系统辨识学术专著丛书（第5分册）

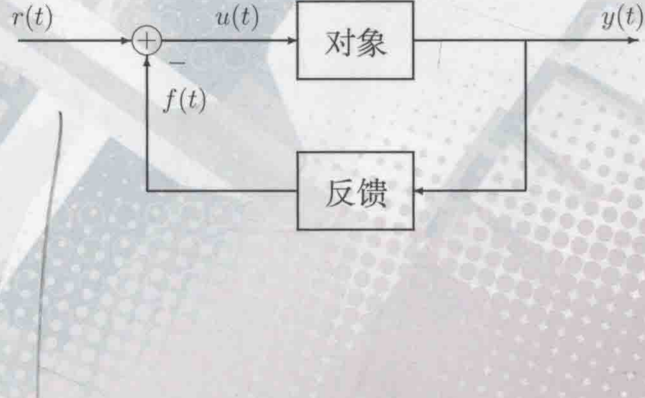
系统辨识
——迭代搜索原理与辨识方法

丁　锋◎著

$$\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}}=1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\gamma=0.577215\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right)=\ln 2=0.693147\ldots$$



科 学 出 版 社

系统辨识学术专著丛书(第5分册)

系统辨识
——迭代搜索原理与辨识方法

丁 锋 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

《系统辨识——迭代搜索原理与辨识方法》是《系统辨识学术专著丛书》的第 5 分册，是作者在清华大学、江南大学教学和科研创新经验的结晶，汇集了作者及其合作者在迭代辨识方面的一些最新研究成果.

本书介绍了线性系统、线性参数系统、输入非线性系统的迭代辨识方法，主要涉及梯度迭代辨识方法、最小二乘迭代辨识方法、多新息梯度迭代辨识方法、多新息最小二乘迭代辨识方法等. 本书不仅传授知识，而且还传授科学研究与创新的新思想和新方法. 特别是提出了一系列值得学者们深入研究的辨识课题，为进一步研究指明方向.

书中 Matlab 仿真例子源程序为初学者快速上手提供了学习蓝本. 本书可作为高等院校高年级本科生、硕士和博士研究生“系统辨识”教材及有志者攀登科学高峰的科研用书，也可供自动控制、电气自动化类及相关电类专业高校教师和科技人员选用.

图书在版编目(CIP)数据

系统辨识：迭代搜索原理与辨识方法/丁锋著. —北京：科学出版社，2018.8

(系统辨识学术专著丛书；第 5 分册)

ISBN 978-7-03-058452-6

I. ①系… II. ①丁… III. ①系统辨识-研究 IV. ①N945.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 177473 号

责任编辑：姚庆爽 / 责任校对：何艳萍
责任印制：张 伟 / 封面设计：蓝正设计

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2018 年 8 月第一次印刷 印张：27 1/2
字数：639 000

定价：165.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

作 者 简 介

丁锋，男，湖北广水人(应山县人)，清华大学博士，University of Alberta 博士后，江南大学教授、博士生导师.

教育与工作经历：

- 2004 年 10 月至今　江南大学“太湖学者”特聘教授、博士生导师、学科带头人.
- 1980 年 9 月~1988 年 8 月　湖北工业大学学士学位，湖北制药厂变配电技术员.
- 1988 年 9 月~2002 年 6 月　清华大学硕士学位、博士学位(优秀博士学位论文)、讲师、副教授，系统工程研究所副所长.
- 2002 年 7 月~2005 年 10 月　加拿大阿尔伯塔大学(University of Alberta，埃德蒙顿) 博士后、研究员.
- 2006 年 3~5 月　香港科技大学研究员.
- 2006 年 12 月~2007 年 2 月、 2008 年 5~12 月　加拿大卡尔顿大学(Carleton University，渥太华) 访问教授.
- 2009 年 1~10 月　加拿大瑞尔森大学(Ryerson University，多伦多)研究员(包括国家公派访问学者半年).

