素数分布方程理论与证明

Theory and Justification of Prime Number Distribution Equation

刘长华　著

合肥市科学技术协会
合肥市科技馆
资助出版

$$F(z,m)=30n+C_{p'}^{1}$$

$$F_2(m)\sim\frac{1}{8}(\pi(x)-3)$$

$$N(m_i,m_j)=\frac{15\cdot(F(m_{0B})-3)\cdot F(m_{BA})}{16\cdot x}$$

时代出版传媒股份有限公司
安徽科学技术出版社

素数分布方程理论与证明

Theory and Justification of Prime Number Distribution Equation

刘长华 著

合肥市科学技术协会
合肥市科技馆
资助出版

时代出版传媒股份有限公司
安徽科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

素数分布方程理论与证明 / 刘长华著.--合肥:安徽科学技术出版社,2017.12
ISBN 978-7-5337-7408-0

Ⅰ.①素… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①素数-研究 Ⅳ.①O156.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 284870 号

素数分布方程理论与证明 刘长华 著

出 版 人:丁凌云 选题策划:田 斌 责任编辑:田 斌
责任校对:盛 东 责任印制:廖小青 封面设计:朱 婧
出版发行:时代出版传媒股份有限公司 http://www.press-mart.com
安徽科学技术出版社 http://www.ahstp.net
(合肥市政务文化新区翡翠路 1118 号出版传媒广场,邮编:230071)
电话:(0551)63533330
印 制:安徽新华印刷股份有限公司 电话:(0551)65859178
(如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂商联系调换)

开本:787×1092 1/16 印张:12.25 字数:306 千
版次:2017 年 12 月第 1 版 2017 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5337-7408-0 定价:60.00 元

前　言

对于 $30n+1$、$30+7$、$30n+11$、$30n+13$、$30n+17$、$30n+19$、$30n+23$、$30n+29$ 这 8 个等差数列，令 $p'=1,7,11,13,17,19,23,29$，$C_{p'}^1$ 表示从 p' 这 8 个数中任选一个，则上述 8 个等差数列可用 $F(z,m)=30n+C_{p'}^1$ 表示，我们称其为素数分布方程。

我们知道，等差数列的素数问题，一直是数学家十分关注的问题，对形如 $4n+1$，$4n+3$，$7n+4$，$8n+7$ 等的素数问题，许多数学家都进行过深入的研究，最著名的便是狄利克雷定理：若 a、b 互素，则形如 $an+b$ 的素数的个数无穷。华罗庚教授在《数论导引》这部数论巨著的第 5 章、第 9 章中详细介绍了这一定理及其证明过程，可见这一定理在数论中的重要性。素数分布方程与 $4n+1$、$8n+7$ 一样，是狄利克雷等差数列的素数定理的一种特殊形式。素数分布方程具有以下 3 个性质：

(1)除 2，3，5 之外的所有素数以及它们中若干个不同、相同或部分相同的连乘积都分布在 $F(z,m)=30n+C_{p'}^1$ 函数里；

(2)8 个等差数列的素数个数都是无穷多的；

(3)无论 x 如何增大，8 个等差数列的素数个数都是近似相等的。

本书对上述 3 个性质进行证明，其中性质(3)的证明约占全书正文篇幅的一半。狄利克雷定理只有性质(2)，素数分布方程理论丰富与发展了狄利克雷等差数列的素数定理。

本书阐述素数分布方程理论，意义在于：

(1)可将寻找素数范围缩小 $\frac{22}{30}$。原来要在整个自然数中寻找素数，现在只要在其 $\frac{8}{30}$ 中寻找就行了，同时把寻找素数问题，变成研究

$F(z,m)=30n+C_{p'}^{1}$的函数问题，这有利于寻找素数分布规律。

(2)素数分布方程对乘法运算是自封系统，我们可以利用8个等差数列自乘或两两相乘，形成8组64个函数，筛去8个等差数列里的所有复合数。

(3)可以改进埃氏筛法。埃氏筛法可以找到小于或等于给定的正整数里的所有素数，但埃氏筛法不容易计算筛去的复合数个次以及重复筛去的复合数个次，特别是当x很大时，埃氏筛法几乎是无用的。埃氏筛法被改进后，可以计算出8个等差数列里筛去复合数的个次，从而计算出重复筛去复合数的个次以及哪些是重复筛去的复合数，这是其他筛法目前无法做到的。

(4)大于30的偶数都是两段素数分布方程之和，这样可以建立偶数的15种类64个方程。

(5)素数分布方程可以用新的视角与方法，去思考与探讨哥德巴赫猜想问题。

(6)除3与5,5与7两个孪生素数外，其余的孪生素数均在$30m_{3i}+11$与$30m_{4i}+13$，$30m_{5i}+17$与$30m_{6i}+19$，$30m_{8i}+29$与$30m_{1i}+1$这3组函数里，从而为研究孪生素数问题提供了一种新方法。

本书在写作过程中，得到许多人的关心与帮助，尤其是鲍建广、林存安、胡家纯、王重、沙林森、钱跃华、彭传武、陈启亮、琚金辉、陈明义、柏劲松、刘思红等。在此，向所有关心帮助过我的人，表示深深的谢意。

由于水平所限，书中不足之处在所难免，敬请各位专家、老师、热心的读者给予指正。

作　者

目　录

第 1 章　素数分布方程与狄利克雷定理

我们将提出素数分布方程概念，指出它的部分性质，以及与狄利克雷定理的关系，它可以用数轴来表示。

1.1　素数分布方程

首先，列出从 1 到任意大正整数的一个正整数数列：

$30\times0+1,30\times0+2,30\times0+3,\cdots,30\times0+27,30\times0+28,30\times0+29$；

$30\times1+0,30\times1+1,30\times1+2,30\times1+3,\cdots,30\times1+27,30\times1+28,30\times1+29$；

$30\times2+0,30\times2+1,30\times2+2,30\times2+3,\cdots,30\times2+27,30\times2+28,30\times2+29$；

…

$30n+0,30n+1,30n+2,30n+3,\cdots,30n+27,30n+28,30n+29$。

上述是一个从 1 开始到任意大的正整数数列，若用 2，3，5 去除，则不能整除，只剩下以下 8 个等差数列：

$30n+1,30n+7,30n+11,30n+13,30n+17,30n+19,30n+23,30n+29$，其中 n 为 $0,1,2,3,\cdots,\rightarrow\infty$。

