教育部高等农林院校理科基础课程
教学指导委员会推荐示范教材

普通高等教育农业部“十三五”规划教材

高等农林教育“十三五”规划教材

线性代数

第 2 版

Linear Algebra
Linear Algebra

S

惠淑荣　丰　雪　张万琴　主编

$$\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\0\\-\frac{2}{3}\\1\\0\end{bmatrix},\xi_3=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\0\\\frac{1}{3}\\0\\1\end{bmatrix}$$

中国农业大学出版社
CHINA AGRICULTURAL UNIVERSITY PRESS

教育部高等农林院校理科基础课程
教学指导委员会推荐示范教材

普通高等教育农业部“十三五”规划教材

高等农林教育“十三五”规划教材

线性代数

Linear Algebra

第 2 版

惠淑荣　丰　雪　张万琴　主编

中国农业大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本教材是按照高等农林院校线性代数教学大纲，并在原教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会推荐示范教材《线性代数》（惠淑荣、张万琴主编）基础上重新组织编写的。

全书内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵与二次型。本次编写力求以较为近代的数学思想统一处理有关内容，兼顾了适用性和通用性。全书涵盖了考研数学考试大纲有关线性代数的所有内容，习题按照小节配置，题型多、题量大，书后附有答案。为了便于学生检查学习情况，全面复习和巩固所学内容，在每章后附有自测题，以便读者深入理解，开拓思维。每章最后新增加了应用题，用 Matlab 软件解决对应章节的线性代数问题，开阔了学生的视野，有利于学生运用所学数学知识解决实际问题，增强实践动手能力。

读者在学习本书的过程中应着重掌握线性代数的基本理论、基本方法和基本技能。通过对书中理论、方法、例题、习题的学习，结合自己的经验，全面掌握线性代数这门课程。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/惠淑荣，丰雪，张万琴主编. —2 版. —北京：中国农业大学出版社，2018.1
ISBN 978-7-5655-1972-7

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①惠…②丰…③张…　Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材　Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 320699 号

书　名　线性代数　第 2 版
作　者　惠淑荣　丰　雪　张万琴　主编

策划编辑	张秀环	**责任编辑**	韩元凤
封面设计	郑　川		
出版发行	中国农业大学出版社		
社　　址	北京市海淀区圆明园西路 2 号	**邮政编码**	100193
电　　话	发行部 010-62818525,8625	读者服务部	010-62732336
	编辑部 010-62732617,2618	出　版　部	010-62733440
网　　址	http://www.caupress.cn	**E-mail**	cbsszs@cau.edu.cn
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京时代华都印刷有限公司		
版　　次	2018 年 2 月第 2 版　　2018 年 2 月第 1 次印刷		
规　　格	787×1 092　16 开本　9.5 印张　230 千字		
定　　价	26.00 元		

第2版编写人员

主　　编　惠淑荣　丰　雪　张万琴

副 主 编　王　倩　杨吉会　孙　燕　张　冰
　　　　　刘宪敏　陶桂洪　关　驰　张冬梅

编　　者　（以姓氏拼音顺序排列）
　　　　　戴云仙（内蒙古农业大学）
　　　　　杜世平（四川农业大学）
　　　　　丰　雪（沈阳农业大学）
　　　　　关　驰（沈阳农业大学）
　　　　　郭亚君（河北科技师范学院）
　　　　　惠淑荣（沈阳农业大学）
　　　　　李　强（南京农业大学）
　　　　　刘宪敏（沈阳农业大学）
　　　　　沈陆明（湖南农业大学）
　　　　　孙　燕（内蒙古民族大学）
　　　　　陶桂洪（沈阳农业大学）
　　　　　王　倩（沈阳农业大学）
　　　　　杨吉会（沈阳农业大学）
　　　　　张　冰（沈阳农业大学）
　　　　　张冬梅（沈阳农业大学）
　　　　　张万琴（河南科技学院）