主要学术成就：

- 《系统辨识新论》. 北京：科学出版社, 2013. (65.3 万字)
- 《系统辨识——辨识方法性能分析》. 北京：科学出版社，2014. (80 万字)
- 《系统辨识——多新息辨识理论与方法》. 北京：科学出版社, 2016. (65 万字)
- 《系统辨识——辅助模型辨识思想与方法》. 北京：科学出版社，2017. (60 万字)
- 发表学术论文 512 篇, SCI 收录论文 256 篇，被 SCI 期刊引用 10000 余次, SCI 他引 7000 余次，SCI 自引 3000 余次，重要成果发表在 *Automatica*、*IEEE Transactions*、*SIAM Journals* 上.
- 44 篇 SCI 论文入选 2006~2016 年十一年期间 ESI (Essential Science Indicators) 高被引论文全球前 1%，其中第一作者 24 篇.
- 入选汤森路透(Thomson Reuters) 2014 年全球高被引科学家(工程、计算机

科学).

- 入选汤森路透 2015 年、2016 年全球高被引科学家(工程、数学).
- 入选科睿唯安(Clarivate Analytics) 2017 年全球高被引科学家(工程、数学) .
- 2 篇第一作者论文入选“2011 年中国百篇最具影响国际学术论文”.
- 1 篇第二作者论文入选“2011 年中国百篇最具影响国际学术论文”和“2014 年欧洲信号处理协会 3 篇最佳论文奖之一”.
- 1 篇第一作者论文入选“2012 年中国百篇最具影响国际学术论文”.
- 1 篇第一作者论文入选“2013 年中国百篇最具影响国际学术论文”.
- 1 篇第一作者论文入选“2014 年中国百篇最具影响国际学术论文”.
- 发表在 *IET Control Theory and Applications* 2013 年第 2 期上的论文“Gradient-based and least-squares-based iterative algorithms for Hammerstein systems using the hierarchical identification principle”获得 2015 年 *IET Journals* 的最佳论文奖“Premium (Best Paper) Awards”. 该奖是 *IET Control Theory and Applications* 每年从前两年发表论文中评选出的唯一一篇最佳论文.
- 2008 年入选江苏省“青蓝工程”中青年学术带头人培养对象(2012 年 12 月考核颁发证书).
- 2012 年 5 月被授予“无锡市有突出贡献中青年专家”称号.

作者是 Z-S 变换、鞅超收敛定理、辅助模型辨识思想、多新息辨识理论、递阶辨识原理、耦合辨识概念、滤波辨识理念等的缔造者. 作者在现代控制理论、辅助模型辨识、多新息辨识、递阶辨识、耦合辨识、迭代辨识、滤波辨识领域作出了杰出贡献, 提出了连续时间系统与离散时间系统间的 Z-S 变换、时变增益最优观测器设计方法、鲁棒观测器-控制器设计方法、连续时间系统重构方法、非均匀采样数据系统参数与状态递阶估计方法, 提出了用于时变离散时间系统递推辨识方法与自适应控制方法有界收敛性判定工具——“鞅超收敛定理”, 研究和提出了一系列辨识新方法. 作者在系统辨识方面所取得的最新研究成果代表着国际系统辨识学科的前沿之一, 尤其在 Z-S 变换、辨识新方法、辨识方法性能分析等方面所作的贡献, 具有前瞻性和开创性, 在国内外都处于领先地位.

系统辨识学术专著丛书

控制科学铸造了时代的辉煌, 高集成度计算机芯片是自动化控制科学与技术的杰作. 控制科学跨越时空的伟大成就 —— 电子设备计算能力和信息处理能力的提升、自动化设备和装备的出现、自动化电子产品的普及, 彻底改变了信息社会的生活方式, 美化了我们的生活. 在这背后, 我们不禁要问: 控制科学是什么, 控制科学的基础是什么?