现在我们来进一步证明这一点。一个任意大的正整数数列可以写成 $30n+t$ 的形式，其中 $n=0,1,2,3,\cdots,\rightarrow\infty,t=1,2,3,\cdots,28,29,0$。我们将 t 分为 4 组。

$$t=\begin{cases}t_1=2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,0;\\ t_2=3,9,21,27;\\ t_3=5,15,25;\\ t_4=1,7,11,13,17,19,23,29。\end{cases}$$

令 $P_1=2,P_2=3,P_3=5,P'=t_4$，则

$P_1\mid 30n+t_1,\qquad P_1\nmid 30n+t_4$；

$P_2\mid 30n+t_2,\qquad P_2\nmid 30n+t_4$；

$P_3\mid 30n+t_3,\qquad P_3\nmid 30n+t_4$；

此处表示 P_1 可以整除 $30n+t_1$，而不能整除 $30n+t_4$；P_2 可以整除 $30n+t_2$，而不能整除 $30n+t_4$；P_3 可以整除 $30n+t_3$，而不能整除 $30n+t_4$。这就是说，一个任意大的正整数列，若用 P_1,P_2,P_3（即 2，3，5）去除，不能整除的，便只剩下上述 8 个等差数列。我们用 $C_{p'}^1$ 表示从 1，7，11，13，17，19，23，29 这 8 个数中任取一个，则上述 8 个等差数列可以写成：

$$F(z,m)=30n+C_{p'}^1 \tag{1.1}$$

我们称(1.1)式为素数分布方程，并提出素数分布方程理论。

(1)第一，素数分布方程包含了全部素数。素数分布方程里的素数虽不包括 2，3，5，但素

数分布方程的公差是 $2\times3\times5=30$。除 2,3,5 以外的所有素数以及它们中若干个不同、相同或部分相同的连乘积,都分布在这 8 个等差数列里。

(2)寻找素数范围小了。原来我们要从整个自然数列中寻找素数,现在只要在原数的 $\frac{8}{30}$ 中寻找就行了,同时能使我们更好地寻找素数分布规律。

(3)素数分布方程对乘法是自封系统,我们可用 8 个等差数列自乘或两两相乘,形成 8 组、64 个函数,筛去素数分布方程里的所有复合数。由于我们是用小的筛去大的,即儿子筛老子的方法,故称父子筛法。这种筛法,形成 $F(z)$ 和 $F(m)$ 函数,$30F(z)+C_{p'}^1$ 为复合数,它在数轴上的点为 z 点;$30F(m)+C_{p'}^1$ 为素数,它在数轴上的点为 m 点。

(4)大于 30 的任意一个偶数,都是两个相同或不同类型的素数分布方程两段之和。例如:

$32=(30\times0+13)+(30\times0+19)$,$34=(30\times0+17)+(30\times0+17)$,

$36=(30\times0+17)+(30\times0+19)$,$38=(30\times0+19)+(30\times0+19)$,

$40=(30\times0+11)+(30\times0+29)$,$42=(30\times0+13)+(30\times0+29)$,

$44=(30\times1+1)+(30\times0+13)$, $46=(30\times0+17)+(30\times0+29)$,

$48=(30\times1+1)+(30\times0+17)$, $50=(30\times1+1)+(30\times0+19)$,…,

这样,我们可以建立哥德巴赫猜想方程。

1.2 素数分布方程是狄利克雷定理的特例

等差数列的素数问题,一直是数论学家十分关注的问题,对于形如 $4n+1$,$4n+3$,$7n+4$,$8n+7$ 等的素数问题,许多数学家都进行了深入的研究,最著名的便是狄利克雷定理。这位法裔德国数学家在 1837 年用复分析的方法证明了等差数列中素数的定理,其定理如下:

"若 a,b 互素,则形如 $an+b$ 之素数之个数无穷。"(参见华罗庚教授《数论导引》,科学出版社 1979 年版,第五章第 112 页。)

令 $a=30$,$b=C_{p'}^1$,因为$(30,C_{p'}^1)=1$,这里表示 30 与 $C_{p'}^1$ 互素,可见,$30n+C_{p'}^1$ 与 $4n+1$,$7n+4$,$8n+7$ 等都是狄利克雷定理中的一种特殊形式。

1.3 8 个等差数列的素数个数都是无穷多的

关于等差数列的素数个数是无穷多的以及狄利克雷定理,华罗庚教授在《数论导引》第五章、第九章里详细介绍了这方面情况及其证明过程,我们在这里不再引述。下面,我们用一种简单的方法来证明 8 个等差数列中的素数个数都是无穷多的。

令 $P_4=7$,$P_5=11$,$P_6=13$,$P_7=17$,$P_8=19$,$P_9=23$,$P_{10}=29$,P_i,P_j 为素数,$P_i<P_j$,则 P_i 一定能整除 $P_1P_2P_3P_4P_5\cdots P_n+1$,若 $P_1P_2P_3P_4P_5\cdots P_n+1$ 为素数,则 $P_i=P_1P_2P_3P_4P5\cdots P_n+1$;若 $P_1P_2P_3P_4P_5\cdots P_n+1$ 为复合数,如果 $P_i\leqslant P_n$,则 P_i 可以整除 $P_1P_2P_3P_4P_5\cdots P_n$,但不能整除 1,故 $P_i>P_n$,这就证明了在 P_n 之后有素数存在。同样,我们能够证明 $P_i<P_j\leqslant P_1P_2P_3P_4P_5\cdots P_nP_{n+1}\cdots P_i+1$,以此类推,便可以证明 $P_1P_2P_3P_4P_5\cdots P_n+1$ 的素数个数无穷。

$P_1P_2P_3=30$,令 $P_4P_5\cdots P_n=n$,$P_1P_2P_3P_4P_5\cdots P_n+1=30n+1$,可见等差数列 $30n+1$ 的

