普通高等教育“十三五”规划教材

五”江苏省高等学校重点教材

高等数学 上册

施庆生 马树建 主编

GAODENG SHUXUE

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材
“十二五”江苏省高等学校重点教材
（NO. 2015-1-118）

高等数学

（上册）

施庆生　马树建　主　编
焦军彩　赵　剑　张小平　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是根据最新的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写的高等学校教材.

本书分上、下两册出版，上册包括一元函数微积分和常微分方程，下册包括空间解析几何、多元函数微积分和无穷级数等. 为使读者尽早接触数学软件并了解其应用，本书附录还编写了 Mathematica 简介及其简单应用.

本书选材力求少而精，注重微积分的数学思想及其实际背景的介绍，注意与目前中学课程改革的衔接；为适应分层次教学的需要，对有关内容和习题进行了分类处理；在每一章的结尾附有小结和复习练习题，帮助读者进一步复习巩固所学知识. 本书还设计了丰富的数字化教学资源，涵盖电子课件、微视频、习题课和自测题等资源，起到对纸质教材内容巩固、补充和拓展的作用. 读者扫描二维码即可学习重难点讲解的视频.

本书说理浅显、通俗易懂，并有较好的系统性与完整性，可作为高等院校理(非数学专业)、工、农各类本科专业学生学习高等数学课程的教材，也可供社会读者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/施庆生，马树建主编. —北京：科学出版社，2017. 6

普通高等教育“十三五”规划教材

“十二五”江苏省高等学校重点教材

ISBN 978-7-03-053848-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①施… ②马… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 148582 号

责任编辑：张中兴 梁 清 / 责任校对：邹慧卿

责任印制：白 洋 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河市书文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2017 年 6 月第一次印刷 印张：23 3/4

字数：478 000

定价：45.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《高等数学》编委会

主　编　施庆生　陈晓龙　马树建

副主编　焦军彩　赵　剑　张小平

　　　　吕学斌　刘　浩　许丙胜

前　言

本书内容包括一元函数微积分和多元函数微积分、常微分方程、空间解析几何和无穷级数.可作为高等学校非数学专业的各专业学生学习高等数学的教材.

高等数学是相关专业的学生进行专业学习和研究必不可少的数学工具,为使读者在今后的工作中更新数学知识,学习现代数学方法奠定良好的基础,本书选材力求少而精,注意与目前中学课程改革的衔接,注重微积分的数学思想及其实际背景的介绍,渗透现代数学思想,加强应用能力的培养.在一元函数微积分部分对不定积分进行了弱化处理,使得内容精炼简洁,在多元函数微积分部分注意利用向量知识来表述分析中的有关内容,这样处理符合现代数学的发展趋势,有利于培养学生综合应用数学知识的能力.为使读者尽早接触数学软件并了解其应用,本书尝试微积分内容与现代计算机功能的有机结合,在附录中编写了 Mathematica 简介及其简单应用,为读者今后进一步深入学习开启了窗口.

本书分上、下两册,上册包含一元函数微积分与常微分方程,下册包含空间解析几何、多元函数微积分和无穷级数等,部分带 * 号的内容供选学.习题配置是教材的重要组成部分,是实现教学要求、提高教学质量的重要环节,本书习题题型全面,分有(A)、(B)两个层次,以适应不同教学层次的学生选用,在每一章的结尾有小结和复习练习题,帮助读者进一步复习巩固所学知识.在书末给出了全部习题的答案,以便于教师和学生参考.本书还设计了丰富的数字化教学资源,涵盖电子课件、微视频、习题课和自测题等资源,起到对纸质教材内容巩固、补充和拓展的作用.

本书上册由施庆生(第 0、1 章)、张小平(第 2 章)、焦军彩(第 3 章)、马树建(第 4～6 章)和赵剑(第 7 章)编写;下册由吕学斌(第 8 章)、刘浩(第 9 章)、陈晓龙(第 10、11 章)和许丙胜(第 12 章)编写;附录由张维荣编写.本书的数字化资源还有李金凤和王刚参与建设.感谢许志成和朱耀亮老师对教材编写的大力支持.本书上册由马树建统稿,下册由陈晓龙统稿,全书最后由施庆生和陈晓龙定稿.本书的编写得到"十二五"江苏省高等学校重点教材建设和南京工业大学重点教材建设基金的资助与支持,科学出版社高教数理分社的领导和编辑们对本教材的编辑出版工作

给予了精心指导和大力支持,在此一并表示感谢.