控制科学就是在认识事物运动规律的基础上, 通过施加特定的、奇妙的控制作用 (控制律), 以改变事物的运动轨迹, 使其向着我们期望的方向发展. 事物的运动规律用方程描述就是数学模型. 数学模型是控制科学的基础, 在控制科学发展中起到了举足轻重的作用, 是一切自然科学的基础. 系统辨识是研究建立 (动态) 系统数学模型的理论与方法.

在系统建模、系统辨识领域, 各国科学家进行了大量的研究工作, 在理论与应用方面都取得了不少优秀成果.《系统辨识学术专著丛书》的作者在学术前辈研究成果基础上, 对系统辨识方法和辨识理论进行了长期深入的研究, 系列研究成果发表在控制领域国际权威期刊*Automatica*、*IEEE Transactions*、*SIAM Journals*、*Systems & Control Letters* 等上, 且被广泛引用, 得到国内外同行的认可和高度评价. 多年来, 作者一直在为出版 "系统辨识系列著作" 积累素材, 2013 年 1 月出版的《系统辨识新论》, 到 2013 年 7 月已销售一空, 这加速了系列著作的出版进程, 应科学出版社邀请, 拟决定出版《系统辨识学术专著丛书》.

《系统辨识学术专著丛书》初步计划出版 9 部, 各分册名称如下:

第 1 分册: 系统辨识新论

第 2 分册: 系统辨识 —— 系统辨识方法论

第 3 分册: 系统辨识 —— 辨识方法性能分析

第 4 分册: 系统辨识 —— 辅助模型辨识思想与方法

第 5 分册: 系统辨识 —— 迭代搜索原理与辨识方法

第 6 分册: 系统辨识 —— 多新息辨识理论与方法

第 7 分册: 系统辨识 —— 递阶辨识原理与方法

第 8 分册: 系统辨识 —— 耦合辨识概念与方法

第 9 分册: 系统辨识 —— 滤波辨识理念与方法

序

《系统辨识学术专著丛书》详细记载和梳理了系统辨识领域中的一些重要成果, 追溯了一些重要辨识方法产生的机理, 以及一些科学思想、科学理论的萌芽、发展、升华的历程.

《系统辨识 —— 迭代搜索原理与辨识方法》是《系统辨识学术专著丛书》的第 5 分册. 该书汇聚了作者承担多项国家自然科学基金项目的研究成果, 是国内外迭代辨识领域的第一部著作. 该书是作者在清华大学和江南大学给硕士和博士研究生开设 "系统辨识" 等相关课程基础上, 研究和提出了一系列迭代辨识方法. 反映这些理论与方法的重要研究成果都以 Regular Papers 论文形式发表在*Automatica*、*IEEE Transactions*等国际著名杂志上, 被国内外同行广泛引用, 并给予高度评价.

该书在阐述最小二乘搜索原理、梯度搜索原理、牛顿搜索原理的基础上, 针对线性系统、线性参数系统、输入非线性系统, 研究了梯度迭代辨识方法、最小二乘迭代辨识方法、辅助模型 (多新息) 梯度迭代辨识方法、辅助模型 (多新息) 最小二乘迭代辨识方法等.

上述研究成果体现了该书的学术水平及其创新点, 在国内外都处于领先位置, 出版该专著具有重要的科学意义和学术价值. 这是一部优秀的理论著作, 与国内外同类书相比, 其独特之处表现在:

第一, 该书内容新颖、原始创新性强, 如递推梯度辨识方法、多新息梯度迭代辨识方法、多新息最小二乘迭代辨识方法、多新息牛顿迭代辨识方法等都是作者首次提出的.

第二, 该书结构清晰、写作方法独特, 深入分析了递推梯度、多新息梯度迭代、多新息最小二乘迭代搜索等辨识方法产生的机理, 揭示了辨识方法间深层的性质和特征.

