随时间的变化率等于作用于物体的合外力，即

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t}$$

当质量 m 为常量时，有 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$

直角坐标系中有： $F_x=ma_x, F_y=ma_y, F_z=ma_z$

自然坐标系中有： $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}=m\boldsymbol{a}_\mathrm{t}=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$， $\boldsymbol{F}_n=m\boldsymbol{a}_\mathrm{n}=m\dfrac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$

（3）牛顿第三定律：两个物体之间的作用力和反作用力，沿同一直线，大小相等，方向相反，分别作用在两个物体上。

8. 非惯性系和惯性力

相对惯性系作加速运动的参考系是非惯性系，牛顿定律只适用于惯性系，不适用于非惯性系，但有时需要考察相对非惯性的运动，牛顿第二定律可表示为：

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_\mathrm{i}=m\boldsymbol{a}$$

式中，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}=-m\boldsymbol{a}_0$ 称为惯性力；$\boldsymbol{a}_0$ 为非惯性系相对于惯性系的加速度；$\boldsymbol{a}$ 为物体相对非惯性系的加速度；$\boldsymbol{F}$ 为物体所受到的除惯性力以外的合外力。惯性力是非惯性系中考察物体运动的动力学规律时引入的，它和我们常见的重力、弹力、摩擦力等力的不同在于，它不是物体之间的真实相互作用，无施力物体，也无反作用力，是虚拟力。

9. 动量定理和动量守恒定律

（1）质点动量定理：作用于质点的合外力的冲量，等于质点动量的增量。

$$\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}t=m\boldsymbol{v}_2-m\boldsymbol{v}_1$$

在直角坐标系中，

$$\int_{t_1}^{t_2}F_x\cdot\mathrm{d}t=mv_{2x}-mv_{1x},\quad \int_{t_1}^{t_2}F_y\cdot\mathrm{d}t=mv_{2y}-mv_{1y},\quad \int_{t_1}^{t_2}F_z\cdot\mathrm{d}t=mv_{2z}-mv_{1z}$$

（2）质点系动量定理：作用于质点系的合外力的冲量，等于质点系动量的增量。

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}t=\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0$$

式中，$\boldsymbol{p}_0=\sum_{i=1}^{n}m_iv_{i0}$ 为系统初动量；$\boldsymbol{p}=\sum_{i=1}^{n}m_iv_i$ 为系统末动量。

（3）动量守恒定律：当系统所受合外力为零时，系统的总动量将保持不变。

10. 碰撞

（1）完全弹性碰撞：碰撞前后总动能保持不变。

（2）完全非弹性碰撞：碰撞后两物体连在一起，以相同的速度运动。

11. 功能原理和机械能守恒

（1）功是作用于质点上的力与质点沿力的方向所发生的位移之标积，它是描述力对空间的累积效果的物理量。

$$W=\int_a^b\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

（2）动能定理

质点动能定理：合外力对质点所做的功，等于质点动能的增量。$W=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$

质点系动能定理：作用于质点系的力所做的功，等于该质点系动能的增量。

$$W=E_{\mathrm{k2}}-E_{\mathrm{k1}}$$

（3）保守力和势能

保守力：力所做的功只与物体的始末位置有关，与物体所经具体路径没有关系，这种力称为保守力，如重力、万有引力、弹性力等。

势能：质点系中与物体之间的位置有关的能量，常见的势能如下。

重力势能：$E_{\mathrm{p}}=mgh$（势能零点取在某一水平面上）。

万有引力势能：$E_{\mathrm{p}}=-G\frac{m_1m_2}{r}$（势能零点取在无限远处）。

弹性势能：$E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^2$（势能零点取在弹簧原长处）。

保守力做功与势能关系：$W=-\Delta E_{\mathrm{p}}=-(E_{\mathrm{p}}-E_{\mathrm{p0}})$

(4) 功能原理：质点系的机械能的增量等于外力与非保守内力做功之和，即

$$W_{外}+W_{非保内}=E-E_0$$

(5) 机械能守恒定律：当作用于质点系的外力和非保守内力不做功时，质点系的总机械能是守恒的。

$$E_{k2}+E_{p2}=E_{k1}+E_{p1}$$

12. 质心和质心运动定律

(1) 质心
$$\boldsymbol{r}_C=\frac{\sum m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum m_i}$$

