數學典

中國傳統算法分典

一元方程解法（開方術）總部

主編　段耀勇　周暢

四

四

一元方程解法(開方術)總部

極限思想與無窮小分割方法總部

數學與天文曆法總部

引用書目

一元方程解法（開方術）總部

主編　段耀勇　周暢

開方部

綜論

宋・楊輝《楊輝算法・乘除通變本末》 開方乃筭法中大節目，勾股、旁要、演段、鎖積多用。例有七體：一曰開平方，二曰積平圓，三曰開立方，四曰開立圓，五曰開分子方，六曰開三乘以上方，七曰帶從開方。並載少廣、勾股二章作一日學一法，用兩月演習題目，須討論用法之源，庶久而無失念矣。

清・孔廣森《少廣正負術内篇》卷上 少廣者，所以測量物之形體，推積以知冪，推冪以知邊。凡數之始必生於邊，邊與邊乘是爲平冪，邊與冪乘是爲立積，冪與冪乘是爲三乘方，冪與積乘爲四乘方，積與積乘是爲五乘方。其廣袤相等者，爲正諸乘方，不等者爲從諸乘方。有廣袤故有和較，有和較故有正負。和則以所求之邊減之，較則於所求之邊加之，得多爲正，得少爲負。凡以正乘者，同名不變，異名則變。凡以負乘者，異名不變，同名則變。正負交變，必視其異形同實之件，相權而互齊之。斯隱詭糅錯之數皆見，蓋其理近於方程，而其用可以該商功句股之變，簡以御繁，易以知難者焉。自唐王孝通《緝古算經》，宋秦九韶《數學九章》已寓其術。厥後欒城李氏大申明之，著《測圓海鏡》《益古演段》二書。至明而失其傳，遂有顧氏《測圓釋術》之編出，不達敬齋所立天元一細草，盡舉而删去，妄哉。西人入中國，見此法取而更修之謂之借根方。然彼或譯言東來法，未嘗泯其得自中國也。但借根方不復因天元以取定法，又開方不用古從廉、負隅、益積、翻積諸式。於是有數無法，煩亂而不可究，非本少廣之意矣。廣森備官翰林，與窺中秘得見王秦李三家之書，覃思研究，通其義類，試諸籌計，得草若干。顧今人尠習於開諸乘方之法，苦其方廉稠疊，而莫明其方廉之所由生。宣城梅氏《少廣拾遺》亦但有平方立方廉隅圖，至三乘方以上則云不能爲圖。愚謂物之形體，平方、立方盡之矣。特平冪立積之不可知者，乃借諸乘方以求之。本有其數而無其形，將圖其有形者則冪不可以爲邊，積不可以爲冪。將於其無形者，而假圖以明其數，則冪積即可變爲邊，諸乘皆可變爲平方也。輙構諸乘方廉隅圖書首。

又 卷中 古《少廣經》，但有正立方開法。《隋志》云：宋末南徐州從事史祖沖之設開差冪開差立，學官莫能究其深奧。此實開從立方之權輿也。但從立方之視正立方變矣，而從立方之中，又有正變之不同。其正者方有六面，各兩兩相等，本以長濶相乘，與高再乘得積，故據較以求邊者，則以高濶較長濶較相併，爲從廉，兩較相乘爲方法，開之得濶也。據和以求邊者，即併兩和爲負廉，亦兩和相乘爲方法也。若其方法非由廉數相乘而得者，乃變而或缺其旁，或虛其裏，不必截然有六面之可尋矣。要其方廉之加減，立法仍同，固正變可以通御者爾。

