

非对称线弹性理论

Asymmetric linear elasticity

(第二版)

邱泽华 著

地震出版社

地震行业科研专项 (201108009) 资助

中央级公益性科研院所基本科研业务专项 (ZDJ2017-10) 资助

非对称线弹性理论

Asymmetric linier elasticity

(第二版)

邱泽华 著



地震出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

非对称线弹性理论/邱泽华著. —2 版. —北京: 地震出版社, 2018. 10
ISBN 978-7-5028-4975-7

I. ①非… II. ①邱… III. ①弹性理论 IV. ①O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 186600 号

地震版 XM4238

非对称线弹性理论 (第二版)

邱泽华 著

责任编辑: 张宝红 张怀素

责任校对: 凌 樱

出版发行: 地震出版社

北京市海淀区民族大学南路 9 号

邮编: 100081

发行部: 68423031 68467993

传真: 88421706

门市部: 68467991

传真: 68467991

总编室: 68462709 68423029

传真: 68455221

专业部: 68467982 68721991

<http://www.dzpress.com.cn>

经销: 全国各地新华书店

印刷: 北京地大彩印有限公司

版 (印) 次: 2018 年 10 月第一版 2018 年 10 月第一次印刷

开本: 787×1092 1/16

字数: 233 千字

印张: 11.25

印数: 0001~1000

书号: ISBN 978-7-5028-4975-7/O (5678)

定价: 80.00 元

版权所有 翻印必究

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

序

邱泽华研究员所著《非对称线弹性理论》（第一版）于2016年5月出版，迄今已经两年。两年多来，非对称线弹性问题在国内逐渐引起相关专家学者的关注。在该书第二版行将付梓之际，我得到他发给我的电子版，并相邀作序。

自诺瓦基（W. Nowacki）专著《Theory of Asymmetric Elasticity（非对称弹性理论）》于1986年出版以来，转眼已有30余年。非对称弹性理论在地震学中、例如在旋转地震学中的可能应用在国内理论地震学界一直备受关注。《非对称线弹性理论》一书与以“微极弹性理论”为代表的流行的非对称连续介质理论不同，它借助前人对各向同性二阶张量的研究成果，引入了3个参数的胡克定律，通过对传统弹性理论的对称性的剖析，系统、简明地说明了非对称线弹性理论的科学内涵。该书在诸多方面的论述都颇具启发性，例如运用非对称线弹性理论对横波旋转性质的阐述，以及对实验观测的“动弹性模量”与“静弹性模量”存在显著差异的理论解释，特别是对涉及地球模型密度结构的横波速度公式的修正，都相当自然、合理，自成一家之言，定将引起学界更加广泛的关注。

地震学是一门基于观测的物理学。邱泽华研究员长期从事钻孔应变观测研究。他和他的研究团队近年来进行的高频采样观测实验，证明了钻孔应变仪也可以用作地震仪观测地震波。正是在对应变地震波观测数据的分析过程中，邱泽华研究员注意到了传统理论无法解释旋转原因的缺陷，进而提出了非对称线弹性理论。非对称线弹性理论在钻孔应变观测研究中的成功应用，再一次提供了一个理论与观测结合的范例。

理论创新是不可能一蹴而就的。没有坚实、广博的知识根基，没有敏感、深刻的洞察力，没有心无旁骛、对真理锲而不舍、长期执着的追求，是不可能取得成功的。诚然，一个创新的理论在其成长过程中难免存在这样那样的问题。有鉴于此，《非对称线弹性理论》第二版对第一版作了全面的修订，增添了不少新的内容，使该书进一步得到完善，是一件十分令人高兴的事情。在此，谨对《非对称线弹性理论》（第二版）的出版表示热烈的祝贺！

陈运泰

2018年10月1日

第二版前言

本书第一版出版后，很快就脱销了。这是本书需要出第二版的一个重要原因。

作者将该书赠与了很多相关领域的学者，并举行了一些小范围的讲座。令作者欣慰的是，至今并未发现该理论存在任何重要的逻辑缺陷。特别是作者的一些认真的学者同行，对该书给出了相当高的评价。

非对称线弹性理论是一个真正的基础理论创新。同时，因为其创新性，所以这个理论自提出以来便在不断地发展。特别是在与同行交流过程中，作者不断受到启发和鞭策，使这个理论逐渐丰富和完善。这是本书需要出第二版的另一个重要原因。