直角坐标系中

$$x_C=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},\quad y_C=\frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i},\quad z_C=\frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

(2) 质心运动定律：作用在系统上的合外力等于系统的总质量乘以系统质心的加速度，即
$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}_C$$

二、解题指导

(1) 质点运动学的问题主要分为两个基本类型，一是由运动学方程求解质点的速度、加速度等；二是由质点加速度或速度，再加上初始条件，求解运动方程等，前者使用高等数学求导，后者可使用积分方法解决。

(2) 牛顿第二定律只适用于质点，只处理瞬时问题，如果用于质点系，需要用隔离法将系统内力转化为外力，列方程组求解，动量定理、动量守恒定律、动能定理可以直接应用于体系，只需知道始、末状态，不涉及过程细节，往往使问题简化。

(3) 动量定理、动能定理、功能原理、动量守恒以及机械能守恒定律在惯性系中成立。

三、典型例题

【例 1-1】 如图 1-1 所示，小球从竖直平面的 O 点斜向上方抛出，抛射角为 θ，速度大小为 v_0，在此竖直平面内作 OP 射线与小球抛射方向垂直，小球到达 OP 射线时的速度分解为图中与 OP 射线垂直方向的分量 $v_{\perp}$ 和沿 OP 射线方向的分量 $v_{/\!/}$，分别计算它们的数值大小。

解： 本题主要考察质点运动学的斜抛知识点，将小球沿 x 轴和 y 轴的运动分解两个加速度分别为 $a_x=g\cos\theta$ 和 $a_y=g\sin\theta$ 即可。

选择 OP 为 x 轴，垂直 OP 方向斜向下方为 y 轴，将重力加速度沿 x 轴和 y 轴分解为 a_x 和 a_y，则

$$a_x=g\cos\theta \tag{1-1}$$

$$a_y=g\sin\theta \tag{1-2}$$

由式(1-1) 和式(1-2)，小球沿 x 轴和 y 轴的运动分别为匀加速直线运动，根据匀加速直线运动规律，得

$$v_{/\!/}=0+a_x t \tag{1-3}$$

$$v_{\perp}=-v_0+a_y t \tag{1-4}$$

$$2a_y \cdot 0=v_{\perp}^2-(-v_0)^2 \tag{1-5}$$

将式(1-1)～式(1-5) 方程联立求解，得：

$$v_{\perp}=v_0; \quad v_{/\!/}=2v_0\cot\theta$$

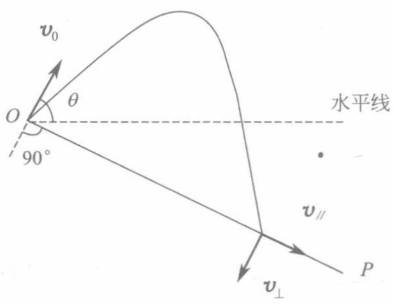

图 1-1

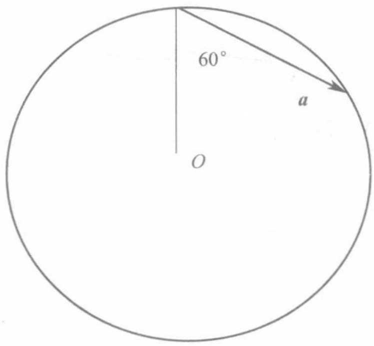

图 1-2

【例 1-2】 如图 1-2 所示，某飞轮绕固定轴 O 轴转动，在运动过程中，其轮缘上任一点的加速度与轮半径的夹角恒为 60°，当运动开始时，其转角 θ 等于零，角速度为 ω_0，求：(1) 飞轮角速度 ω 与 t 的关系；(2) ω 与 θ 的关系；(3) 飞轮的转动方程。

解： 由题设，飞轮作变速圆周运动，$a_{\mathrm{t}}=R\alpha$，$a_{\mathrm{n}}=R\omega^2$，利用积分运算可求出对应关系。