清・梅文鼎《少廣拾遺》 少廣爲《九章》之一，其開平方法，爲薄海内外測量家所需，非隸首不能作也。

清・汪萊《乘方釋例序》 算學之書，汗牛充棟，莫不以開方爲大法。故九數之中，方田、粟米、商功、勾股四者之精義，反復研究終統於少廣一章。

清・黎應南《開方説跋》 開方者，除法也。超步定位，肇始於少廣。

清・丁取忠《開方説序》 開方之用進退步法，始于《九章》之少廣及《孫子算經》，然古人祇以馭開平方、立方之帶縱者，未嘗有正負相間之諸乘方也。

清・李善蘭《開方別術序》 算數莫難於開方。

開平方分部

開平方法

題解

《九章筭術》卷四《少廣》 開方 **三國魏・劉徽注** 求方冪之一面也。

唐・李淳風等《九章筭術注釋》 此術「開方」者，求方冪之面也。

宋・謝察微《謝察微筭經》 開方，即自乘還原也。

清・鄧建章《中西算法入門匯通》卷上《釋名》 方，大方也。一乘爲平方，再乘爲立方。三乘爲三乘方，以下類推。【略】廉，倍也。【略】隅，小方也。與大

方同狀。平方隅，一曰廉。

清·張作楠《倉田通法·量倉通法》卷三　平方，長濶相等，如碁局。帶縱平方，長多於濶，如直田。縱之濶如平方，長則如縱。縱與方相乘，得縱積。以加方積，成長方形。

清·劉澤楨《中西數學通解》卷一〇　平方

平方者，等邊四直角之面積也。以形而言，則爲兩矩所合。以積而言，則爲自乘之數。因其有廣無厚，故曰平方。因其縱横相等，故曰正方。蓋方積面也，而其邊則線也。有線求面，則自乘而得積。有面求線，則開方而得邊。開方之法，略與歸除同，但歸除有法有實。而開方則有實無法，故古人立爲商除廉隅之制以相求。

平方帶縱

帶縱平方者，兩等邊直角長方面積也。有積數因長比闊之較，或長與闊之和而得邊，故曰帶縱。蓋正方之縱横皆同，故止有積，即可得其邊。若長方則縱横不等，知其積。又必知其縱横相差之較或縱横相併之和，始能得其邊。

算法

《九章算術》卷四《少廣》　今有積五萬五千二百二十五步。問爲方幾何。

荅曰：二百三十五步。

明·吴敬《九章算法比類大全》卷四《少廣》　法曰：置積五萬五千二百二十五步爲實。照前法商置第一位得二百。下法亦置二百進二位爲二萬，名曰方法。與上商二除實四萬，餘實一萬五千二百二十五。乃二乘方法得四萬，爲廉法，一退得四千。下法再退得百。續商置第二位，以廉法四千商實得三十，下法亦置三十進一位爲三百，爲隅法。以廉、隅二法共四千三百，皆與上商三除實一萬二千九百，餘實二千三百二十五。乃二乘隅法三百，得六百，併入廉法四千，共四千六百。一退得四百六十，下法再退得一。又商置第三位，以廉法四百六十商實得五。下法亦置五，爲隅法，以廉、隅二法共四百六十五，皆與上商五除實盡。合問。

《九章算術》卷四《少廣》　有積二萬五千二百八十一步。問爲方幾何。

荅曰：一百五十九步。

又　有積七萬一千八百二十四步。問爲方幾何。

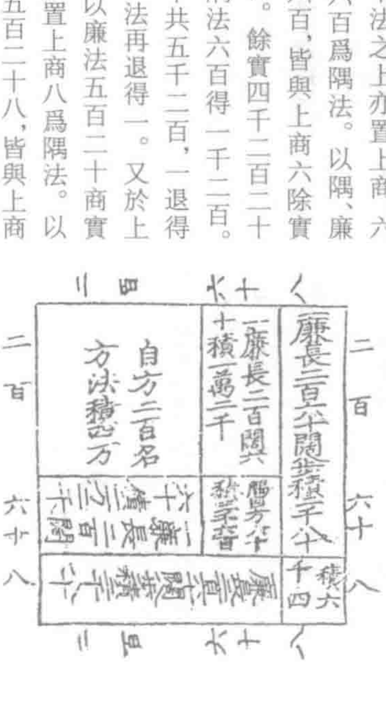
荅曰：二百六十八步。

宋·楊輝《楊輝詳解九章算法》卷六《少廣》　解題：圓三象天。方四象地。圓居方四分之三。以積立術。求方助乘除之妙用。考究源流莫不由此。

明·嚴恭《通原算法》　術曰：置積爲實。借一筭步之超一等，言百之面十也，言萬之面百也。上商二百乘下隅爲廉二百，呼除本積二二除去四萬，餘積三萬一千八百二十四步爲實。倍廉爲方法，得四百。續上商六十，乘下隅爲廉六十，於四百之下，與上商六十呼除本積。四六除去二萬四千，六六除去三千六百。餘積四千二百二十四步爲實。又倍廉六十，得一百二十。併入方法，共五百二十。續上商八步，乘下隅爲廉八步，於五百二十之下，與上商八步，呼除本積。五八除去四千，二八除去一百六十，八八除去六十四步，適盡。得方面二百六十八步，合前問。