第1版编写人员

主　　编　惠淑荣　张万琴

副 主 编　杜世平　郭亚君　戴云仙
李　强　王　倩　沈陆明

参编人员（以姓氏拼音顺序排列）

戴云仙　（内蒙古农业大学）
杜世平　（四川农业大学）
付玖春　（内蒙古农业大学）
郭亚君　（河北科技师范学院）
惠淑荣　（沈阳农业大学）
李　强　（南京农业大学）
刘宪敏　（沈阳农业大学）
马宝林　（河南科技学院）
沈陆明　（湖南农业大学）
杨晓静　（河北科技师范学院）
王　倩　（沈阳农业大学）
王莉莉　（四川农业大学）
杨晓静　（河北科技师范学院）
张万琴　（河南科技学院）
郑国萍　（河北科技师范学院）

出版说明

在教育部高教司农林医药处的关怀指导下，由教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会(以下简称“基础课教指委”)推荐的本科农林类专业数学、物理、化学基础课程系列示范性教材现在与广大师生见面了。这是近些年全国高等农林院校为贯彻落实“质量工程”有关精神，广大一线教师深化改革，积极探索加强基础、注重应用、提高能力、培养高素质本科人才的立项研究成果，是具体体现“基础课教指委”组织编制的相关课程教学基本要求的物化成果。其目的在于引导深化高等农林教育教学改革，推动各农林院校紧密联系教学实际和培养人才需求，创建具有特色的数理化精品课程和精品教材，大力提高教学质量。

课程教学基本要求是高等学校制定相应课程教学计划和教学大纲的基本依据，也是规范教学和检查教学质量的依据，同时还是编写课程教材的依据。“基础课教指委”在教育部高教司农林医药处的统一部署下，经过批准立项，于2007年底开始组织农林院校有关数学、物理、化学基础课程专家成立专题研究组，研究编制农林类专业相关基础课程的教学基本要求，经过多次研讨和广泛征求全国农林院校一线教师意见，于2009年4月完成教学基本要求的编制工作，由“基础课教指委”审定并报教育部农林医药处审批。

为了配合农林类专业数理化基础课程教学基本要求的试行，“基础课教指委”统一规划了名为“教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会推荐示范教材”(以下简称“推荐示范教材”)的项目。“推荐示范教材”由“基础课教指委”统一组织编写出版，不仅确保教材的高质量，同时也使其具有比较鲜明的特色。

一、“推荐示范教材”与教学基本要求并行 教育部专门立项研究制定农林类专业理科基础课程教学基本要求，旨在总结农林类专业理科基础课程教育教学改革经验，规范农林类专业理科基础课程教学工作，全面提高教育教学质量。此次农林类专业数理化基础课程教学基本要求的研制，是迄今为止参与院校和教师最多、研讨最为深入、时间最长的一次教学研讨过程，使教学基本要求的制定具有扎实的基础，使其具有很强的针对性和指导性。通过“推荐示范教材”的使用推动教学基本要求的试行，既体现了“基础课教指委”对推行教学基本要求

的决心，又体现了对“推荐示范教材”的重视。

二、规范课程教学与突出农林特色兼备 长期以来各高等农林院校数理化基础课程在教学计划安排和教学内容上存在着较大的趋同性和盲目性，课程定位不准，教学不够规范，必须科学地制定课程教学基本要求。同时由于农林学科的特点和专业培养目标、培养规格的不同，对相关数理化基础课程要求必须突出农林类专业特色。这次编制的相关课程教学基本要求最大限度地体现了各校在此方面的探索成果，“推荐示范教材”比较充分地反映了农林类专业教学改革的新成果。

三、教材内容拓展与考研统一要求接轨 2008 年教育部实行了农学门类硕士研究生统一入学考试制度。这一制度的实行，促使农林类专业理科基础课程教学要求作必要的调整。“推荐示范教材”充分考虑了这一点，各门相关课程教材在内容上和深度上都密切配合这一考试制度的实行。

四、多种辅助教材与课程基本教材相配 为便于导教导学导考，我们以提供整体解决方案的模式，不仅提供课程主教材，还将逐步提供教学辅导书和教学课件等辅助教材，以丰富的教学资源充分满足教师和学生的需求，提高教学效果。

乘着即将编制国家级“十二五”规划教材建设项目之机，“基础课教指委”计划将“推荐示范教材”整体运行，以教材的高质量和新型高效的运行模式，力推本套教材列入“十二五”国家级规划教材项目。