第三, 该书不仅传授知识, 而且传授科学研究与创新的新思想和新方法. 特别是书中还提出了一系列值得辨识爱好者们深入研究的课题和难题, 为进一步研究指明方向.

孙优贤

中国工程院院士 孙优贤 教授

2017 年 12 月于浙江大学

前　言

系统辨识是研究建立系统数学模型的理论与方法. 近年来, 系统辨识应用范围日益广泛和深入, 系统辨识理论与方法得到很大发展. 然而, 还缺乏系统总结这些优秀理论成果的著作, 这就是《系统辨识学术专著丛书》的出版意图. 至此, 这套丛书已经出版了第 1 分册《系统辨识新论》、第 3 分册《系统辨识 —— 辨识方法性能分析》、第 4 分册《系统辨识 —— 辅助模型辨识思想与方法》、第 6 分册《系统辨识 —— 多新息辨识理论与方法》. 本书《系统辨识 —— 迭代搜索原理与辨识方法》是《系统辨识学术专著丛书》的第 5 分册, 重点介绍作者及其合作者在迭代辨识方面取得的一系列最新成果.

近年来, 辅助模型辨识思想、迭代辨识原理、多新息辨识理论、递阶辨识原理、耦合辨识概念、滤波辨识理念相继问世, 为辨识的研究注入了新的活力, 并与传统的辨识方法相互交融, 促使辨识新方法层出不穷、精彩纷呈, 因而也引发了作者对辨识的重新思考, 就辅助模型辨识思想、迭代辨识原理、多新息辨识理论、递阶辨识原理、耦合辨识概念、滤波辨识理念等进行了精心的提炼与总结. 《系统辨识学术专著丛书》就是这些科学思考的结晶.

本书是作者在清华大学和江南大学为研究生开设的 “系统辨识” 等相关课程教学经验与三十年海内外科学研究经验的结晶, 除重点介绍一些基础知识和迭代辨识方法外, 还致力于传授科学研究与创新的新思想. 书中提出了一系列开放性的辨识研究课题, 使读者能清楚了解迭代辨识领域还有哪些研究难题尚未解决, 并为今后的研究指明方向.

全书共 7 章. 第 1 章迭代辨识导引是全书的基础, 介绍最小二乘原理、梯度搜索原理、牛顿搜索原理等, 讨论线性回归系统的基本辨识方法, 在此基础上, 以有限脉冲响应滑动平均系统为例, 介绍梯度迭代方法、最小二乘迭代方法、多新息梯度迭代方法、多新息最小二乘迭代方法等. 第 2 ~ 4 章研究方程误差类系统、输出误差类系统、自回归输出误差类系统的迭代辨识方法. 第 5 章研究线性参数自回归输出误差类系统的迭代辨识方法. 第 6 章介绍白噪声干扰下输入非线性输出误差系统的过参数化辅助模型迭代辨识方法和关键项分离辅助模型迭代辨识方法. 第 7 章介绍有色噪声干扰下输入非线性输出误差类系统的过参数化辅助模型迭代辨识方法和关键项分离辅助模型迭代辨识方法. 随后是参考文献、索引和后记.

书中备有思考题, 其中有些是需要深入思考的辨识难题, 这类问题的解决就是新的科学发现.