(1) 由题意得

$$\frac{a_{\mathrm{t}}}{a_{\mathrm{n}}}=\tan 60°=\sqrt{3}, \quad \frac{R\alpha}{R\omega^2}=\sqrt{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\omega^2}=\sqrt{3}, \quad \int_{\omega_0}^{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2}=\int_0^t\sqrt{3}\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{\omega_0}-\frac{1}{\omega}=\sqrt{3}\,t, \quad \omega=\frac{\omega_0}{1-\sqrt{3}\,\omega_0 t}$$

(2)
$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

而
$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\omega^2}=\sqrt{3}, \quad \omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{1}{\omega^2}=\sqrt{3}, \quad \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}=\sqrt{3}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}=\int_0^{\theta}\sqrt{3}\,\mathrm{d}\theta, \quad \omega=\omega_0\mathrm{e}^{\sqrt{3}\theta}$$

(3) 因为 $\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\omega_0}{1-\sqrt{3}\,\omega_0 t}$

$$\int_0^{\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^t\frac{\omega_0}{1-\sqrt{3}\,\omega_0 t}\mathrm{d}t, \quad \theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\frac{1}{1-\sqrt{3}\,\omega_0 t}$$

【例 1-3】 在一车厢内，有如图 1-3 所示的水平桌面，质量分别为 m_{A} 和 m_{B} 的物体 A 和 B，轻绳和滑轮的质量忽略不计。(1) 设系统处处无摩擦，车厢具有向上的匀加速度 a_0，求物体 B 相对于车厢竖直向下的加速度。(2) 设 B 与水平桌面侧面间的摩擦因数 $\mu\geqslant m_{\mathrm{A}}/m_{\mathrm{B}}$，系统其余部分均无摩擦，今使车厢具有水平向右的匀加速度 a_0，当 a_0 取值范围为多少时，能

使物体 B 相对车厢不动?

解：首先对物体 A 和 B 进行受力分析，然后运用牛顿定律列方程，即可解决第一个问题，在此基础上，需要应用物体作相对运动时的加速度变化式 $a_{AC}=a_{AB}+a_{BC}$，分别讨论物体 A 和 B 向上、向下运动，得出物体 B 相对车厢不动的加速度范围。