素数个数是无穷多的。

这里顺便说一下，$P_1P_2P_3P_4P_5\cdots P_n+1$，可能是素数，也可能是复合数，例如：

$P_1P_2P_3P_4P_5+1=2\times3\times5\times7\times11+1=2311$，是素数；

$P_1P_2P_3P_4P_5P_6+1=2\times3\times5+7\times11\times13+1=30031=59\times509$。

我们再来证明 $30n+11$ 的素数个数是无穷多的。

P_i 一定能整除 $P_1P_2P_3P_4P_6P_7\cdots P_n+11$，若 $P_1P_2P_3P_4P_6P_7\cdots P_n+11$ 是素数，则 $P_i=P_1P_2P_3P_4P_6P_7\cdots P_n+11$；若 $P_1P_2P_3P_4P_6P_7\cdots P_n+11$ 是复合数，假如 $P_i=P_5=11$，则 P_i 可以整除 11，但不能整除 $P_1P_2P_3P_4P_6P_7\cdots P_n$，假如 $P_i\leqslant P_n$，且不等于 P_5，则 P_i 可以整除 $P_1P_2P_3P_4P_6P_7\cdots P_n$，但不能整除 11，故 $P_i>P_n$，这就证明了在 P_n 之后有素数存在。用同样的方法，我们能够证明 $P_i<P_j\leqslant P_1P_2P_3P_4P_6P_7\cdots P_nP_{n+1}\cdots P_i+11$，以此类推，我们便证明了 $P_1P_2P_3P_4P_6P_7\cdots P_n+11$ 的素数个数是无穷多的。

$P_1P_2P_3=30$，令 $P_4P_6P_7\cdots P_n=n$，$P_1P_2P_3P_4P_6P_7\cdots P_n+11=30n+11$，可见，等差数列 $30n+11$ 的素数个数是无穷多的。

至于 $30n+7$，$30n+13$，$30n+17$，$30n+19$，$30n+23$，$30n+29$ 的素数个数都是无穷多的，都可以用以上方法进行证明。

1.4　素数分布方程可以用数轴来表示

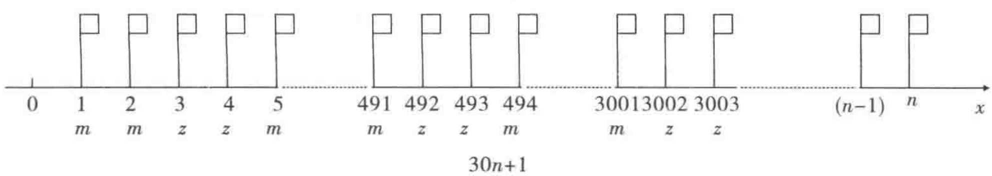

图 1.4.1

在上述自然数列中，每一个自然数上都插一个小旗，小旗上的数皆为 1。因为 $30\times1+1=31$，$30\times2+1=61$，$30\times5+1=151$，$30\times491+1=14731$，$30\times494+1=14821$，$30\times3001+1=90031$ 为素数，这些点在数轴上为 m 点。$30\times3+1=91$，$30\times4+1=121$，$30\times492+1=14761$，$30\times493+1=14791$，$30\times3002+1=90061$，$30\times3003+1=90091$ 为复合数，这些点在数轴上为 z 点。

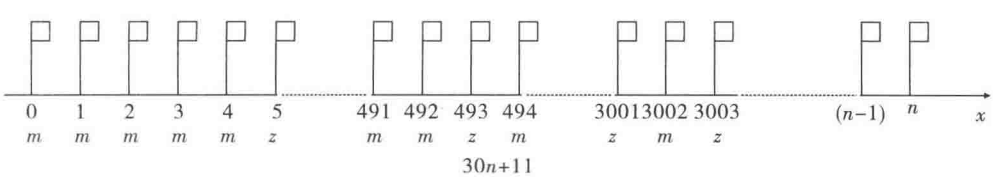

图 1.4.2

在上述自然数列中，0 及每一个自然数上都插一个小旗，小旗上的数皆为 11。因为 $30\times0+11=11$，$30\times1+11=41$，$30\times2+11=71$，$30\times3+11=101$，$30\times4+11=131$，$30\times491+11=14741$，$30\times492+11=14771$，$30\times494+11=14831$，$30\times3002+11=90071$ 皆为素数，这些点在数轴上为 m 点。$30\times5+11=161$，$30\times493+11=14801$，$30\times3001+11=90041$，$30\times3003+11=90101$ 为复合数，这些点在数轴上为 z 点。

其他 6 个等差数列也可以用上述方法表示。

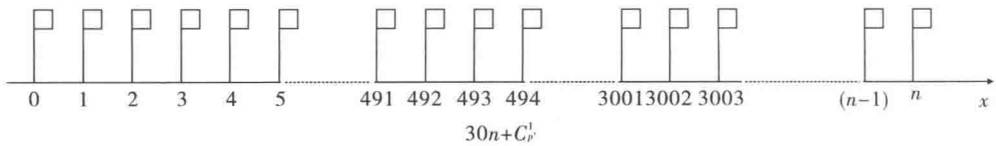

图 1.4.3

同样,在上述自然数列中,0 及每一个自然数上都插一个小旗,不过小旗上的数皆为 $C_{p'}^{1}$。自然数轴上的点为 m 点或 z 点,需要由具体素数分布方程来确定。

第 2 章　父子筛法的方法及步骤

素数分布方程对乘法运算自封，故可采用 8 个等差数列自乘或两两相乘，$(30r_1+C_{p'}^1)(30r_2+C_{p'}^1)=30F(z)+C_{p'}^1$，形成 8 组、64 个函数，筛去 $30n+C_{p'}^1$ 里的所有复合数，这种儿子筛老子的方法，我们称之为父子筛法。