丁锋

2017 年 12 月于江南大学

主要符号说明

数集和数域

$\mathbb{N}$	不含 0 的自然数集: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$.
$\mathbb{N}_0$	包括 0 的自然数集: $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3,\cdots\}$.
$\mathbb{Z}$	整数集: $\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$.
$\mathbb{Q}$	有理数集或有理数域.
$\mathbb{R}$	实数集或实数域, $\mathbb{R}:=\mathbb{R}^1$.
$\mathbb{R}^n$	n 维实欧几里得 (Euclidean) 空间, $\mathbb{R}^n:=\mathbb{R}^{n\times 1}$, 或 n 维实数列向量集或实系数函数列向量集 (列向量空间).
$\mathbb{R}^{m\times n}$	所有 m 行 n 列矩阵构成的实空间或实系数函数空间.
$\mathbb{R}^{1\times n}$	n 维实数行向量集或实系数函数行向量集 (行向量空间).
$\mathbb{C}$	复数集或复数域; $\mathbb{F}$ 代表 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.
$\mathbb{C}^{m\times n}$	$m\times n$ 复矩阵集或复系数函数矩阵集; $\mathbb{F}^{m\times n}$ 代表 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 或 $\mathbb{C}^{m\times n}$.
$\mathbb{C}^n$	n 维复数列向量集或复系数函数列向量集, $\mathbb{C}^n:=\mathbb{C}^{n\times 1}$; $\mathbb{F}^{n\times 1}=:\mathbb{F}^n$ 代表 $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$.
$\mathbb{C}^{1\times n}$	n 维复数行向量集或复系数函数行向量集.
$\mathbb{F}$	代表 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.

数向量和数矩阵

$\mathbf{0}$	适当维数的零向量或零矩阵.
$\mathbf{0}_{m\times n}$	$m\times n$ 零矩阵.
$\mathbf{1}$	元均为 1 的适当维数矩阵.
$\mathbf{1}_{m\times n}$	元均为 1 的 $m\times n$ 矩阵.
$\mathbf{1}_n$	元均为 1 的 n 维列向量, $\mathbf{1}_n:=\mathbf{1}_{n\times 1}$.
$\boldsymbol{I}$	适当维数的单位阵, 其对角元均为 1, 其余元均为零.
$\boldsymbol{I}_n$	n 阶单位阵 $\boldsymbol{I}_n\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 其对角元均为 1, 其余元均为零.

基本数学符号

$\mathrm{adj}[\boldsymbol{A}]$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\mathrm{adj}[\boldsymbol{A}]=\det[\boldsymbol{A}]\boldsymbol{A}^{-1}$.
$\mathrm{col}[\boldsymbol{X}]$	将矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的列按次序排成的向量. 如 $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n]\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^m$, $i=1,2,\cdots,n$, 那么 $\mathrm{col}[\boldsymbol{X}]:=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{mn}$. 有的资料上用 $\mathrm{vec}\boldsymbol{X}$ 代替 $\mathrm{col}[\boldsymbol{X}]$.