(1) 如图 1-4 所示分别为物体 A 和 B 的受力图，由牛顿第二定律可得

A：$T=m_A a$

B：$T-m_B g=m_B(a_0-a)$

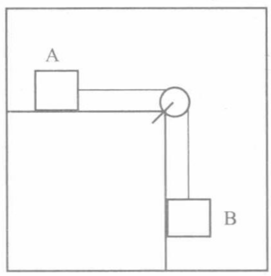

图 1-3

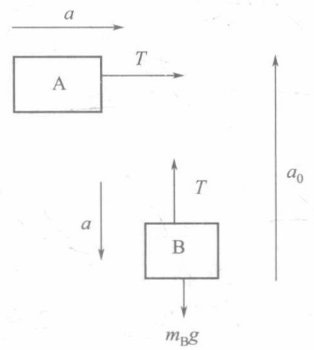

图 1-4

由以上两式可得，

$$T=\frac{m_B}{m_A+m_B}(a_0+g)$$

(2) 若物体 A 和 B 向下运动，画出物体 A 和 B 的受力图 1-5，由牛顿第二定律可得

$$T=m_A(a+a_0)$$
$$m_B g-T-f=m_B a$$
$$F=m_B a_0$$
$$f=F\mu$$

由以上四式可得，

$$a=\frac{m_B g-(m_A+m_B\mu)a_0}{m_A+m_B}$$

要使物体 B 不向下运动，则 $a\leqslant 0$，可推出：

$$a_0\geqslant\frac{m_B g}{m_A+m_B\mu}$$

若物体 A 和 B 向上运动，画出物体 A 和 B 的受力图 1-6，由牛顿第二定律可得

A：$T=m_A(a-a_0)$

B：$T-m_B g-f=m_B a$

$$F=m_B a_0$$
$$f=F\mu$$

由以上四式可得

$$a=\frac{(m_A-m_B\mu)a_0-m_B g}{m_A+m_B}$$

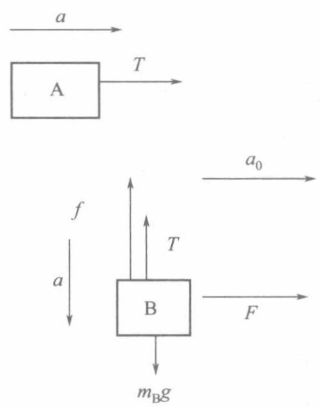

图 1-5

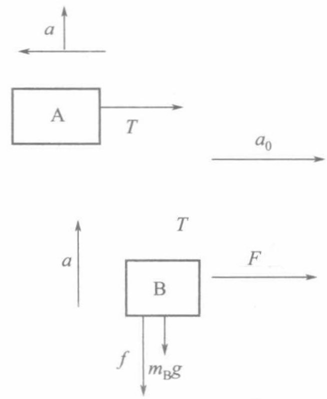

图 1-6

依题意，有

$$\mu m_{\mathrm{B}} \geqslant m_{\mathrm{A}}$$

则 $a \leqslant 0$，说明物体不可能向上运动。

综上所述，可得物体 B 相对车厢不动的 a_0 取值范围为

$$a_0 \geqslant \frac{m_{\mathrm{B}} g}{m_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}} \mu}$$

【例 1-4】 如图 1-7 所示，一长度为 $L=4.8\mathrm{m}$ 的轻车厢静止于光滑水平轨道上，固定于车厢地板上的击发器 A，自车厢中部以 $u_0 = 2\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 的速度，将质量为 $m_1 = 1\mathrm{kg}$ 的物体沿车厢内光滑地板弹出，与另一质量为 $m_2 = 1\mathrm{kg}$ 的物体碰撞并粘在一起，此时，m_2 恰好与一端固定于车厢的水平放置的轻弹簧接触，弹簧的劲度系数 $k = 400\mathrm{N \cdot m^{-1}}$，长度 $l = 0.3\mathrm{m}$，车厢和击发器的总质量 $M = 2\mathrm{kg}$，求车厢自静止至弹簧压缩最大时的位移（不计空气阻力）。

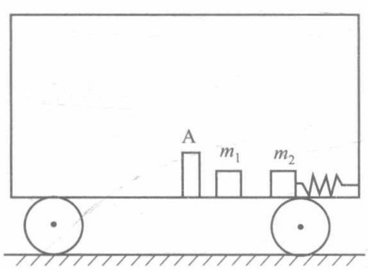

图 1-7

解： 本题为一综合性问题，主要涉及的知识点为动量守恒、机械能守恒和质点的相对运动三个方面。

设击发器 A 在击发完毕的一瞬间，质量为 m_1 的物体相对于地面的速度为 u_0，车厢相对于地面的速度为 V，质量为 m_2 的物体相对于地面静止。选择车厢、m_1 和 m_2 为一系统，其水平方向所受合力为零，动量守恒，取向右方向动量为正，则

$$m_1 u_0 - MV = 0$$

$$V = \frac{m_1}{M} u_0 \tag{1-6}$$

选择 m_1 和 m_2 为一系统，设在 m_1 和 m_2 碰撞粘在一起的一瞬间，二者相对于地面的速度为 u，由动量守恒得

$$m_1 u_0 = (m_1 + m_2) u; \quad u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_0 \tag{1-7}$$

从击发到 m_2 刚与弹簧接触的这段时间 Δt 内，车厢相对于地面速度 V 不变，除 m_1 和 m_2 碰撞这段短暂时间外，m_1 相对于地面的速度 u_0 也不变，故有

$$\frac{L}{2}-l=(V+u_0)\Delta t;\quad \Delta t=\frac{\frac{L}{2}-l}{V+u_0}$$

在 Δt 内车厢相对地面向左的位移为

$$\Delta X_1=V\Delta t=\frac{V}{V+u_0}\left(\frac{L}{2}-l\right)$$

将式(1-6)代入上式得

$$\Delta X_1=\frac{m_1}{m_1+M}\left(\frac{L}{2}-l\right) \tag{1-8}$$

弹簧压到最大时，由车厢、m_1、m_2 和弹簧这一系统的动量守恒知，系统的各部分相对于地面皆静止，在弹簧压缩的过程中，只有弹簧的弹性内力做功，故这一系统的机械能守恒，即

$$\frac{1}{2}k(\Delta l)^2=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2$$