$$1.\begin{cases}(30r+1)(30r_{1.1}+1)=30[r+(30r+1)r_{1.1}]+1=30F_{1.1}(z)+1\\(30r+7)(30r_{1.2}+13)=30[(3+13r)+(30r+7)r_{1.2}]+1=30F_{1.2}(z)+1\\(30r+11)(30r_{1.3}+11)=30[(4+11r)+(30r+11)r_{1.3}]+1=30F_{1.3}(z)+1\\(30r+13)(30r_{1.4}+7)=30[(3+7r)+(30r+13)r_{1.4}]+1=30F_{1.4}(z)+1\\(30r+17)(30r_{1.5}+23)=30[(13+23r)+(30r+17)r_{1.5}]+1=30F_{1.5}(z)+1\\(30r+19)(30r_{1.6}+19)=30[(12+19r)+(30r+19)r_{1.6}]+1=30F_{1.6}(z)+1\\(30r+23)(30r_{1.7}+17)=30[(13+17r)+(30r+23)r_{1.7}]+1=30F_{1.7}(z)+1\\(30r+29)(30r_{1.8}+29)=30[(28+29r)+(30r+29)r_{1.8}]+1=30F_{1.8}(z)+1\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_{1.1}(z)=r+(30r+1)r_{1.1},\\F_{1.2}(z)=(3+13r)+(30r+7)r_{1.2},\\F_{1.3}(z)=(4+11r)+(30r+11)r_{1.3},\\F_{1.4}(z)=(3+7r)+(30r+13)r_{1.4},\\F_{1.5}(z)=(13+23r)+(30r+17)r_{1.5},\\F_{1.6}(z)=(12+19r)+(30r+19)r_{1.6},\\F_{1.7}(z)=(13+17r)+(30r+23)r_{1.7},\\F_{1.8}(z)=(28+29r)+(30r+29)r_{1.8},\end{cases}\begin{cases}r=m_{1.1},m_{1.2},m_{1.3},\cdots,m_{1.k},\quad r_{1.1}=1,2,3,\cdots;\\r=m_{2.1},m_{2.2},m_{2.3},\cdots,m_{2.k},\quad r_{1.2}=0,1,2,\cdots;\\r=m_{3.1},m_{3.2},m_{3.3},\cdots,m_{3.k},\quad r_{1.3}=0,1,2,\cdots;\\r=m_{4.1},m_{4.2},m_{4.3},\cdots,m_{4.k},\quad r_{1.4}=0,1,2,\cdots;\\r=m_{5.1},m_{5.2},m_{5.3},\cdots,m_{5.k},\quad r_{1.5}=0,1,2,\cdots;\\r=m_{6.1},m_{6.2},m_{6.3},\cdots,m_{6.k},\quad r_{1.6}=0,1,2,\cdots;\\r=m_{7.1},m_{7.2},m_{7.3},\cdots,m_{7.k},\quad r_{1.7}=0,1,2,\cdots;\\r=m_{8.1},m_{8.2},m_{8.3},\cdots,m_{8.k},\quad r_{1.8}=0,1,2,\cdots。\end{cases}$$

令 $F_1(z)=\{F_{1.1}(z),F_{1.2}(z),F_{1.3}(z),F_{1.4}(z),F_{1.5}(z),F_{1.6}(z),F_{1.7}(z),F_{1.8}(z)\}$（此处表示 $F_1(z)$ 是 $F_{1.1}(z)$ 至 $F_{1.8}(z)$ 的集合，在 $F_1(z)$ 的集合内没有相同的数，因为 $\{a,b,b,c\}=\{a,b,c\}$。下同），$F_1(z)\subseteq N$，$F_1(m)\subseteq N$，$F_1(z)\cup F_1(m)=N$，$F_1(z)\cap F_1(m)=\varnothing$，则 $F_1(m)$ 为自然数列 N 里删去 $F_1(z)$ 函数值之后的函数。

$30F_1(m)+1=P$，$30F_1(z)+1=G$（G 为复合数）

若 $F_1(m)$ 用 $m_{1.i}$ 表示，$F_1(z)$ 用 $z_{1.j}$ 表示，$i,j=1,2,3,\cdots$，则上式可写成：

$30m_{1.i}+1=P$，$30z_{1.j}+1=G$（G 为复合数）

$$2.\begin{cases}(30r+1)(30r_{2.1}+7)=30[7r+(30r+1)r_{2.1}]+7=30F_{2.1}(z)+7\\(30r+7)(30r_{2.2}+1)=30[r+(30r+7)r_{2.2}]+7=30F_{2.2}(z)+7\\(30r+11)(30r_{2.3}+17)=30[(6+17r)+(30r+11)r_{2.3}]+7=30F_{2.3}(z)+7\\(30r+13)(30r_{2.4}+19)=30[(8+19r)+(30r+13)r_{2.4}]+7=30F_{2.4}(z)+7\\(30r+17)(30r_{2.5}+11)=30[(6+11r)+(30r+17)r_{2.5}]+7=30F_{2.5}(z)+7\\(30r+19)(30r_{2.6}+13)=30[(8+13r)+(30r+19)r_{2.6}]+7=30F_{2.6}(z)+7\\(30r+23)(30r_{2.7}+29)=30[(22+29r)+(30r+23)r_{2.7}]+7=30F_{2.7}(z)+7\\(30r+29)(30r_{2.8}+23)=30[(22+23r)+(30r+29)r_{2.8}]+7=30F_{2.8}(z)+7\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_{2.1}(z)=7r+(30r+1)r_{2.1},\\F_{2.2}(z)=r+(30r+7)r_{2.2},\\F_{2.3}(z)=(6+17r)+(30r+11)r_{2.3},\\F_{2.4}(z)=(8+19r)+(30r+13)r_{2.4},\\F_{2.5}(z)=(6+11r)+(30r+17)r_{2.5},\\F_{2.6}(z)=(8+13r)+(30r+19)r_{2.6},\\F_{2.7}(z)=(22+29r)+(30r+23)r_{2.7},\\F_{2.8}(z)=(22+23r)+(30r+29)r_{2.8},\end{cases}\begin{cases}r=m_{1.1},m_{1.2},m_{1.3},\cdots,m_{1.k},\quad r_{2.1}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{2.1},m_{2.2},m_{2.3},\cdots,m_{2.k},\quad r_{2.2}=1,2,3,4,\cdots;\\r=m_{3.1},m_{3.2},m_{3.3},\cdots,m_{3.k},\quad r_{2.3}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{4.1},m_{4.2},m_{4.3},\cdots,m_{4.k},\quad r_{2.4}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{5.1},m_{5.2},m_{5.3},\cdots,m_{5.k},\quad r_{2.5}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{6.1},m_{6.2},m_{6.3},\cdots,m_{6.k},\quad r_{2.6}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{7.1},m_{7.2},m_{7.3},\cdots,m_{7.k},\quad r_{2.7}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{8.1},m_{8.2},m_{8.3},\cdots,m_{8.k},\quad r_{2.8}=0,1,2,3,\cdots。\end{cases}$$

令 $F_2(z)=\{F_{2.1}(z),F_{2.2}(z),F_{2.3}(z),F_{2.4}(z),F_{2.5}(z),F_{2.6}(z),F_{2.7}(z),F_{2.8}(z)\}$，$F_2(z)\subseteq N$，$F_2(m)\subseteq N$，$F_2(z)\cup F_2(m)=N$，$F_2(z)\cap F_2(m)=\varnothing$，则 $F_2(m)$ 为自然数列 N 里删去 $F_2(z)$ 函数值之后的函数。