第二版增加的内容主要涉及变形协调条件、势函数、应变率主方向、特征值和特征函数，以及S波的偏振性。其中一些直接与非对称线弹性相关，另一些则是在研究该理论的过程中顺带的。例如有关S波偏振性的内容，很好地解释了S波的应变观测结果，将对地震学的震源机制问题研究产生深远影响。这些内容的增加，使本书的章节发生了比较大的变化。

作者对所有提供支持和帮助的人再次表示衷心的感谢！

第一版前言

本书提出了一个新理论，非对称线弹性理论，其内容基本上与传统线弹性理论不同。然而，整体说来，与其说这个新理论是对传统线弹性理论的否定，不如说是一个发展。

传统的对称线弹性理论可以完美地应用于静态问题研究。对于动态问题，就要应用非对称线弹性理论来研究。同时，非对称理论合理地包含了对称理论的内容。

传统线弹性理论基本框架的形成，已经至少有一百年的历史。这个基本框架主要包括应力的概念、应变的概念、本构关系（胡克定律）以及力学方程等几方面的内容。

在传统线弹性理论中，应力和应变都是对称张量，描述二者关系的胡克定律因而也是对称的。这从根本上决定了这个理论具有对称性的特点。

对称的应变张量，只是整个位移梯度张量的一部分；位移梯度张量的剩余部分，是反对称的旋转张量（也可表达为矢量）。这个非对称的旋转，早在传统理论用对称的应力和应变建立胡克定律和力学方程的时候，就已经被排除在外。传统的线弹性理论只涉及了一部分的位移，即与位移梯度的对称部分相关的位移，而不涉及与位移梯度的反对称部分相关的位移。同时，传统的线弹性理论认为应力张量必须对称。在传统理论的胡克定律中，对称的应力只与对称的应变相关，而与旋转无关。

旋转是客观存在的现象。但是，旋转只发生在动力学问题中，而与静力学问题无关。

旋转一直徘徊于传统线弹性理论之外。

这个情况早已受到一些学者的注意。2009年，美国地震学会会刊（BSSA）特别出了专集（99，2B）讨论这个问题。以此为契机，有学者提出了“旋转地震学（rotational seismology）”的新名词。这里有两方面的情况：一方面，历史上由于技术手段的限制，对旋转的直接观测一直无法进行，而近年来已经有所突破，得到对旋转的直接观测结果（Lee, Igel et al., 2009）；另一方面，更具挑战意义的，是一些学者在理论上进行了新的探索（顾浩鼎和陈运泰，1997；Teisseyre, 2011）。

例如，在传统理论中，根据胡克定律，对称的应变是由对称的应力产生的。但是，反对称的旋转又是如何产生的呢？这个问题在传统理论中是没有答案的。

1997年,顾浩鼎和陈运泰将能量守恒定律应用于旋转,提出了“旋转矩”的概念和“旋转矩定律”来解决这个问题。近些年来,Teisseyre (2009; 2011)提出了一套非对称理论,其中一个重要结果,是将“旋转矩”与非对称的应力联系起来,用与“旋转矩定律”类似的所谓 Shimbo law (Shimbo, 1975; Teisseyre, 2009) 来解决旋转如何产生的问题。

但是,Teisseyre (2011)提出的非对称理论存在一个重要缺陷,就是错误地应用了只适用于对称应力和对称应变的运动方程 (Teisseyre, 2011, Eq. (5a))。

非对称线弹性理论对传统理论更严重的挑战,是对应力对称 (哥西第二运动定律) 的质疑。传统理论以应力对称为基础假设,但是在非对称理论中,应力可以不对称 (Teisseyre, 2009; 2011)。早在1909年, E. Cosserat 和 F. Cosserat 兄弟就注意到,在哥西第二运动定律的转动积分方程中缺少了一个元素: 自旋 (E. Cosserat & F. Cosserat, 1909)。他们通过引入自旋概念,建立了一个新的理论。大约50年之后,该理论受到一些人的关注,并被称为“微极弹性理论” (Toupin, 1964; Truesdell & Noll, 1965; Eringen, 1966; 1999; Cowin, 1970; leŞan, 1981; Pujol, 2009)。

但是,微极弹性理论不仅引入了自旋角动量,而且引入了“应力偶”和“体力矩”作为自旋的力源,隐含了面力和体力不能造成自旋的假定,就使该理论的实际应用受到限制。

由于存在旋转现象,有必要建立比传统的线弹性理论更具普遍性的、能够对旋转进行分析的理论。

本书提出的非对称线弹性理论的贡献主要包括:

- 系统地分析了传统理论的逻辑缺陷,即承认旋转的存在,却未将它纳入核心体系;

- 澄清了“剪应力互等 (或应力对称) 定律”只在静力学中成立,而在动力学中不成立;

- 以非对称应力和非对称应变为出发点,建立了非对称胡克定律;

- 建立了简明的非对称波动方程;

- 修正了S波速度公式;

- 修正了剪切模量的概念;

- 提出了计算旋转能量的公式;

- 进一步说明了应变与旋转的关系;

- 分析了P波和S波的应变性质;

- 提出了三维张量应变观测的理论模型。

重要的是,该理论的主要结论已得到观测的支持。这些支持来自对旋转的直接观测,来自岩石动、静弹性常数的实验,特别是来自采用最先进的四分量钻孔

应变仪对地震波进行的应变观测。

非对称线弹性理论的作用和影响会逐渐显现出来。

本书的内容，有很大一部分来自作者的一系列相关论文。这些论文有的已经发表，有的尚待发表。因为是一整套复杂的理论，所以用专著的形式比用论文的形式发表，更加系统、全面。

本书可以分为两部分：第1章至第7章是第一部分，主要讨论非对称线弹性理论的基本概念和内容；第8章至第12章是第二部分，重点讨论应变观测方法、观测结果对理论的支持和理论的应用。

在非对称线弹性理论的形成过程中，池顺良先生研制的 YRY-4 型四元件钻孔应变仪的观测起了极其重要的作用。先是他提供姑咱实验观测数据，后是提供 YRY-4 型四元件钻孔应变仪在山西参加作者建议的实验观测，都是作者分析地震波的应变性质不可或缺的。作者关于非对称线弹性理论的核心部分的论证，曾经请加拿大地质勘探局的王克林教授审查，得到他的认真回复和鼓励，并使其中一些错误得以纠正。美国加州理工大学洛杉矶分校的尹安教授，也帮助邀请了国外专家审阅这个理论的核心部分，对该理论的完善特别有益。还有一些专家在审阅作者的投稿论文过程中提出了很多宝贵的意见。美国肯塔基大学的王振明教授和 Seth Carpenter 博士帮助对比分析了钻孔应变仪和传统位移地震仪的观测数据。本书提到的一些应变观测实验，得到山西省地震局宋乃波和甘肃省地震局高台地震台刘鸿斌的积极协作和帮助。作者的同事唐磊和郭燕平分担了大量日常工作，使作者得以集中精力完成本书的写作。作者在此一并表示衷心的感谢。

在本书提出的非对称线弹性理论的形成过程中，一些重要的相关实验得到地震行业科研专项（201108009）的资助。

作者真诚地希望得到读者对本书的批评和建议。

目 录

第 1 章 传统线弹性理论的核心内容	1
1.1 对称的应力和应变	1
1.2 对称的胡克定律	3
1.3 对称的平动方程	4
1.4 传统线弹性理论的体波速度公式	6
1.5 传统理论的变形协调条件	7
第 2 章 非对称线弹性理论的核心内容	9
2.1 非对称的应力和应变	9
2.2 非对称的胡克定律	11
2.3 非对称的平动方程	14
2.4 非对称线弹性理论的体波速度公式	17
2.5 非对称理论的变形协调条件	18
第 3 章 势函数	19
第 4 章 从应力对称到应力非对称	22
4.1 微元力矩平衡	22
4.2 传统线弹性理论的转动方程	24
4.3 微极弹性理论的转动方程	25
4.4 微元受力分析	26
4.5 积分方程分析	27
4.6 微元自旋与旋转的关系	28
第 5 章 非对称应变能	30
第 6 章 非对称弹性参数	35
6.1 用应力换算应变	35
6.2 实验证据	38
第 7 章 应变与旋转的关系	43
7.1 二维情形	43
7.1.1 坐标变换	43