由于编者水平有限,如有不妥与错误之处,恳请专家、同行和读者不吝指正.

编　者

2017 年 4 月于南京

目 录

第0章 预备知识

为帮助读者顺利学习高等数学，我们在本章介绍一些学习高等数学的预备知识，如集合、函数、极坐标和行列式等内容，这些知识虽然有些在中学学过，但有必要进一步复习巩固，为学好高等数学奠定坚实的基础.

0.1 集　　合

集合是数学中的最基本概念之一，面对大千世界，人们总是把林林总总的客观事物按其某一方面的特性进行适当划分，再分门别类地加以研究. 集合的概念正是这一原则最基本的体现.

一、集合概念

什么是**集合**，就人们的日常生活而言这几乎是不言自明的概念，它是指具有某种特定性质的对象组成的总体，这些对象就称为该集合的**元素**. 例如，一个班级里的全体同学就构成一个集合，每一个同学都是该集合中的一个元素. 通常用大写字母 $A,B,X,Y,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示元素.

若 x 是集合 A 的元素，则称 x 属于 A，记为 $x\in A$；若 y 不是集合 B 的元素，则称 y 不属于 B，记为 $y\overline{\in} B$(或 $y\notin B$).

自然数的集合，正整数的集合，整数的集合，有理数的集合，实数的集合是我们常用的集合，习惯上分别用字母 $\mathbf{N},\mathbf{N}^{+},\mathbf{Z},\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 表示.

表示集合的方式通常有两种. 一种是列举法，就是把集合的元素逐一列举出来. 如由 a,b,c 三个字母组成的集合 A 可表示为 $A=\{a,b,c\}$. 有些集合的元素无法一一列举出来，但如果能将它们的变化规律表示出来，也可用列举法表示，如自然数集合 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 另一种方法是描述法. 设集合 A 是由具有某种性质 P 的元素构成的，则 A 可表示为 $A=\{x\mid x$ 具有性质 $P\}$. 如 $x^2-1=0$ 的解集 X 可表为 $X=\{x\mid x^2-1=0\}$. 平面上单位圆上点的集合 M 可表示为 $M=\{(x,y)\mid x^2+$

$y^2=1\}$.

注意 集合中的元素之间没有次序关系,且同一元素的重复出现不具有任何意义. 如$\{a,b\}$,$\{b,a\}$与$\{a,b,a\}$表示同一集合.

有一类特殊的集合,它不包含任何元素,如$\{x\mid x\in\mathbf{R},x^2+1=0\}$,我们称之为**空集**,记为$\varnothing$.

若集合 A 由有限个元素组成,则称集合 A 是**有限集**. 不是有限集的集合称为**无限集**,如前面说的 $\mathbf{N},\mathbf{N}^+,\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 都是无限集.

如果一个无限集中的元素可以按某种规律排成一个序列,即这个集合可以表示为

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\},$$

则称其为**可列集**(或**可数集**),如 $\mathbf{N},\mathbf{N}^+,\mathbf{Z},\mathbf{Q}$ 是可列集,$\{x\mid \sin x=0\}$是可列集,而$\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$不是可列集.

设 A,B 是两个集合,如果 A 的所有元素都属于 B,则称 A 是 B 的**子集**,记为 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$). 我们规定对任一集合 A,$\varnothing\subseteq A$. 显然,对任一集合 A,$A\subseteq A$. 如果 A 是 B 的一个子集,即 $A\subseteq B$,且 B 中至少存在一个元素 $x\overline{\in} A$,则称 A 是 B 的一个**真子集**. 如 $A=\{a,b,c\}$,则 A 有 2^3 个子集:$\varnothing$,$\{a\}$,$\{b\}$,$\{c\}$,$\{a,b\}$,$\{a,c\}$,$\{b,c\}\{a,b,c\}$,真子集有 2^3-1 个.

如果 $A\subseteq B$,$B\subseteq A$,则称**集合** A 与 B **相等**,记为 $A=B$.

二、集合的运算

集合的基本运算有并、交、差、补四种.

设 A、B 为两个集合,我们定义并、交、差如下:

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\};$$

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\};$$

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\overline{\in} B\}.$$

设我们在集合 X 中讨论问题,$A\subseteq X$,则集合 A 关于 X 的补集 A_X^C 定义为 $A_X^C=X\backslash A$. 在不会发生混淆的情况下,通常将 A_X^C 简记为 A^C.

集合的上述四种运算具有下列性质:

(1) **交换律** $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$.