$30F_2(m)+7=P$，$30F_2(z)+7=G$（G 为复合数）

若 $F_2(m)$ 用 $m_{2.i}$ 表示，$F_2(z)$ 用 $Z_{2.j}$ 表示，$i,j=1,2,3,\cdots$，则上式可写成：

$30m_{2.i}+7=P$，$30z_{2.j}+7=G$（G 为复合数）

$$3.\begin{cases}(30r+1)(30r_{3.1}+11)=30[11r+(30r+1)r_{3.1}]+11=30F_{3.1}(z)+11\\(30r+7)(30r_{3.2}+23)=30[(5+23r)+(30r+7)r_{3.2}]+11=30F_{3.2}(z)+11\\(30r+11)(30r_{3.3}+1)=30[r+(30r+11)r_{3.3}]+11=30F_{3.3}(z)+11\\(30r+13)(30r_{3.4}+17)=30[(7+17r)+(30r+13)r_{3.4}]+11=30F_{3.4}(z)+11\\(30r+17)(30r_{3.5}+13)=30[(7+13r)+(30r+17)r_{3.5}]+11=30F_{3.5}(z)+11\\(30r+19)(30r_{3.6}+29)=30[(18+29r)+(30r+19)r_{3.6}]+11=30F_{3.6}(z)+11\\(30r+23)(30r_{3.7}+7)=30[(5+7r)+(30r+23)r_{3.7}]+11=30F_{3.7}(z)+11\\(30r+29)(30r_{3.8}+19)=30[(18+19r)+(30r+29)r_{3.8}]+11=30F_{3.8}(z)+11\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_{3.1}(z)=11r+(30r+1)r_{3.1}, \\ F_{3.2}(z)=(5+23r)+(30r+7)r_{3.2}, \\ F_{3.3}(z)=r+(30r+11)r_{3.3}, \\ F_{3.4}(z)=(7+17r)+(30r+13)r_{3.4}, \\ F_{3.5}(z)=(7+13r)+(30r+17)r_{3.5}, \\ F_{3.6}(z)=(18+29r)+(30r+19)r_{3.6}, \\ F_{3.7}(z)=(5+7r)+(30r+23)r_{3.7}, \\ F_{3.8}(z)=(18+19r)+(30r+29)r_{3.8},\end{cases}\begin{cases}r=m_{1.1},m_{1.2},m_{1.3},\cdots,m_{1.k}, & r_{3.1}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{2.1},m_{2.2},m_{2.3},\cdots,m_{2.k}, & r_{3.2}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{3.1},m_{3.2},m_{3.3},\cdots,m_{3.k}, & r_{3.3}=1,2,3,4,\cdots; \\ r=m_{4.1},m_{4.2},m_{4.3},\cdots,m_{4.k}, & r_{3.4}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{5.1},m_{5.2},m_{5.3},\cdots,m_{5.k}, & r_{3.5}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{6.1},m_{6.2},m_{6.3},\cdots,m_{6.k}, & r_{3.6}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{7.1},m_{7.2},m_{7.3},\cdots,m_{7.k}, & r_{3.7}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{8.1},m_{8.2},m_{8.3},\cdots,m_{8.k}, & r_{3.8}=0,1,2,3,\cdots。\end{cases}$$

令 $F_3(z)=\{F_{3.1}(z),F_{3.2}(z),F_{3.3}(z),F_{3.4}(z),F_{3.5}(z),F_{3.6}(z),F_{3.7}(z),F_{3.8}(z)\}$，$F_3(z)\subseteq N$，$F_3(m)\subseteq N$，$F_3(z)\cup F_3(m)=N$，$F_3(z)\cap F_3(m)=\varnothing$，则 $F_3(m)$ 为自然数列 N 里删去 $F_3(z)$ 函数值之后的函数。

$30F_3(m)+11=P$，$30F_3(z)+11=G$（G 为复合数）

若 $F_3(m)$ 用 $m_{3.i}$ 表示，$F_3(z)$ 用 $z_{3.j}$ 表示，$i,j=1,2,3,\cdots$，则上式可写成：

$30m_{3.i}+11=P$，$30z_{3.j}+11=G$（G 为复合数）

$$4.\begin{cases}(30r+1)(30r_{4.1}+13)=30[13r+(30r+1)r_{4.1}]+13=30F_{4.1}(z)+13 \\ (30r+7)(30r_{4.2}+19)=30[(4+19r)+(30r+7)r_{4.2}]+13=30F_{4.2}(z)+13 \\ (30r+11)(30r_{4.3}+23)=30[(8+23r)+(30r+11)r_{4.3}]+13=30F_{4.3}(z)+13 \\ (30r+13)(30r_{4.4}+1)=30[r+(30r+13)r_{4.4}]+13=30F_{4.4}(z)+13 \\ (30r+17)(30r_{4.5}+29)=30[(16+29r)+(30r+17)r_{4.5}]+13=30F_{4.5}(z)+13 \\ (30r+19)(30r_{4.6}+7)=30[(4+7r)+(30r+19)r_{4.6}]+13=30F_{4.6}(z)+13 \\ (30r+23)(30r_{4.7}+11)=30[(8+11r)+(30r+23)r_{4.7}]+13=30F_{4.7}(z)+13 \\ (30r+29)(30r_{4.8}+17)=30[(16+17r)+(30r+29)r_{4.8}]+13=30F_{4.8}(z)+13\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_{4.1}(z)=13r+(30r+1)r_{4.1}, \\ F_{4.2}(z)=(4+19r)+(30r+7)r_{4.2}, \\ F_{4.3}(z)=(8+23r)+(30r+11)r_{4.3}, \\ F_{4.4}(z)=r+(30r+13)r_{4.4}, \\ F_{4.5}(z)=(16+29r)+(30r+17)r_{4.5}, \\ F_{4.6}(z)=(4+7r)+(30r+19)r_{4.6}, \\ F_{4.7}(z)=(8+11r)+(30r+23)r_{4.7}, \\ F_{4.8}(z0)=(16+17r)+(30r+29)r_{4.8},\end{cases}\begin{cases}r=m_{1.1},m_{1.2},m_{1.3},\cdots,m_{1.k}, & r_{4.1}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{2.1},m_{2.2},m_{2.3},\cdots,m_{2.k}, & r_{4.2}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{3.1},m_{3.2},m_{3.3},\cdots,m_{3.k}, & r_{4.3}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{4.1},m_{4.2},m_{4.3},\cdots,m_{4.k}, & r_{4.4}=1,2,3,4,\cdots; \\ r=m_{5.1},m_{5.2},m_{5.3},\cdots,m_{5.k}, & r_{4.5}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{6.1},m_{6.2},m_{6.3},\cdots,m_{6.k}, & r_{4.6}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{7.1},m_{7.2},m_{7.3},\cdots,m_{7.k}, & r_{4.7}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{8.1},m_{8.2},m_{8.3},\cdots,m_{8.k}, & r_{4.8}=0,1,2,3,\cdots。\end{cases}$$