“推荐示范教材”的编写和出版是一种尝试，赢得了许多院校和老师的参与和支持。在此，我们衷心地感谢积极参与的广大教师，同时真诚地希望有更多的读者参与到“推荐示范教材”的进一步建设中，为推进农林类专业理科基础课程教学改革，培养适应经济社会发展需要的基础扎实、能力强、素质高的专门人才做出更大贡献。

中国农业大学出版社

2009 年 8 月

第 2 版前言

本书是教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会组织编写的理科基础课程推荐示范教材，根据教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会制定的《普通高等学校农林类专业数理化基础课程教学基本要求》编写而成。

在编写过程中，保留了第 1 版中部分例题和习题，增加了个别章节的知识内容，调整了理论框架，每章最后增加了 Matlab 软件解决对应章节的线性代数问题，既注重线性代数课程本身结构的科学性、系统性、严谨性，又深入浅出、通俗易懂，同时突出有关理论、方法和应用。与本教材配套的还有学习指导和电子教案。

全书内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵与二次型。

本书中标有 * 号的部分，教师可根据学时情况选讲。

本书的编写分工为：主编惠淑荣、丰雪、张万琴负责全书的总体设计、统稿及部分章节的编写。参加编写的还有戴云仙、杜世平、关驰、郭亚君、李强、刘宪敏、沈陆明、孙燕、陶桂洪、王倩、杨吉会、张冰、张冬梅。

编者对第 1 版同行所做的贡献及中国农业大学出版社为本书编写和出版所做的工作表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中疏漏和不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2017 年 10 月

第1版前言

本书是教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会组织编写的理科基础课程推荐示范教材，根据教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会制定的《普通高等学校农林类专业数理化基础课程教学基本要求》编写而成。

在编写过程中，既注重线性代数课程本身结构的科学性、系统性、严谨性，又深入浅出、通俗易懂，同时突出有关理论、方法的应用。在例题与习题的选择上注重典型性和代表性，旨在提高学生的计算和解决实际问题的能力。书中还附有相关数学家简介及用 Matlab 软件解决线性代数问题等内容。与本教材配套的还有学习指导和电子教案。

全书内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵与二次型。

书中标有＊号的部分，教师可根据学时等情况酌情选讲。

本书的编写分工为：主编惠淑荣（沈阳农业大学）、张万琴（河南科技学院）负责全书的总体设计、统稿及部分章节的编写；副主编杜世平（四川农业大学）、郭亚君（河北科技师范学院）、戴云仙（内蒙古农业大学）、李强（南京农业大学）、王倩（沈阳农业大学）、沈陆明（湖南农业大学）负责部分章节的编写；参加编写的还有王莉莉（四川农业大学），付玖春（内蒙古农业大学），刘宪敏（沈阳农业大学），郑国萍、杨晓静（河北科技师范学院），马宝林（河南科技学院）。

编者对中国农业大学出版社为本书编写和出版所做的工作表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中疏漏和不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2009年11月

目录
CONTENTS

Chapter 1 第 1 章

行列式

Determinant

行列式是线性代数中的一个重要概念,也是一个有用的工具.行列式起源于解 n 元线性方程组,它是研究线性代数的一个重要工具,被广泛地应用到物理、工程技术等多个领域.本章从二元与三元一次线性方程组入手,引入二阶与三阶行列式的概念,并将概念推广到 n 阶行列式,然后介绍行列式的性质、行列式的展开与计算,最后介绍克莱姆法则.

1.1 n 阶行列式

1.1.1 排列及其逆序数

定义 1 由 $1,2,\cdots,n$ 共 n 个不同的元素排成一列,叫作这 n 个元素的**全排列**.

特别地,从 1 到 n 的这 n 个自然数,规定由小到大的排列为标准次序.如果这 n 个自然数的一个排列为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 有大数 p_i 在小数 p_j 的前面,则称此排列有一个**逆序**.一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

下面给出计算排列逆序数的方法.不失一般性,设从 1 到 n 这 n 个自然数的一个排列为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$,考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的元素有 τ_i 个,就说 p_i 这个元素的逆序数是 τ_i.全体元素的逆序数的总和

$$\tau=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=\sum_{i=1}^{n}\tau_i$$

即为这个排列的逆序数.