明·吴敬《九章算法比類大全》卷四《少廣》　法曰：圓三象天，方四象地，圓居方四分之三，以積立術求方，助乘除之妙用。考究源淵，莫不由此而治之。置積七萬一千八百二十四步爲實。別置一筭，爲下法。原下之法。從末位常超一位，約實。百下定十，萬下定百。於實上商置第一位得二百。下法之上亦置上商，二百進二位得二萬。名曰方法。與上商二除實四萬，餘實二萬一千八百二十四。乃二乘方法得四萬，爲廉法，一退得四千。下法再退，得百。於上商之次續商第二位。以廉法四千，商實得六十。下法之上亦置上商，六十進一位爲六百爲隅法。以隅、廉二法共四千六百，皆與上商六除實二萬七千六百。餘實四千二百二十四。乃二乘隅法六百得一千二百。併入廉法四千共五千二百，一退得五百二十。下法再退得一。又於上商置第三位，以廉法五百二十商實得八。下法亦置上商八爲隅法。以廉、隅二法共五百二十八，皆與上商

平方圖



八除實盡。合問。

《九章筭術》卷四《少廣》 有積五十六萬四千七百五十二步四分步之一。問爲方幾何。

答曰：七百五十一步半。

明·嚴恭《通原筭法》 術曰：列積步以四分通之，納子。又以四分再自乘得六十四乘之爲實。以開方法除之，得一萬二千二十四分，却以四分自乘之，得一十六爲法，除之即得。

明·吴敬《九章筭法比類大全》卷四《少廣》 法曰：置積五十六萬四千七百五十二步，以分母四通之，加内子一共得二百二十五萬九千九。又以分母四乘之，得九百三萬六千三十六爲實。照前法商置第一位得三千，下法亦置三千，進三位爲三百萬爲方法，與上商三除實九百萬，餘實三萬六千三十六。乃二乘方法得六百萬，爲廉法，三退得六千。下法六退得一。續商置第四位以廉法六千商實得六，下法亦置六爲隅法，以廉、隅二法共六千六，皆與上商六，除實盡。得三千六，却以分母四爲法除之，得七百五十一步半。合問。

《九章筭術》卷四《少廣》 又有積三十九億七千二百一十五萬六百二十五步，問爲方幾何。

答曰：六萬三千二十五步。

開方術曰：置積爲實。借一筭，步之，超一等。**三國魏·劉徽注** 言百之面十也，言萬之面百也。議所得，以一乘所借一筭爲法，而以除。**劉徽注** 先得黄甲之面，上下相命，是自乘而除也。除已，倍法爲定法。**劉徽注** 倍之者，豫張兩面朱冪定袤，以待復除，故曰定法。其復除。折法而下。**劉徽注** 欲除朱冪者，本當副置所得成方，倍之爲定法，以折、議、乘，而以除。如是當復步之而止，乃得相命，故使就上折下。復置借筭，步之如初，以復議一乘之，**劉徽注** 欲除朱冪之角黄乙之冪，其意如初之所得也。所得副以加定法，以除。以所得副從定法。**劉徽注** 再以黄乙之面加定法者，是則張兩青冪之袤。復除，折下如前。若開之不盡者，爲不可開，當以面命之。**劉徽注** 術或有以借筭加定法而命分者，雖粗相近，不可用也。凡開積爲方，方之自乘當還復其積分。令不加借筭而命分，則常微少；其加借筭而命分，則又微多。其數不可得而定。故惟以面命之，爲不失耳。譬猶以三除十，以其餘爲三分之一，而復其數可舉。不以面命之，加定法如前，求其微數。微數無名者以爲分子，其一退以十爲母，其再退以百爲母。退之彌下，其分彌細，則朱冪雖有所(乘)[棄]之數，不足言之也。若實有分者，通分内子爲定實，乃開之。訖，開其母，報除。**唐·李淳風等注釋** 分母可開者，竝通之積先合二母。既開之後，一母尚存，故開分母，求一母爲法，以報除也。若母不可開者，又以母(再)乘定實，乃開之。訖，令如母而一。**李淳風等注釋** 分母不可開者，本一母也。又以母乘之，乃合二母。既開之後，亦一母存焉。故令一母而一，得全面也。又按：此術「開方」者，求方冪之面也。「借一筭」者，假借一筭，空有列位之名，而無除積之實。方隅得面，是故借筭列之於下。「步之，超一等」者，方十自乘，其積有百，方百自乘，其積有萬，故超位至百而言十，至萬而言百。「議所得，以一乘所借筭爲法，而以除」者，先得黄甲之面，以方爲積者兩相乘。故開方除之，還令兩面上下相命，是自乘而除之。「除已，倍法爲定法」者，實積未盡，當復更除，故豫張兩面朱冪袤，以待復除，故曰定法。「其復除，折法而下」者，欲除朱冪，本當副置所得成方，倍之爲定法，以折、議、乘之，而以除。如(初)是，當復步之而止，乃得相命，故使就上折之而下。「復置借筭，步之如初，以復議一乘之，所得副以加定法，以定法除」者，欲除朱冪之角黄乙之冪。「以所得副從定法」者，再以黄乙之(冪)[面]加定法，是則張兩青冪之袤，故如前開之，即合所問。