7.1.2	应变主方向和主应变	46
7.1.3	应变与旋转的几何联系	47
7.1.4	应变率主方向	50
7.2	三维情形	51
7.2.1	坐标变换	52
7.2.2	特征值和特征矢量	55
7.2.3	应变率主方向	61
第 8 章	弹性波的应变性质	63
8.1	射线坐标系和平面波	63
8.1.1	P 波和 S 波的应变偏量	64
8.1.2	变形协调条件的一个应用	67
8.1.3	P 波和 S 波的应变分量	68
8.1.4	S 波的非对称性	70
8.2	表面波的旋转和应变	74
第 9 章	S 波的偏振面及其定位	77
9.1	简单 S 波的偏振性	77
9.2	S 波偏振面的定位	79
9.2.1	S 波偏振面的地理坐标表示	79
9.2.2	用三维应变观测定位 S 波偏振面	82
9.2.3	用水平面应变观测估计定位 S 波偏振面	83
第 10 章	水平张量应变的观测方法	88
10.1	历史沿革	88
10.2	理论模型	89
10.3	观测深度	91
10.4	四元件应变观测	91
10.5	相对实地标定	92
10.6	绝对实地标定	97
10.7	应变换算	101
第 11 章	张量应变地震观测	106
11.1	姑咱实验	106
11.2	与摆式地震观测的频谱比较	111
第 12 章	体波的观测应变图像	115
12.1	P 波与 S 波的体积变化	115

12.2 P 波水平变图像	117
12.3 S 波水平应变图像	125
第 13 章 表面波的验证	132
13.1 位移地震观测的应用	132
13.2 应变地震波的提取	134
13.3 高台观测的墨西哥地震	135
13.4 两种观测量的比较	137
第 14 章 三维应变观测模型	139
14.1 观测模型	139
14.2 应变的换算方法	141
14.3 观测自治	143
附录 广义胡克定律的简化	147
附.1 对称的广义胡克定律	147
附.2 非对称的广义胡克定律	149
附.3 确定各向同性张量的方法	151
附.3.1 二阶各向同性张量	152
附.3.2 三阶各向同性张量	154
附.3.3 四阶各向同性张量	155
参考文献	159
主要物理量符号表	166

第 1 章 传统线弹性理论的核心内容

本书提出的非对称线弹性理论自成一体，同时也是对传统的线弹性理论的修正和补充。要说明为什么作这种修正和补充，首先要对传统理论作一番简明的梳理。

线弹性理论所研究的线弹性变形，应该包括对称的应变和非对称的旋转。表面上，传统的线弹性理论不否认旋转的存在。但是，通过对一系列基本概念和基本方程的梳理，我们将看到，实际上，传统的线弹性理论以对称性为基本特征，不仅应变对称、应力对称，而且胡克定律对称、运动定律对称。在传统的线弹性波动理论中，对称的应力与反对称的旋转无关，该理论最终给出的波动方程不涉及旋转。

这里强调指出，旋转是反对称的。在逻辑上，不可能根据不包含旋转的理论推导出关于旋转传播的结论。我们没有研究某个现象就不能给出关于这个现象的科学判断。

1.1 对称的应力和应变

在传统线弹性理论中，应力张量通常被表示为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

因此， $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ($i, j=1, 2, 3$)，即应力张量具有对称性。

在直角坐标系 (x_1, x_2, x_3) 下，我们用 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 表示一点沿 (x_1, x_2, x_3) 各方向的位移。在传统理论中，对于小变形的情况，应变张量被定义为

$$\varepsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1-2)$$

其中,

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

称为位移梯度张量。因此, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ($i, j=1, 2, 3$), 即应变张量具有对称性。

在传统线弹性理论中, 位移梯度张量被分为应变和旋转两部分 (图 1-1):

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \\ &= \varepsilon_{ij} - \omega_{ij} \end{aligned} \quad (1-4)$$

传统的线弹性理论认为, 对称应变 ε_{ij} 代表了介质的形变, 而把旋转张量 (rotation)

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j}) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1-5)$$

看成“刚体的转动”(例如, Stein & Wyssession, 2003)。

旋转既可以用张量表示, 也可以用矢量表示:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ &= \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (1-6)$$

我们有

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

因为 $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ ($i, j=1, 2, 3$)，所以旋转具有反对称的性质。