令 $F_4(z)=\{F_{4.1}(z),F_{4.2}(z),F_{4.3}(z),F_{4.4}(z),F_{4.5}(z),F_{4.6}(z),F_{4.7}(z),F_{4.8}(z)\}$，$F_4(z)$

$\subseteq N, F_4(m) \subseteq N, F_4(z) \cup F_4(m) = N, F_4(z) \cap F_4(m) = \varnothing$，则 $F_4(m)$ 为自然数列 N 里删去 $F_4(z)$ 函数值之后的函数。

$30F_4(m)+13=P, 30F_4(z)+13=G$（$G$ 为复合数）

若 $F_4(m)$ 用 $m_{4.i}$ 表示，$F_4(z)$ 用 $z_{4.j}$ 表示，$i,j=1,2,3,\cdots$，则上式可写成：

$30m_{4.i}+13=P, 30z_{4.j}+13=G$（$G$ 为复合数）

$$5.\begin{cases}(30r+1)(30r_{5.1}+17)=30[17r+(30r+1)r_{5.1}]+17=30F_{5.1}(z)+17\\(30r+7)(30r_{5.2}+11)=30[(2+11r)+(30r+7)r_{5.2}]+17=30F_{5.2}(z)+17\\(30r+11)(30r_{5.3}+7)=30[(2+7r)+(30r+11)r_{5.3}]+17=30F_{5.3}(z)+17\\(30r+13)(30r_{5.4}+29)=30[(12+29r)+(30r+13)r_{5.4}]+17=30F_{5.4}(z)+17\\(30r+17)(30r_{5.5}+1)=30[r+(30r+17)r_{5.5}]+17=30F_{5.5}(z)+17\\(30r+19)(30r_{5.6}+23)=30[(14+23r)+(30r+19)r_{5.6}]+17=30F_{5.6}(z)+17\\(30r+23)(30r_{5.7}+19)=30[(14+19r)+(30r+23)r_{5.7}]+17=30F_{5.7}(z)+17\\(30r+29)(30r_{5.8}+13)=30[(12+13r)+(30r+29)r_{5.8}]+17=30F_{5.8}(z)+17\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_{5.1}(z)=17r+(30r+1)r_{5.1},\\F_{5.2}(z)=(2+11r)+(30r+7)r_{5.2},\\F_{5.3}(z)=(2+7r)+(30r+11)r_{5.3},\\F_{5.4}(z)=(12+29r)+(30r+13)r_{5.4},\\F_{5.5}(z)=r+(30r+17)r_{5.5},\\F_{5.6}(z)=(14+23r)+(30r+19)r_{5.6},\\F_{5.7}(z)=(14+19r)+(30r+23)r_{5.7},\\F_{5.8}(z)=(12+13r)+(30r+29)r_{5.8},\end{cases}\begin{cases}r=m_{1.1},m_{1.2},m_{1.3},\cdots,m_{1.k}, & r_{5.1}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{2.1},m_{2.2},m_{2.3},\cdots,m_{2.k}, & r_{5.2}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{3.1},m_{3.2},m_{3.3},\cdots,m_{3.k}, & r_{5.3}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{4.1},m_{4.2},m_{4.3},\cdots,m_{4.k}, & r_{5.4}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{5.1},m_{5.2},m_{5.3},\cdots,m_{5.k}, & r_{5.5}=1,2,3,4,\cdots;\\r=m_{6.1},m_{6.2},m_{6.3},\cdots,m_{6.k}, & r_{5.6}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{7.1},m_{7.2},m_{7.3},\cdots,m_{7.k}, & r_{5.7}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{8.1},m_{8.2},m_{8.3},\cdots,m_{8.k}, & r_{5.8}=0,1,2,3,\cdots。\end{cases}$$

令 $F_5(z)=\{F_{5.1}(z),F_{5.2}(z),F_{5.3}(z),F_{5.4}(z),F_{5.5}(z),F_{5.6}(z),F_{5.7}(z),F_{5.8}(z)\}$，$F_5(z) \subseteq N, F_5(m) \subseteq N, F_5(z) \cup F_5(m) = N, F_5(z) \cap F_5(m) = \varnothing$，则 $F_5(m)$ 为自然数列 N 里删去 $F_5(z)$ 函数值之后的函数。

$30F_5(m)+17=P, 30F_5(z)+17=G$（$G$ 为复合数）

若 $F_5(m)$ 用 $m_{5.i}$ 表示，$F_5(z)$ 用 $z_{5.j}$ 表示，$i,j=1,2,3,\cdots$，则上式可写成：

$30m_{5.i}+17=P, 30z_{5.j}+17=G$（$G$ 为复合数）

$$6.\begin{cases}(30r+1)(30r_{6.1}+19)=30[19r+(30r+1)r_{6.1}]+19=30F_{6.1}(z)+19\\(30r+7)(30r_{6.2}+7)=30[(1+7r)+(30r+7)r_{6.2}]+19=30F_{6.2}(z)+19\\(30r+11)(30r_{6.3}+29)=30[(10+29r)+(30r+11)r_{6.3}]+19=30F_{6.3}(z)+19\\(30r+13)(30r_{6.4}+13)=30[(5+13r)+(30r+13)r_{6.4}]+19=30F_{6.4}(z)+19\\(30r+17)(30r_{6.5}+17)=30[(9+17r)+(30r+17)r_{6.5}]+19=30F_{6.5}(z)+19\\(30r+19)(30r_{6.6}+1)=30[r+(30r+19)r_{6.6}]+19=30F_{6.6}(z)+19\\(30r+23)(30r_{6.7}+23)=30[(17+23r)+(30r+23)r_{6.7}]+19=30F_{6.7}(z)+19\\(30r+29)(30r_{6.8}+11)=30[(10+11r)+(30r+29)r_{6.8}]+19=30F_{6.8}(z)+19\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}F_{6.1}(z)=19r+(30r+1)r_{6.1},\\F_{6.2}(z)=(1+7r)+(30r+7)r_{6.2},\\F_{6.3}(z)=(10+29r)+(30r+11)r_{6.3},\\F_{6.4}(z)=(5+13r)+(30r+13)r_{6.4},\\F_{6.5}(z)=(9+17r)+(30r+17)r_{6.5},\\F_{6.6}(z)=r+(30r+19)r_{6.6},\\F_{6.7}(z)=(17+23r)+(30r+23)r_{6.7},\\F_{6.8}(z)=(10+11r)+(30r+29)r_{6.8},\end{array}\right.\left\{\begin{array}{ll}r=m_{1.1},m_{1.2},m_{1.3},\cdots,m_{1.k}, & r_{6.1}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{2.1},m_{2.2},m_{2.3},\cdots,m_{2.k}, & r_{6.2}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{3.1},m_{3.2},m_{3.3},\cdots,m_{3.k}, & r_{6.3}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{4.1},m_{4.2},m_{4.3},\cdots,m_{4.k}, & r_{6.4}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{5.1},m_{5.2},m_{5.3},\cdots,m_{5.k}, & r_{6.5}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{6.1},m_{6.2},m_{6.3},\cdots,m_{6.k}, & r_{6.6}=1,2,3,4,\cdots;\\r=m_{7.1},m_{7.2},m_{7.3},\cdots,m_{7.k}, & r_{6.7}=0,1,2,3,\cdots;\\r=m_{8.1},m_{8.2},m_{8.3},\cdots,m_{8.k}, & r_{6.8}=0,1,2,3,\cdots。\end{array}\right.$$