const	常数.
cov	$\mathrm{cov}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$ 表示随机向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的协方差阵, 定义为 $\mathrm{cov}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]:=\mathrm{E}[(\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{y}})^{\mathrm{T}}]$, $\bar{\boldsymbol{x}}:=\mathrm{E}[\boldsymbol{x}]$.
$\mathrm{D}[*]$	$\mathrm{D}[x(t)]:=\mathrm{var}[x(t)]$ 表示随机变量 (过程) $x(t)$ 的方差.
$\det[\boldsymbol{X}]$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的行列式, 即 $\det[\boldsymbol{X}]:=\lvert\boldsymbol{X}\rvert$.
$\mathrm{diag}[*,*,\cdots,*]$	对角矩阵.
$\dim\boldsymbol{\varphi}(t)$	表示向量 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的维数, 如 $\boldsymbol{\varphi}(t)\in\mathbb{R}^n$, 则 $\dim\boldsymbol{\varphi}(t)=n$.
$\mathrm{E}[*]$	数学期望 (均值).
$\mathrm{E}[*\lvert\mathcal{F}_t]$	对 $\mathcal{F}_t$ 的条件期望 (条件均值).
$\exp(x)$	指数函数, $\exp(x)=\mathrm{e}^x$.
for all	for all $t\geqslant 0$ 表示对所有 $t\geqslant 0$, 即 $t=0,1,2,\cdots$.
for any	for any $t>0$ 表示对每一个 $t>0$, 即 $t=1,2,3,\cdots$.
for large	for large t 表示对大 t.
for some	for some $t>0$ 表示对某个 $t>0$, 如 $t=1,2,3,\cdots$ 中的一个.
$\mathrm{grad}[f(\boldsymbol{x})]$	标量函数 $f(\boldsymbol{x})$ 对向量自变量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ 的梯度 (列向量).
$\mathrm{Im}[s]$	s 的虚部, 若 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$, σ 和 ω 均为实数, 则 $\mathrm{Im}[s]=\omega$.
$\inf[*]$	下界. 例如, $f(x)=\exp(-x^2)$, 则 $\inf[f(x)]=0$.
j	虚数单位, 即 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$.
lim	极限符号.
lim sup	上界极限符号.
$\ln[*]$	以 $\mathrm{e}=2.718281828459\cdots$ 为底的自然对数.
$\max[*,*,\cdots,*]$	$(*,*,\cdots,*)$ 中最大者.
$\min[*,*,\cdots,*]$	$(*,*,\cdots,*)$ 中最小者.
$\mathrm{Re}[s]$	s 的实部, 若 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$, σ 和 ω 均为实数, 则 $\mathrm{Re}[s]=\sigma$.
$\mathrm{sgn}(x)$	符号函数, 即 $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$
star ($\star$)	Star 积或 $\star$ 积或星积 (即块矩阵 $\star$ 积, 块矩阵内积). 例如, $$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_p\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{Y}_p\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}\star\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_p\end{bmatrix}\star\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{Y}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{Y}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{Y}_1\\ \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{Y}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{X}_p\boldsymbol{Y}_p\end{bmatrix}.$$
sup	上界. 例如, $f(x)=1-\exp(-x^2)$, 则 $\sup[f(x)]=1$.
T	上标 T 表示矩阵转置.
$\mathrm{tr}[\boldsymbol{X}]$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的迹, 即矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的对角元之和 (也等于 $\boldsymbol{X}$ 的特征值之和).
$\mathrm{var}[x(t)]$	随机过程 (变量) $x(t)$ 的方差, 即 $\mathrm{var}[x(t)]=\mathrm{E}\{[x(t)-\mathrm{E}(x(t))]^2\}$.
$\lvert x\rvert$	$\lvert x\rvert:=\mathrm{abs}(x)$ 表示 x 的绝对值.
$\lvert\boldsymbol{X}\rvert$	$\lvert\boldsymbol{X}\rvert:=\det[\boldsymbol{X}]$ 表示方阵 $\boldsymbol{X}$ 的行列式.

变量和函数定义

$A=:X$	A 定义为 X.