例 1 求排列 4312 的逆序数.

解 在排列 4312 中,4 排在首位,逆序数为 0;3 的前面有 4 比 3 大,有 1 个逆序;1 的前面有 4、3 都比 1 大,有 2 个逆序;2 的前面有 4、3 都比 2 大,有 2 个逆序.故排列的逆序数为

$$\tau=0+1+2+2=5.$$

通常,逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

逆序数的重要性质:

定理 1 互换排列中任意两个数,其逆序数的奇偶性改变.

推论 奇排列调成标准排列的互换次数为奇数;偶排列调成标准排列的互换次数为偶数.

1.1.2 二、三阶行列式

为了引入二、三阶行列式,先回顾二、三元线性方程组的求解.

设二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

这里 a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}、b_1、b_2 均为常数,x_1、x_2 为未知量.用加减消元法求解得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,则方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

定义 2 2^2 个数 $a_{ij}(i,j = 1,2)$ 排成两行两列(横排称为行,竖排称为列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.2}$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.2)所确定的二阶行列式,记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

数 $a_{ij}(i,j = 1,2)$ 叫作行列式(1.3)的元素.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,第二个下标 j 称为列标,a_{ij} 表明该元素位于行列式的第 i 行第 j 列.

若将 a_{11}、a_{22} 两个数构成的对角线叫主对角线,将 a_{12}、a_{21} 构成的对角线叫副对角线,则二阶行列式等于主对角线两个元素的乘积减去副对角线两个元素的乘积.

按二阶行列式的定义,二元一次线性方程组的求解公式可以写成

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}.$$

则二元一次线性方程组的解可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

其中行列式 D 叫方程组(1.1)的系数行列式，D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中第一列所得到的二阶行列式，D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中第二列得到的二阶行列式.

类似地，讨论三元一次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.4}$$

的解. 可解出

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

定义 3 用 $3^2=9$ 个数排成的 3 行 3 列的数表

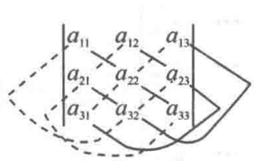
$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix}\tag{1.5}$$

组成的记号

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}\tag{1.6}$$

称为三阶行列式，右端称为三阶行列式的展开式；横排称为行，竖排称为列，数 $a_{ij}\,(i,j=1,2,3)$ 叫作行列式的第 i 行第 j 列元素.

由定义可以看出，一个三阶行列式是由不同行不同列的 3 个数相乘得到的 6 项的代数和，这些项前面所带的正负号可以从下图看出，凡是实线上 3 个元素相乘所得项的前面带正号；虚线上 3 个元素相乘所得项的前面带负号，称为三阶行列式展开式的对角线法则.



若令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

则由三阶行列式定义知方程组(1.4)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

称 D 为方程组(1.4)的系数行列式.

为了给出 n 阶行列式的定义,我们分析三阶行列式的结构:

(1)在三阶行列式定义中,a_{ij} 表示行列式中的第 i 行(称行标)第 j 列(称列标)的元素,且三阶行列式共有 $3!=6$ 项代数和.

(2)式(1.6)右边的每一项都是不同行不同列上 3 个元素的乘积,右边的任意项除正负号外,可写成:$a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$ 其中 $i_1i_2i_3$ 是 123 的一个排列.

(3)式(1.6)右边每一项的符号是:当这一项的行标是 123 标准次序,那么,列标的逆序数是奇数时,这一项取"$-$";逆序数是偶数时,取"$+$",则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}$$

τ 是 $i_1i_2i_3$ 的逆序数,$\sum$ 表示对 123 这 3 个数所有排列 $i_1i_2i_3$ 取和.

1.1.3 n 阶行列式

定义 4 用 n^2 个元素 a_{ij} $(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**.

它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和,各项符号:当这一项元素的行标按自然顺序排列时,所对应的列标的逆序数为偶数,取"$+$";为奇数,取"$-$",则 n 阶行列式可以表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \tag{1.7}$$