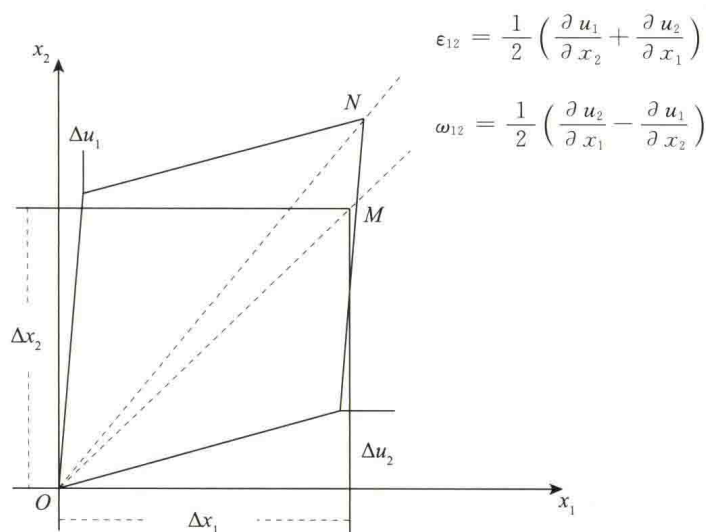


图 1-1 在 x_1-x_2 平面内对称的应变和反对称的旋转示意

对称的应变表现为正方形变成菱形，反对称的旋转表现为对角线 OM 转动到 ON

1.2 对称的胡克定律

以对称的应力和应变为前提，在传统线弹性理论的教科书中，广义胡克定律可以写成

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

其中，参数矩阵 c_{ij} ($i, j=1, \dots, 6$) 是对称的，包含 21 个互相独立的参数。然后可以假设材料各向同性，经过推导，最终将独立参数减少到两个（例如，钱伟长和叶开沅，1956；Fung, 1965；Malvern, 1969；Aki & Richards, 1980；Stein & Wyssession, 2003；详见附录）。

由此得到的传统线弹性理论的胡克定律（Hooke's Law）为

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1-9)$$

其中,

$$\begin{aligned} \theta &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (1-10)$$

是体应变, λ 和 μ 是两个拉梅系数 (Lamé's constants), 而 δ_{ij} 是克罗内克函数 (Kronecker Delta)。

这里特别强调, 式 (1-9) 不涉及 ω_{ij} , 即 σ_{ij} 与 ω_{ij} 无关。

1.3 对称的平动方程

在传统波动理论中, 当不考虑体力时, 用对称应力张量表示的平动方程为

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{cases} \quad (1-11)$$

其中, t 表示时间, ρ 为介质的密度。利用式 (1-9), 可以得到用对称应变张量表示的平动方程

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + 2\mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_3} \right) \\ \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + 2\mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_3} \right) \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + 2\mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_3} \right) \end{cases} \quad (1-12)$$

再利用定义对称应变张量的式 (1-2)，引入相关的位移，进一步得到用位移表示的平动方程

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + 2\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + 2\mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + 2\mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} \end{cases} \quad (1-13)$$

即

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1 \\ \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \mu \nabla^2 u_2 \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + \mu \nabla^2 u_3 \end{cases} \quad (1-14)$$

或

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1-15)$$

其中， ∇ 表示求梯度， $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ 是拉普拉斯算子 (Laplacian)。对照式 (1-4)，我们可以清楚地看到，在用位移表示的波动方程 (1-13) ~ (1-15) 中，只引入了与对称应变相关的位移 $\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ ，而未引入与旋转相关的位移 $\frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$ 。

公式 (1-11) ~ (1-15)，都是传统线弹性理论给出的平动方程 (例如，

Bullen, 1963; Timoshenko & Goodier, 1951; 钱伟长和叶开沅, 1956; Stein & Wysession, 2003)。这里要强调的是, 通过对称的胡克定律, 只有对称的应变张量被引入了平动方程。

1.4 传统线弹性理论的体波速度公式

根据公式

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla \theta - 2 \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (1-16)$$

式 (1-15) 还可以改写成

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{u} + 2(\lambda + \mu) \nabla \times \boldsymbol{\omega} \quad (1-17)$$

前人 (例如, Bullen, 1963; 钱伟长和叶开沅, 1956) 早已给出 P 波和 S 波的一般定义, 即 P 波是无旋 (irrotational) 波, 而 S 波是等体积 (equivoluminal) 波。我们将以此为依据进行讨论。

对于 P 波, 因为没有旋转, $\nabla \times \boldsymbol{\omega} \equiv 0$, 所以式 (1-17) 变为人们熟悉的标准形式的 P 波的波动方程

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 u_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1-18)$$

由此得到 P 波速度

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (1-19)$$

对于 S 波, 其特点是没有体积改变, 即 $\frac{\partial \theta}{\partial x_i} \equiv 0$, 因而由式 (1-15) 得到

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1-20)$$