$X := A$	A 定义为 X.
$1(t)$	单位阶跃函数: $1(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$
$\\|\boldsymbol{X}\\|$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的范数, 如定义为 $\\|\boldsymbol{X}\\|^2 := \mathrm{tr}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]$ 或 $\\|\boldsymbol{X}\\|^2 := \lambda_{\max}[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]$.
$\boldsymbol{X}^{-1}$	方阵 $\boldsymbol{X}$ 的逆矩阵, 定义为 $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{-1} = \boldsymbol{I}$, 或 $\boldsymbol{X}^{-1} = \mathrm{adj}[\boldsymbol{X}]/\det[\boldsymbol{X}]$.
$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的转置.
$\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 逆的转置: $\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}} = [\boldsymbol{X}^{-1}]^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]^{-1}$.
$\boldsymbol{X}^*$	(复) 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的共轭转置.
z^{-1}	单位后移算子, 如 $z^{-1}y(t) = y(t-1)$.
$f(t) = o(g(t))$	表示 $g(t) > 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 0$.
$f(t) = O(g(t))$	表示 $g(t) \geqslant 0$, 存在常数 $\delta_1 > 0$ 和 t_1 满足 $\|f(t)\| \leqslant \delta_1 g(t)$, $t \geqslant t_1$.
$\boldsymbol{P}(t)$	协方差矩阵.
δ	相对参数估计误差 $\delta := \\|\hat{\boldsymbol{\vartheta}}(t) - \boldsymbol{\vartheta}\\|/\\|\boldsymbol{\vartheta}\\|$ 或 $\delta := \\|\hat{\boldsymbol{\vartheta}}(t) - \boldsymbol{\vartheta}(t)\\|/\\|\boldsymbol{\vartheta}(t)\\|$.
δ_a	绝对参数估计误差 $\delta_a := \\|\hat{\boldsymbol{\vartheta}}(t) - \boldsymbol{\vartheta}\\|$ 或 $\delta_a := \\|\hat{\boldsymbol{\vartheta}}(t) - \boldsymbol{\vartheta}(t)\\|$.
δ_0	均方参数估计初值偏差 $\delta_0 := \mathrm{E}[\\|\hat{\boldsymbol{\vartheta}}(0) - \boldsymbol{\vartheta}\\|^2]$, 或 $\delta_0 := \mathrm{E}[\\|\hat{\boldsymbol{\vartheta}}(0) - \boldsymbol{\vartheta}(0)\\|^2]$.
δ_{ij}	Kronecker delta 函数, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$
δ_{ns}	噪信比.
$\boldsymbol{\vartheta}$ 或 $\boldsymbol{\vartheta}(t)$	时不变或时变参数向量 (或参数矩阵).
$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}(t)$	参数向量 (矩阵) $\boldsymbol{\vartheta}$ 或 $\boldsymbol{\vartheta}(t)$ 在时刻 t 的估计.
$\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}(t)$	参数估计误差 $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}(t) := \hat{\boldsymbol{\vartheta}}(t) - \boldsymbol{\vartheta}$ 或 $\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}(t) := \hat{\boldsymbol{\vartheta}}(t) - \boldsymbol{\vartheta}(t)$.
$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k$	参数向量 (矩阵) $\boldsymbol{\vartheta}$ 的第 k 次迭代估计.
$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_k(t)$	参数向量 (矩阵) $\boldsymbol{\vartheta}$ 或 $\boldsymbol{\vartheta}(t)$ 在时刻 t 的第 k 次迭代估计.
λ	遗忘因子: $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.
$\lambda[\boldsymbol{X}]$	方阵 $\boldsymbol{X}$ 的特征值.
$\lambda_i[\boldsymbol{X}]$	方阵 $\boldsymbol{X}$ 的第 i 个特征值.
$\lambda_{\max}[\boldsymbol{X}]$	对称矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的最大特征值.
$\lambda_{\min}[\boldsymbol{X}]$	对称矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的最小特征值.
$\sigma[\boldsymbol{X}]$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的非零奇异值 (不要求为方阵), 它定义为 $\sigma[\boldsymbol{X}] := \sqrt{\lambda[\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}]}$ 或 $\sigma[\boldsymbol{X}] := \sqrt{\lambda[\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}]}$.
$\sigma_i[\boldsymbol{X}]$	矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的第 i 个非零奇异值.
$\sigma_v^2(t)$ 或 σ_v^2	噪声 $\{v(t)\}$ 的方差.
$\otimes$	Kronecker 积或直积, 若 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p\times q}$, 则 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = [a_{ij}\boldsymbol{B}] \in \mathbb{R}^{(mp)\times(nq)}$, 一般 $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{A}$.
$\star$	Star 积或 $\star$ 积或星积 (即块矩阵 $\star$ 积, 块矩阵内积), 定义见上.
$\circ$	Hadamard 积, 定义为两个矩阵对应元素相乘. 若

$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则

$\boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{B} = [a_{ij}] \circ [b_{ij}] = [a_{ij}b_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

Hadamard 积要求两个矩阵的维数相同.

两个矩阵的 Hadamard 积的例子如下:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{31} & a_{32}b_{32} \end{bmatrix}.$$

目　　录