令 $F_6(z)=\{F_{6.1}(z),F_{6.2}(z),F_{6.3}(z),F_{6.4}(z),F_{6.5}(z),F_{6.6}(z),F_{6.7}(z),F_{6.8}(z)\}$，$F_6(z)\subseteq N$，$F_6(m)\subseteq N$，$F_6(z)\cup F_6(m)=N$，$F_6(z)\cap F_6(m)=\varnothing$，则 $F_6(m)$ 为自然数列 N 里删去 $F_6(z)$ 函数值之后的函数。

$30F_6(m)+19=P$，$30F_6(z)+19=G$（G 为复合数）

若 $F_6(m)$ 用 $m_{6.i}$ 表示，$F_6(z)$ 用 $z_{6.j}$ 表示，$i,j=1,2,3,\cdots$，则上式可写成：

$30m_{6.i}+19=P$，$30z_{6.j}+19=G$（G 为复合数）

$$7.\begin{cases}(30r+1)(30r_{7.1}+23)=30[23r+(30r+1)r_{7.1}]+23=30F_{7.1}(z)+23\\(30r+7)(30r_{7.2}+29)=30[(6+29r)+(30r+7)r_{7.2}]+23=30F_{7.2}(z)+23\\(30r+11)(30r_{7.3}+13)=30[(4+13r)+(30r+11)r_{7.3}]+23=30F_{7.3}(z)+23\\(30r+13)(30r_{7.4}+11)=30[(4+11r)+(30r+13)r_{7.4}]+23=30F_{7.4}(z)+23\\(30r+17)(30r_{7.5}+19)=30[(10+19r)+(30r+17)r_{7.5}]+23=30F_{7.5}(z)+23\\(30r+19)(30r_{7.6}+17)=30[(10+17r)+(30r+19)r_{7.6}]+23=30F_{7.6}(z)+23\\(30r+23)(30r_{7.7}+1)=30[r+(30r+23)r_{7.7}]+23=30F_{7.7}(z)+23\\(30r+29)(30r_{7.8}+7)=30[(6+7r)+(30r+29)r_{7.8}]+23=30F_{7.8}(z)+23\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_{7.1}(z)=23r+(30r+1)r_{7.1}, \\ F_{7.2}(z)=(6+29r)+(30r+7)r_{7.2}, \\ F_{7.3}(z)=(4+13r)+(30r+11)r_{7.3}, \\ F_{7.4}(z)=(4+11r)+(30r+13)r_{7.4}, \\ F_{7.5}(z)=(10+19r)+(30r+17)r_{7.5}, \\ F_{7.6}(z)=(10+17r)+(30r+19)r_{7.6}, \\ F_{7.7}(z)=r+(30r+23)r_{7.7}, \\ F_{7.8}(z)=(6+7r)+(30r+29)r_{7.8},\end{cases} \begin{cases}r=m_{1.1},m_{1.2},m_{1.3},\cdots,m_{1.k}, & r_{7.1}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{2.1},m_{2.2},m_{2.3},\cdots,m_{2.k}, & r_{7.2}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{3.1},m_{3.2},m_{3.3},\cdots,m_{3.k}, & r_{7.3}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{4.1},m_{4.2},m_{4.3},\cdots,m_{4.k}, & r_{7.4}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{5.1},m_{5.2},m_{5.3},\cdots,m_{5.k}, & r_{7.5}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{6.1},m_{6.2},m_{6.3},\cdots,m_{6.k}, & r_{7.6}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{7.1},m_{7.2},m_{7.3},\cdots,m_{7.k}, & r_{7.7}=1,2,3,4,\cdots; \\ r=m_{8.1},m_{8.2},m_{8.3},\cdots,m_{8.k}, & r_{7.8}=0,1,2,3,\cdots。\end{cases}$$

令 $F_7(z)=\{F_{7.1}(z),F_{7.2}(z),F_{7.3}(z),F_{7.4}(z),F_{7.5}(z),F_{7.6}(z),F_{7.7}(z),F_{7.8}(z)\}$，$F_7(z)\subseteq N$，$F_7(m)\subseteq N$，$F_7(z)\cup F_7(m)=N$，$F_7(z)\cap F_7(m)=\varnothing$，则 $F_7(m)$ 为自然数列 N 里删去 $F_7(z)$ 函数值之后的函数。