式中，Δl 为弹簧压缩的长度。

$$\Delta l=\sqrt{\frac{MV^2+(m_1+m_2)u^2}{k}}$$

将式(1-6)、式(1-7)代入上式，得

$$\Delta l=\sqrt{\frac{M\frac{m_1^2}{M^2}u_0^2+(m_1+m_2)\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}u_0^2}{k}}=\sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m_1+m_2}\right)}m_1u_0$$

弹簧压缩过程中，车厢速度 $V(t)$ 和 m_1、m_2 的速度 $u(t)$ 都随时间变化，但车厢、m_1、m_2 和弹簧这一系统的动量守恒，故

$$(m_1+m_2)u-MV=(m_1+m_2)u(t)-MV(t)=0$$

$$\frac{u(t)}{V(t)}=\frac{u}{V}$$

将式(1-6)、式(1-7)代入上式

$$u(t)=\frac{M}{m_1+m_2}V(t)$$

在弹簧压缩的过程中，m_1 和 m_2 相对于车厢的速度 $u'(t)$ 满足下面的关系

$$u'(t)=u(t)+V(t)=\frac{M}{m_1+m_2}V(t)+V(t)=\frac{m_1+m_2+M}{m_1+m_2}V(t)$$

$$\int_0^{\Delta t'}u'(t)\mathrm{d}t=\frac{m_1+m_2+M}{m_1+m_2}\int_0^{\Delta t'}V(t)\mathrm{d}t$$

而 $\int_0^{\Delta t'}u'(t)\mathrm{d}t=\Delta l$，$\int_0^{\Delta t'}V(t)\mathrm{d}t=\Delta X_2$（$\Delta X_2$ 为车厢在 $\Delta t'$ 内向左的位移）

故 $$\Delta X_2=\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2+M}\Delta l=\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2+M}\sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m_1+m_2}\right)}m_1u_0$$

车厢向左的总位移为

$$\Delta X_1+\Delta X_2=\frac{m_1}{m_1+M}\left(\frac{L}{2}-l\right)+\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2+M}\sqrt{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{m_1+m_2}\right)}m_1u_0$$

将已知数据代入，得

$$\Delta X_1+\Delta X_2=0.75\text{m}$$

【例 1-5】 水平桌面上有一个内外半径几乎同为 R 的水平固定圆形轨道，小球 1、2 用一根长度为 R 的轻绳连接后紧挨着放在环道内，轻绳在环道外。球 1 的质量为 m，球 2 的质量为 $2m$，如图 1-8 所示，让球 1、2 同时具有方向相反、大小同为 v_0 的切向速度，在而后的运动过程中设系统处处无摩擦。

（1）设轻绳无弹性，且不可伸长，当绳伸直长度达到 R 时，绳对两球立刻有作用力，经过非常短的时间作用力即消失。假设过程中绳和环道均不损耗机械能，试求此过程中绳对球 1、2 分别提供的冲量大小。

（2）改设轻绳是自由长度为 R、劲度系数为 k 的均匀弹性绳。

① 若绳长第一次达到 $2R$ 时，球 1 速度刚好第一次降为零，试求 k 值。

② 取①问所得 k 值，已知从绳长达到 R 开始到 $2R$ 的过程中，球 1 经过的路程是球 2 经过路程的 α 倍 $(0<\alpha<1)$，将两球从图 1-8 开始运动时刻记为 $t=0$，试求两球第一次碰撞的时刻 t_e。

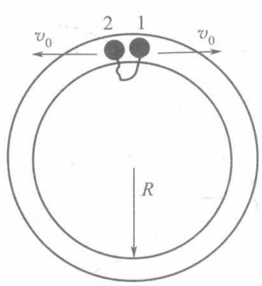

图 1-8

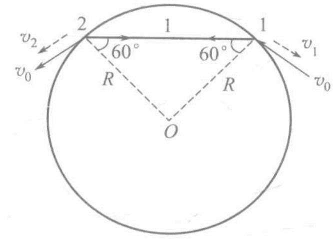

图 1-9

解： 小球 1、2 沿环道作圆周运动，满足角动量守恒，由题设绳和环道均不损耗机械能，可列出机械能守恒方程，运用动量定理可求出它们之间的冲量大小。将轻绳看成一弹簧，两球运动分为四个阶段，由角动量守恒和能量守恒，可求出所需结果。