宋·賈憲《黄帝九章筭經細草》卷四《少廣》《永樂大典》卷一六三四四 法曰：置積爲實，別置一筭名曰下法，原下之法。於實數之下，自末位常超一位，初乘時過一位，今超一位。約實至首位盡而止。一下定一，一百下定十，萬下定百，百萬下定千。於實上商置第一位得數，以方法一一，二二，三三，四四，五五，六六，七七，八八，九九之數爲商，商本體實數。下法之上，亦置上商數。即原乘法數也。名曰方法。於本積内，去其一方。命上商除實，法實相呼，以破積數。二乘方法，一退爲廉。一方帶兩直，以助其狀如廉，故二乘退位。下法再退，下法，即定位之筭，再退重定。於上商之次，續商第二位得數。與上意同。於廉法之次，照上商置隅，一方帶二廉，正闕一角，角即名隅。以方廉二法，亦原乘之法也。皆命上商除實，二乘隅法併入廉法一退。倍隅人廉作一大方，以乘次位得數。下法再退，前意。商置第三位得數。下法之上照上商置隅。以廉隅二法，皆命上商除實。第二位解意同。得平方一面之數。更有不盡之數，依第三位體面倍隅入廉退位商之。

《九章筭術》卷四《少廣》 今有積一千五百一十八步四分步之三。問爲圓周幾何。

答曰：一百三十五步。**三國魏·劉徽注** 於徽術，當周一百三十八步一十分步之一。**唐·李淳風等注釋** 此依密率，爲周一百三十八步五十分步之九。

宋・賈憲《黄帝九章算經細草》卷四《少廣》《永樂大典》卷一六三四四　法曰：分母乘全步入内子，子以圓法十二乘之。又以分母再自乘乘之。開平方求積。以分母自乘爲法除之，以分母自乘爲法除實得周。

草曰：分母四乘全步，一千五百一十八步。入内子三，得六千七十五。以圓法十二乘之，得七萬二千九百。又以分母四再自乘爲六十四。乘之爲實，四百六十六萬五千六百。開平方别置一筭爲下法，原下之法。從末常超一位約實，百下約十，萬下約百，百萬下約千。實上商置第一位得數，二千。下法之上，亦置上商二千，名曰方法。乃命上商除實四百萬，二乘方法一退，爲廉，乘作四千退爲四十。下法再退，百下定十。於上商之次續商第二位得數，一百，共爲二千一百。廉法之次，上商置隅一百，以廉隅二法皆命上商除實，除四十一萬，餘二十五萬五千六百。二乘隅法，併爲廉一退，得四千二百。下法再退，於末位百下定十。又以上商置第三位得數，六十。下法之上亦置隅六十，除實，適盡得二千一百六十。以分母自乘爲法，除之。

宋・楊輝《楊輝詳解九章算法》卷六《少廣》　解題：以方改圓驗方圓相通也。圓居四分之三。

明・嚴恭《通原筭法》　術曰：列積步，以四分通之，納子，十二乘之。又以四分再自乘，得六十四乘之爲實。以開方除之，得二千一百六十分。却以四分自乘得一十六爲法。除之即得。