(2) **结合律** $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) **分配律** $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

(4) $A\cup A_X^C=X$, $A\cap A_X^C=\varnothing$.

(5) $A\backslash B=A\cap B^{C}$.

(6) **对偶律** $(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C}$， $(A\cap B)^{C}=A^{C}\cup B^{C}$.

三、区间和邻域

设 $a,b\in\mathbf{R}(a<b)$是两个实数，称满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合为以 a,b 为端点的开区间，记为$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；类似定义以 a,b 为端点的闭区间和半开半闭区间如下(图 0.1)：

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\};$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\};$$
$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}.$$

上述几类区间长度是有限的，称为有限区间，$b-a$ 叫做区间的长度.

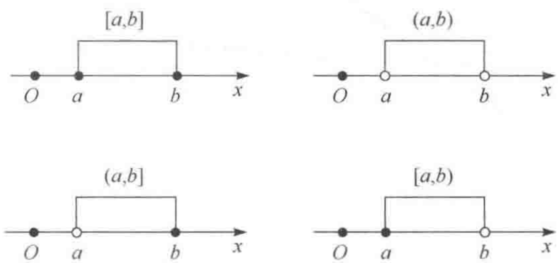

图 0.1

除此之外，还有下列几类无限区间(图 0.2)：

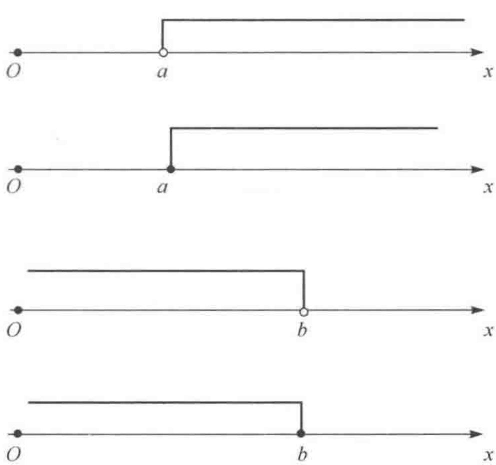

图 0.2

$$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\};$$
$$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\};$$
$$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}.$$

以后在不需要指明所论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,我们就简单地称它为“区间 I”.

邻域也是经常用到的另一个重要概念(图 0.3).

邻域$U(a,\delta)$　　　　去心邻域$\mathring{U}(a,\delta)$

图 0.3

设 δ 是任一正数,则称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为点 a 的 δ **邻域**,记为$U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}.$$

这里点 a 称为**邻域的中心**,δ 称为**邻域的半径**,$U(a,\delta)$也常写为

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}.$$

如果不需指明点 a 的邻域的半径 δ,就用 $U(a)$表示 a 的某一邻域;如果需要把邻域中心 a 点去掉,即点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,就称为点 a 的**去心 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域**,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$.

0.2 函　　数

一、函数定义

在某些实际问题中,往往同时出现好几个变量,而这些变量又往往是相互联系、相互依赖的,如水达沸点的温度取决(依赖)于海拔高度(高度升高沸点就会降低).变量之间的这种确定的依赖关系,在数学上就叫做**函数**.现在我们先就两个变量的情况举几个例子.

例 1　圆面积 S 与它的半径 r 之间的关系:

$$S=\pi r^2, \tag{1}$$

当半径 r 在$[0,+\infty)$内任意取定一个数值时,由上式就可以确定圆面积 S.

例 2　初速度为零的自由落体运动,位移与时间的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2, \tag{2}$$

其中 g 为重力加速度.假定物体着地的时刻为 T,则 t 在$[0,T]$上任意取定一个数

值时，由上式就可以确定相应位移 s.

例 3　经过原点(0,0)，(1,1)与(−1,1)的抛物线上点(x,y)的坐标 y 与 x 之间关系为

$$y=x^2, \tag{3}$$

对$(-\infty,+\infty)$内任意取定一个数值 x，由上式就可以确定 y.

我们还可以举出许多例子，撇开各个例子的实际背景，其共同本质是它们都表达了两个变量之间的依赖关系，这种依赖关系给出了一种对应法则，即一个变量取定了一个数值，那么按照这种确定的对应法则，就可以确定另一变量的一个相应值. 由此就可以抽象出函数的一般概念.

定义　设有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集，如果对于每一个 $x\in D$，变量 y 按照一确定的法则 f，总有唯一确定的数值和它对应，则称 f 是定义在 D 上的**函数**，常记作 $y=f(x)$，数集 D 叫做这个函数的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值 y_0 称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的函数值，记作 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$，即 $y_0=f(x_0)$.