（1）绳作用力出现和消失后瞬间，球 1、2 的速度分别如图 1-9 所示的实线箭矢和虚线箭矢。由角动量守恒和能量守恒，列出如下方程：

$$R\cdot 2mv_2-R\cdot mv_1=R\cdot 2mv_0-R\cdot mv_0$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2mv_2^2+\frac{1}{2}\cdot mv_1^2=\frac{1}{2}\cdot 2mv_0^2+\frac{1}{2}\cdot mv_0^2$$

以上二式联立求解可得

$$v_1=-\frac{5}{3}v_0,\quad v_2=-\frac{1}{3}v_0$$

速度变化过程中，绳对球 1、2 提供的冲量大小同为 I，由动量定理

$$I\cos 30^\circ=(-mv_1)-(-mv_0)=\frac{8}{3}mv_0$$

或 $$I\cos 30^\circ=(-2mv_2)-(-2mv_0)=\frac{8}{3}mv_0$$

解得

$$I=\frac{16}{3\sqrt{3}}mv_0$$

(2) ①绳长达到 R 后，出现弹性拉力，使球 1、2 沿运动反方向各自获得切向加速度，球 1 质量小，切向加速度大，速度先减小到 $v_{10}=0$，此时球 2 沿运动方向速度尚未减到零，大小记为 v_{20}，绳长达到 $2R$ 时，对 1、2 作用力无切向分量，由角动量守恒和能量守恒得

$$R\cdot 2mv_0-R\cdot mv_0=R\cdot 2mv_{20}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2mv_0^2+\frac{1}{2}\cdot mv_0^2=\frac{1}{2}\cdot 2mv_{20}^2+\frac{1}{2}\cdot k(2R-R)^2$$

以上二式联立求解可得

$$v_{20}=\frac{1}{2}v_0,\quad k=\frac{5mv_0^2}{2R^2}$$

② 将两球开始运动时刻 $t=0$ 到 $t=t_e$ 的运动过程分为四个阶段：

第 1 阶段：从 $t=0$ 开始，到绳长达到 R 为止，经历时间记为 Δt_1。

由图 1-9 所示可以看出，有

$$\Delta t_1=\frac{\frac{\pi}{3}R}{2v_0}=\frac{\pi R}{6v_0}$$

第 2 阶段：从绳长为 R 开始，到绳长为 $2R$ 为止，经历时间记为 Δt_2，此过程中球 1、2 速度大小分别记为 v_1、v_2，由角动量守恒可得

$$R\cdot 2mv_0-R\cdot mv_0=R\cdot 2mv_2-R\cdot mv_1$$

化简

$$v_0=2v_2-v_1$$

由上式可得路程关系式为

$$2\int_0^{\Delta t_2}v_2\,\mathrm{d}t-\int_0^{\Delta t_2}v_1\,\mathrm{d}t=\int_0^{\Delta t_2}v_0\,\mathrm{d}t$$

即

$$2S_2-S_1=v_0\Delta t_2 \tag{1-9}$$

由题意，

$$S_1+S_2=\frac{2}{3}\pi R \tag{1-10}$$

$$S_1=\alpha S_2 \tag{1-11}$$

将式(1-9)～式(1-11) 联立求解，得

$$\Delta t_2=\frac{2(2-\alpha)}{3(1+\alpha)}\cdot\frac{\pi R}{v_0}$$

第 3 阶段：从绳长 $2R$ 开始，到绳长又恢复到 R 为止，经历时间为 Δt_3，整个过程为第 2 阶段的逆过程，有：

$$\Delta t_3=\Delta t_2$$

第 4 阶段：从绳长降到 R 开始，到两球碰撞为止，经历时间为 Δt_4，此过程为第 1 阶段的逆过程，故有：

$$\Delta t_4=\Delta t_1$$

综上所述：

$$t_e=\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3+\Delta t_1=\frac{3-\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{\pi R}{v_0}$$

四、习题

1-1 有 A、B 两车在同一直线轨道上同向行驶，A 车以速度 v_1 匀速运动，B 车在后，