明・吴敬《九章筭法比類大全》卷四《少廣》　法曰：以方改圓，圓居方四分之三也。置積一千五百一十八步，以分母四乘之得六千七十二，加入内子三，共得六千七十五，以圓法十二乘之，得七萬二千九百。又以分母四乘之得二十九萬一千六百，爲實。以開平方法除之。照前法，商置第一位得五百，下法亦置上商五五進二位，得五萬爲方法，與上商五除實二十五萬，餘實四萬一千六百，乃二乘方法得一十萬爲廉法，一退得一萬，下法再退得萬，續商置第二位，以廉法一萬商實得四十，下法亦置上商四十，進一位爲四百，爲隅法，以廉、隅二法，共一萬四百，皆與上商四除實盡，得五百四十。却以分母四爲法除之。得圓周合問。

《九章筭術》卷四《少廣》　又有積三百步。問爲圓周幾何。

荅曰：六十步。**三國魏・劉徽注**　於徽術，當周六十一步五十分步之十九。**唐・李淳風等注釋**　依密率，爲周六十一步一百分步之四十一。

明・吴敬《九章筭法比類大全》卷四《少廣》　法曰：置積三百步，以圓法十二乘之得三千六百步，爲實。以開平方法除之，上商六十步，下法亦置上商六十進一位爲六百，爲方法，與上商六除實盡。合問。

《九章筭術》卷四《少廣》　開圓術曰：置積步數，以十二乘之，以開方除之，即得周。**三國魏・劉徽注**　此術以周三徑一爲率，與舊圓田術相返覆也。於徽術，以三百一十四乘積，如二十五而一，所得，開方除之，即周也。（開方除之，即徑。）是爲據見冪以求周，猶失之於微少。其以二百乘積，一百五十七而一，開方除之，即徑，猶失之於微多。**李淳風等注釋**　此注於徽術求周之法，其中不用「開方除之，即徑」六字，今本有者，衍賸也。依密率，八十八乘之，七而一。按周三徑一之率，假令周六徑二，半周半徑相乘得冪三。周六自乘得三十六，俱以等數除，冪得一，周之數十二也。其積：本周自乘，合以一乘之，十二而一，得積三也。術爲一乘不長，故以十二而一，得此積。今還元，置此積三，以十二乘之者，復其本周自乘之數。凡物自乘，開方除之，復其本數。故開方除之，即周。

晉・佚名《孫子算經》卷中　今有積二十三萬四千五百六十七步。問爲方幾何。

荅曰：四百八十四步九百六十八分步之三百一十一。

術曰：置積二十三萬四千五百六十七步爲實。次借一筭爲下法。步之，超一位至百而止。商置四百於實之上。副置四萬於實之下，下法之上，名爲方法。命上商四百，除實。除訖，倍方法，一退，下法再退。復置上商八十，以次前商。副置八百於方法之下，下法之上，名爲廉法。方、廉各命上商八十，以除。訖，倍廉法，上從方法。方法一退，下法再退。復置上商四，以次前。副置四於方法之下，下法之上，名曰隅法。方、廉、隅各命上商四，以除實。除訖，倍隅法，從方法。上商得四百八十四，下法得九百六十八，不盡三百一十一。是爲方四百八十四步九百六十八分步之三百一十一。

北魏・張丘建《張丘建算經》卷中　今有田積一十二萬七千四百四十九步，問爲方幾何。

荅曰：三百五十七步。

術曰：以開方除之即得。**唐・劉孝孫細草**　置前積步數於上。借一算子於下。常超一位，步至百止。以上商置三百於積步之上。又置三萬於積步之下，下法之上，名曰方法。以方命上商，三三如九，除九萬。又倍方法，一退，下法再退。又置五十於上商之下。又置五百於下法之上，名曰隅法。以方、隅二法除實，餘有四千九百四十九。又倍隅法，以併方，得七千，退一等，下法再退。又置七於上商五十之下。又置七於下法之上，名曰隅法。以方、隅

二法除實，得合前問。

今有田方一百二十一步，欲以爲圓，問周幾何。

答曰：四百一十九步八百三十九分步之一百三十一。

術曰：方自相乘，又以十二乘之爲實。開方除之即得。**劉孝孫細草** 以一百二十一步自相乘得一萬四千六百四十一。又以十二乘之得一十七萬五千六百九十二。借一算子於下。常超一位，步至百止。上商得四百。下置四萬爲方法，命上商除一十六萬。倍方法，退一位，得八千，下法退二等。又置上商得一十。又置下法之上一百，名曰隅法。以方、隅除實八千一百。又置倍隅法從方法，退一等，得八百二十。又置九於一十之下。又置九於下法之上，名隅法。以方命上商，八九七十二，除七千二百。又以方法二命上商九，除一百八十。又以隅法九命上商九，除八十一，餘一百三十一，即四百一十九步八百三十九分步之一百三十一。合前問。