$30F_7(m)+23=P$，$30F_7(z)+23=G$（G 为复合数）

若 $F_7(m)$ 用 $m_{7.i}$ 表示，$F_7(z)$ 用 $z_{7.j}$ 表示，$i,j=1,2,3,\cdots$，则上式可写成：

$30m_{7.i}+23=P$，$30z_{7.j}+23=G$（G 为复合数）

8. $$\begin{cases}(30r+1)(30r_{8.1}+29)=30[29r+(30r+1)r_{8.1}]+29=30F_{8.1}(z)+29 \\ (30r+7)(30r_{8.2}+17)=30[(3+17r)+(30r+7)r_{8.2}]+29=30F_{8.2}(z)+29 \\ (30r+11)(30r_{8.3}+19)=30[(6+19r)+(30r+11)r_{8.3}]+29=30F_{8.3}(z)+29 \\ (30r+13)(30r_{8.4}+23)=30[(9+23r)+(30r+13)r_{8.4}]+29=30F_{8.4}(z)+29 \\ (30r+17)(30r_{8.5}+7)=30[(3+7r)+(30r+17)r_{8.5}]+29=30F_{8.5}(z)+29 \\ (30r+19)(30r_{8.6}+11)=30[(6+11r)+(30r+19)r_{8.6}]+29=30F_{8.6}(z)+29 \\ (30r+23)(30r_{8.7}+13)=30[(9+13r)+(30r+23)r_{8.7}]+29=30F_{8.7}(z)+29 \\ (30r+29)(30r_{8.8}+1)=30[r+(30r+29)r_{8.8}]+29=30F_{8.8}(z)+29\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_{8.1}(z)=29r+(30r+1)r_{8.1}, \\ F_{8.2}(z)=(3+17r)+(30r+7)r_{8.2}, \\ F_{8.3}(z)=(6+19r)+(30r+11)r_{8.3}, \\ F_{8.4}(z)=(9+23r)+(30r+13)r_{8.4}, \\ F_{8.5}(z)=(3+7r)+(30r+17)r_{8.5}, \\ F_{8.6}(z)=(6+11r)+(30r+19)r_{8.6}, \\ F_{8.7}(z)=(9+13r)+(30r+23)r_{8.7}, \\ F_{8.8}(z)=r+(30r+29)r_{8.8},\end{cases} \begin{cases}r=m_{1.1},m_{1.2},m_{1.3},\cdots,m_{1.k}, & r_{8.1}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{2.1},m_{2.2},m_{2.3},\cdots,m_{2.k}, & r_{8.2}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{3.1},m_{3.2},m_{3.3},\cdots,m_{3.k}, & r_{8.3}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{4.1},m_{4.2},m_{4.3},\cdots,m_{4.k}, & r_{8.4}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{5.1},m_{5.2},m_{5.3},\cdots,m_{5.k}, & r_{8.5}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{6.1},m_{6.2},m_{6.3},\cdots,m_{6.k}, & r_{8.6}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{7.1},m_{7.2},m_{7.3},\cdots,m_{7.k}, & r_{8.7}=0,1,2,3,\cdots; \\ r=m_{8.1},m_{8.2},m_{8.3},\cdots,m_{8.k}, & r_{8.8}=1,2,3,4,\cdots。\end{cases}$$

令 $F_8(z)=\{F_{8.1}(z),F_{8.2}(z),F_{8.3}(z),F_{8.4}(z),F_{8.5}(z),F_{8.6}(z),F_{8.7}(z),F_{8.8}(z)\}$，$F_8(z)\subseteq N$，$F_8(m)\subseteq N$，$F_8(z)\cup F_8(m)=N$，$F_8(z)\cap F_8(m)=\varnothing$，则 $F_8(m)$ 为自然数列 N 里删去 $F_8(z)$ 函数值之后的函数。

$30F_8(m)+29=P$，$30F_8(z)+29=G$（G 为复合数）

若 $F_8(m)$ 用 $m_{8.i}$ 表示，$F_8(z)$ 用 $z_{8.j}$ 表示，$i,j=1,2,3,\cdots$，则上式可写成：

$30m_{8.i}+29=P$，$30z_{8.j}+29=G$（G 为复合数）

第 3 章　埃氏筛法的两次改进

美国数学家罗森在《初等数论及其应用》一书开卷中说:“将素数从复合数中挑选出来是数论的一个关键问题。”为了把素数从正整数中找出来,数学家们想出了许多筛法,其中最古老、最常用的便是埃拉托色尼斯(Eratosthenes)筛法,它可以找到小于等于给定的正整数里的所有素数。但是,埃氏筛法也存在一些问题。著名数学家王元曾说过:“厄(埃)氏注意到$\sqrt{n}$与n之间的素数,可通过从 $2,3,\cdots,n$ 中去掉那些含有不超过$\sqrt{n}$的素数因子的诸数而得到。命$\pi(x)$为不超过x的素数个数,$\Pi=\prod\limits_{P\leqslant\sqrt{n}}P$,此处$P$表示素数,则$1+\pi(n)-\pi(n^{1/2})=\sum\limits_{a\leqslant n}\sum\limits_{d\mid(a,\Pi)}\mu(d)=\sum\limits_{d\mid\Pi}\mu(d)\left[\frac{n}{d}\right]$,此处$\mu(n)$表示麦比乌斯函数,$[x]$表示$x$的整数部分。如果用$\frac{n}{d}+u$来代替$\left[\frac{n}{d}\right]$,则上式将导致误差项$O(2^{\pi(\sqrt{x})})$。所以厄(埃)氏筛法几乎是无用的。”(引自《从哥德巴赫到陈景润》,刘培杰主编,哈尔滨工业大学出版社,2008 年 7 月版,第 12～13 页。)为此,许多数学家对埃氏筛法进行改进。受此启发,我们亦对埃氏筛法进行两次小小改进,却惊奇地发现:一次改进,给定的正整数变成素数分布方程;二次改进,埃氏筛法变成了父子筛法。

3.1　一次改进:素数分布方程

若给定的正整数$x=30n+t$,n为自然数,t为 30 以内的整数,$P_i\leqslant\sqrt{x}$,埃氏筛法就是用$P_1,P_2,P_3,P_4,\cdots,P_i$连续依次去筛$x$里的复合数。我们可以对埃氏筛法进行两次小小改进:将埃氏筛法连续一次性去筛,改为分两次去筛,第一次先用P_1,P_2,P_3去筛;第二次将从$P_4,P_5,P_6,\cdots,P_i$由小到大依次去筛,改为分成 8 组数列去筛。

我们已经证明一个任意大的正整数列$x=30n+t$,若筛去$P_1=2,P_2=3,P_3=5$的所有整数倍,剩下的便是以下 8 个等差数列:$30n+1,30n+7,30n+11,30n+13,30n+17,30n+19,30n+23,30n+29$。我们对埃氏筛法的第一次小小改进,就是先用$P_1=2,P_2=3,P_3=5$去筛给定的正整数数列,使正整数数列变成 8 个等差数列。这样,埃氏筛法与素数分布方程联系在了一起。

3.2　二次改进:埃氏筛法变为父子筛法

我们对埃氏筛法的第二次小小改进,就是不用$P_4,P_5,P_6,\cdots,P_i$依次去筛上述 8 个等差数列,而是先将$P_4=7,P_5=11,P_6=13,P_7=17,P_8=19,P_9=23,P_{10}=29,P_{11}=31,\cdots,P_i$进行分类,即

$7,\ 30\times1+7,\ 30\times2+7,\ 30\times3+7,\ 30\times4+7,\ \cdots,(30m_{2.i}+7)\leqslant P_i$