当 x 取遍 D 的每个数值时，对应的函数值全体组成的数集

$$W=\{y|y=f(x),x\in D\}$$

称为**函数 $y=f(x)$ 的值域**.

为了进一步理解这个定义，我们说明以下几点：

1. 函数关系

函数 $y=f(x)$中的"f"，代表从变量 x 到变量 y 的对应法则(或对应关系)，称为**函数关系**，至于这种对应法则是什么，由具体问题确定. 如例 1～例 3 中对应法则分别是(1)～(3)式.

根据函数定义，对定义域 D 内任一数值，对应的函数值只有一个，此时也称函数为**单值函数**.

如果对定义域 D 内任意一数值，按照某种法则对应的数值不止一个，习惯上称这种法则确定了一个**多值函数**. 例如由方程 $x^2+y^2=a^2$ 在区间$[-a,a]$上确定了 y 是 x 的多值函数，对$(-a,a)$内任一 x，存在 $y=\sqrt{a^2-x^2}$和 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$两个值与之对应，$y=\sqrt{a^2-x^2}$与 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$称为多值函数 $x^2+y^2=a^2$ 的单值分支. 对多值函数我们常将其分为几个单值分支进行讨论.

今后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数.

最后需要特别注意的是，$f(x)$是一个完整的记号，且函数关系 f 也可以用其他字母表示，如 $g,F,\varphi,\cdots$. 在同一场合，为不引起混淆，不同的函数应该用不同的记号.

2. 函数的两个要素

在函数 $y=f(x)$,$x\in D$ 中,由于定义域和对应法则唯一确定了函数的值域 W(反之不真),因此,我们称函数的定义域和对应法则为函数的**两个要素**.

在数学中,如不考虑函数的实际含义,函数的定义域就是使函数表达式 $f(x)$ 有意义的自变量 x 全体组成的集合. 例如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$;$y=\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,1)$. 如考虑其实际含义,就根据其实际含义确定其定义域.

如果两个函数定义域与对应法则都相同,则它们表示同一个函数,至于此时自变量与因变量用什么字母倒是无关紧要的. 例如 $y=\sin x$,$x\in(-\infty,+\infty)$ 与 $u=\sin v$,$v\in(-\infty,+\infty)$ 表示的是同一个函数.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,对于任意取定的 $x\in D$,对应的函数值为 $y=f(x)$,这样以 x 为横坐标,y 为纵坐标就得到 xOy 平面上确定的一点 (x,y),当 x 遍取 D 上每一个数值时,就得到点 (x,y) 的一个集合 G:

$$G=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}.$$

这个点集 G 称为函数 $y=f(x)$ 的图形(图 0.4),图中 W 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

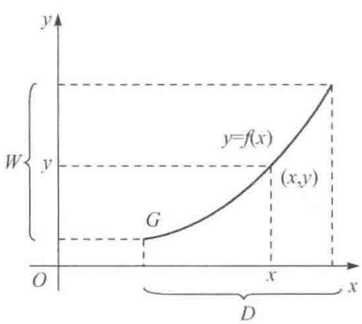

图 0.4

下面再举几个函数的例子.

例 4 函数 $y=2$ 的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{2\}$,它的图形是一条平行于 x 轴的直线,如图 0.5.

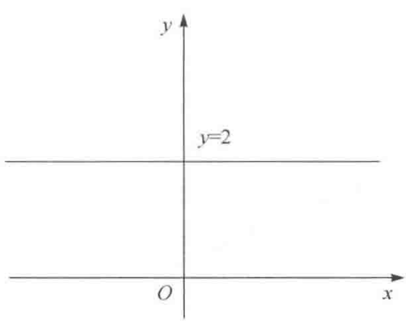

图 0.5

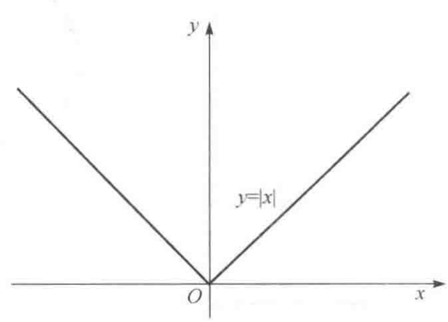

图 0.6

例 5 函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$,它的图形如图 0.6 所示. 这个函数称为**绝对值函数**.