又 今有圓田周三百九十六步，欲爲方，問得幾何。

答曰：一百一十四步二百二十九分步之七十二。

術曰：周自相乘，十二而一。所得，開方除之即得方。**劉孝孫細草** 置三百九十六，自相乘得一十五萬六千八百一十六。以十二而一得一萬三千六十八。以開方法除。借一算子於下。常超一位至百止。上商置一百，下置一萬於下法之上，名曰方法。以方法命上商，除實一萬。退方法，倍之，下法再退。又置一十於上商之下。又置一百於下法上，名曰隅法。以方、隅二法皆命上商，除實二千一百。又隅法倍之，以從方法，退一位，下法再退。又置四於上商一十之下。又置四於下法之上，名曰隅法。以方、隅二法皆命上商，除實八百九十六，餘得七十二。合前問。

唐・佚名《夏侯陽算經》卷上《明乘除法》 四曰：開平方除。借一算，爲下法。步之，超一位。冪方十，其積有百；冪方百，其積有萬。至百言十，至萬言百，故曰開平方除也。

又《論步數不等》 今有田二十一頃七十八畝一百八十步。問爲方幾何。

答曰：七百二十三步，奇一百七十一步。

術曰：先置頃、畝於上，以二百四十步乘之得五十二萬二千七百二十步。內零一百八十步。以開方除之。借一算爲下法。步之，超一位至百止。萬上置上商七百。下亦置七萬於實位之下，下法之上，名曰方法。命上商，除實，訖。倍方爲一十四萬。方法一退，下法再退。又置上商二十於前商後。又置二百於方法之下，下法之上，名曰隅法。以方、隅二法皆命上商，以除實，訖。倍隅法爲四百，從上。方法一退，下法再退。又置上商三於前商二十之後。又置三步於方法之下，下法之上，名曰隅法。以方、隅二法皆命上商，除實，訖。倍隅法得六，從上方法，得一千四百四十六。即是上方得七百二十三步，奇一百七十一步。

帶縱開平方法

算法

《九章算術》卷九《勾股》 今有邑方不知大小，各中開門。出北門二十步有木。出南門一十四步，折而西行一千七百七十五步見木。問邑方幾何。

答曰：二百五十步。

術曰：以出北門步數乘西行步數，倍之，爲實。**三國魏・劉徽注** 此以折而西行爲股，自木至邑[南]一十四步爲句，以出北門二十步爲(弦)[句]率，北門至西隅爲(單望)[股率]，半廣數。故以出北門乘(至南)[折西]行股，以(半)[股]率乘句之冪。然(北)[此]冪居半，以西行，故又倍之，合東，盡之也。并出南、[北]門步數，爲從法。開方除之，即邑方。**劉徽注** 此術之冪，東西[如邑方]，南北(邑)自木盡邑南(四)十[四]步之冪。各南、北步爲廣，邑方爲袤，故連兩廣爲[從]法(從)，并以爲隅外之冪也。

北魏・張丘建《張丘建算經》卷中 今有弧田，弦六十八步五分步之三，爲田二畝三十四步四十五分步之三十二。問矢幾何。

答曰：矢一十二步三分步之二。

術曰：置田積步，倍之爲實。以弦步數爲從法。開方除之即得矢。

又 卷下 今有圓圖上周一丈五尺，高一丈二尺，受粟一百六十八斛五㪷二十七分㪷之五。問下周幾何。

答曰：一丈八尺。

術曰：置粟積尺，以三十六乘之，以高而一。所得，以上周自相乘減之，餘，以上周尺數從，而開方除之。所得，即下周。**隋・劉孝孫細草** 置粟一百六十八斛五㪷，以分母二十七乘之，內子五，得四千五百五十。又以斛法乘之，得七千三百七十一。又以三十六乘，得二十六萬五千三百五十六。又以二十七除之，得九千八百二十八。又以

高一丈二尺除之，得八百一十九。又以上周自乘，得二百二十五。以減上數，餘五百九十四。又以上周一丈五尺爲從法，開方。合前問。

北周・甄鸞《五經算術》卷下　《禮記》投壺法：「壺頸脩七寸，腹脩五寸，口徑二寸半，容斗五升。」注云：「脩，長也。腹容斗五升，三分益一，則爲二斗，得圓囷之象，積三百二十四寸。以腹脩五寸約之，所得求其圓周，二尺七寸有奇。是爲腹徑九寸有餘。」甄鸞按：斛法一尺六寸二分，上十之，得一千六百二十寸爲一斛。積寸下退一等，得一百六十二寸爲一斗。積寸倍之，得三百二十四寸爲二斗。積寸以腹脩五寸約之得六十四寸八分。乃以十二乘之得積七百七十七寸六分。又以開方除之得圓周二十七寸，餘四十八寸六分。倍二十七，從方法得五十四。下法一亦從方法，得五十五。以三除二十七寸得九寸。又以三除不盡四十八寸六分，得一十六寸二分。與法俱上十之，是爲壺腹徑九寸五百五十分寸之一百六十二。母與子亦可俱半之，爲二百七十五分寸之八十一。**唐・李淳風等《注釋》**　按：其問宜云：今有壺腹脩五寸，容斗五升。三分益一則爲二斗，得圓囷之象。問積寸之與周徑各幾何。　曰：積三百二十四寸。周二尺七寸二百七十五分寸之二百四十三。徑九寸二百七十五分寸之八十一。　術宜云：置二斗，以斗法乘之得積寸。以腹脩五寸除之。所得，以十二乘之。開方除之得周數。三約之即得徑數。

開立方法分部

開立方法

題解

《九章筭術》卷四《少廣》　開立方　**三國魏・劉徽注**　立方適等，求其一面也。**唐・李淳風等注釋**　開立方知，立方適等，求其一面之數也。

宋・謝察微《謝察微筭經》　用字例義　開立，即自乘再乘之還原也。

清・劉澤楨《中西數學通解》卷一六　立方

立方者，等邊六面之體積也。以形而言，雖爲六面十二邊之所合。以積而言則爲自乘再乘之數。因其縱橫與高俱相等，故十二邊皆如一線。其得一邊，而十二邊莫不相同。其積之也，自線而面，自面而體，次第相乘，而後得其全積。其開之也，必次第折之，而後得其一邊，是故古人立爲方廉長廉之制。

帶縱較數立方　帶縱立方者，兩兩等邊長方體積也。高闊相等，惟長不同者，爲帶一縱立方。長闊相等，而皆比高多者，則爲帶兩縱相同之立方。至於長闊高皆不等者，則爲帶兩縱不同之立方。開之之法，大概與立方同，祇有帶縱之異耳。

又　帶縱和數立方　帶縱較數立方，其法已難。而帶縱和數立方，立法尤難。

算法

《九章筭術》卷四《少廣》　開立方　術曰：置積爲實。借一筭，步之，超二等。**三國魏・劉徽注**　言千之面十，言百萬之面百。議所得，以再乘所借一筭爲法，而除之。**劉徽注**　再乘者，亦求爲方冪。以上議命而除之，則立方等也。除已，三之爲定法。**劉徽注**　爲當復除，故豫張三面，以定方冪爲定法也。復除，折而下。**劉徽注**　復除者，三面方冪以皆自乘之數，須得折、議定其厚薄爾。開平冪者，方百之面十；開立冪者，方千之面十。據定法已有成方之冪，故復除當以千爲百，折下一等也。以三乘所得數，置中行。**劉徽注**　設三廉之定長。復借一筭，置下行。**劉徽注**　欲以爲隅方，立方等未有定數，且置一筭定其位。步之，中超一，下超二(位)[等]。**劉徽注**　上方法，長自乘而一折；中廉法，但有長，故降一等；下隅法，無面長，故又降一等也。復置議，以一乘中，**劉徽注**　爲三廉備冪也。再乘下，**劉徽注**　令隅自乘，爲方冪也。皆副以加定法。以定除。**劉徽注**　三面、三廉、一隅皆已有冪，以上議命之而除去三(表)[冪]之厚也。除已，倍下、并中，從定法。**劉徽注**　凡再以中，三以下，加定法者，三廉各當以兩面之冪連於[兩方之面，一隅連於]三廉之端，以待復除也。言不盡意，解此要當以棊，乃得明耳。復除，折下如前。開之不盡者，亦爲不可開。**劉徽注**　術亦有以定法命分者，不如故冪開方，以微數爲分也。若積有分者，通分內子爲定實。定實乃開之。訖，開其母以報除。**唐・李淳風等注釋**　分母可開者，竝通之積先合三母。既開之後一母尚存，故開分母，求一