

數學典

中國傳統算法分典

一元方程解法(開方術)總部

主編 段耀勇 周暢

四

四

一元方程解法(開方術)總部

開方部 三

 綜論 三

 開平方分部 三

 開平方方法 三

 題解 三

 算法 四

 帶縱開平方方法 七

 算法 七

 開立方方法分部 八

 開立方方法 八

 題解 八

 算法 八

 帶縱開立方方法 一二

 算法 一二

 立成釋鎖和賈憲三角分部 三四

 綜論 三四

 賈憲三角 三八

 算法 三八

 立成釋鎖平方方法 五四

 算法 五四

 益積術與減縱術 六二

 算法 六二

 立成釋鎖帶縱開平方方法 六八

 算法 六八

 立成釋鎖立方方法 九〇

 算法 九〇

 立成釋鎖高次方法 一二二

 算法 一二二

 開諸乘方簡法 一五二

 算法 一五二

 增乘開方部 一五五

 增乘開諸乘方分部 一五五

 題解 一五五

 綜論 一五五

 增乘開平方方法 一五六

 算法 一五六

 增乘開立方方法 一六一

 算法 一六一

 增乘開三乘、四乘方法 一六四

 算法 一六四

 增乘開五乘以上方法 一六六

 算法 一六六

 增乘帶縱開諸乘方法 一七〇

 算法 一七〇

 正負開方分部 一七四

 綜論 一七四

 正負開平方方法 一七六

 算法 一七六

 正負帶縱開平方方法 一八三

 算法 一八三

 正負帶縱開立方方法 一八六

算法	一八六	算法	二七三
正負開三乘及以上方法	一八七	開減縱平方方法	二七八
綜論	一八七	算法	二七八
算法	一八七	開負偶和翻法平方方法	二八三
正負投胎開方法	一九一	算法	二八三
算法	一九一	開立方和帶縱立方分部	二八八
正負換骨開方法	一九四	開立方方法	二八八
算法	一九四	算法	二八八
正負玲瓏開方法	二〇三	開帶縱立方方法	三〇二
算法	二〇三	算法	三〇二
之分術分部	二一〇	開三乘方及以上方分部	三一—
綜論	二一〇	開三乘方法	三一—
算法	二一一	算法	三一—
之分開平方方法	二一一	開帶縱三乘方法	三一五
算法	二一一	算法	三一五
之分帶縱開平方方法	二一三	開益縱三乘方法	三三一
算法	二一三	算法	三三一
之分開立方及高次方法	二二一	開負偶三乘方法	三二八
算法	二二一	算法	三二八
增乘開方的拓展分部	二三〇	開四乘方及五乘法	三三四
綜論	二三〇	算法	三三四
算法	二三七	算法	三三四
珠算開方部	二五五	根與係數的關係部	三四六
題解	二五五	題解	三四六
綜論	二五六	綜論	三四六
開平方和開帶縱平方分部	二五七	可知方程分部	三四八
開平方方法	二五七	二次可知方程	三四八
算法	二五七	算法	三四八
開帶縱平方方法	二七三	三次可知方程	三五—

算法.....三五一
不可知方程分部.....三五四
題解.....三五四

二次方程有兩正根.....三五六
算法.....三五六

三、四次方程有三、四正根.....三六三
算法.....三六三

可知或不可知方程分部.....三七九
根與係數的關係.....三七九

算法.....三七九
虛根.....三九三
算法.....三九三

重根.....三九六
算法.....三九六

負根.....三九八
算法.....三九八

方程變形.....四〇〇
算法.....四〇〇

不定問題總部.....四〇〇

不定問題總部

同餘問題部.....四〇七

題解.....四〇七

綜論.....四〇八

算法.....四一〇

紀事.....四七九

五家共井和百雞問題部

五家共井分部.....四八〇

算法.....四八〇

百雞問題分部.....四八一

綜論.....四八一

算法.....四八六

調日法部.....五四五

零約術分部.....五四五
算法.....五四五

調日法分部.....五四六
題解.....五四六

綜論.....五四六
算法.....五五二

垛積招差總部

數列部.....五六七

等差數列分部.....五六七
算法.....五六七

等比數列分部.....五六八
綜論.....五六八

算法.....五六八

垛積部.....五七〇

三角垛分部.....五七〇
綜論.....五七〇

茭草垛——圭垛.....五七〇
算法.....五七〇

三角垛——落一形垛.....五七五
算法.....五七五

三角落一形垛——撒星形垛.....五八三
算法.....五八三

三角撒星形垛——撒星更落一形垛.....五八六

算法	五八六	三乘支垛分部	六三九
三角撒星更落一形垛	五八八	題解	六三九
算法	五八八	算法	六三九
三角垛	五八九	圖表	六四二
算法	五八九	四角嵐峰形垛系統分部	六四七
三角自乘垛	五九二	算法	六四七
算法	五九二	箭束垛分部	六四八
三角變垛	五九八	綜論	六四八
算法	五九八	方箭束	六四八
四角垛分部	六〇四	算法	六四八
四角垛——方垛	六〇四	圓箭束——六角箭束	六五一
算法	六〇四	算法	六五一
四角落一形垛——嵐峰形垛	六一〇	方圓箭束交參	六五四
算法	六一〇	算法	六五四
一乘支垛——四角撒星落垛系統	六一三	三角箭束	六五八
算法	六一三	算法	六五八
乘方垛	六一四	圓錐垛、臺垛分部	六五九
算法	六一四	題解	六五九
支垛	六二一	綜論	六五九
算法	六二一	圓錐——臺垛	六五九
三角、四角垛疊藏	六二七	算法	六五九
算法	六二七	三角臺垛	六六九
圖表	六三二	算法	六六九
菱草嵐峰形垛——二乘支垛分部	六三七	四角臺垛	六七三
題解	六三七	算法	六七三
算法	六三七	芻蕘垛分部	六七六
圖表	六三八	綜論	六七六
三角嵐峰形垛系統——嵐峰更落一形垛、		算法	六七六

蜀童塚分部 六七八

綜論 六七八

算法 六七八

雜例分部 六八二

綜論 六八二

算法 六八二

圖表 七〇九

招差術部 七三八

題解 七三八

綜論 七三八

算法 七四一

圖表 七七六

極限思想與無窮小分割方法總部

割圓術部 七八三

圓面積公式的證明分部 七八三

綜論 七八三

圓周率分部 七八三

綜論 七八三

算法 七九一

圓率與方率分部 七九三

算法 七九三

弧田密率分部 七九三

算法 七九三

劉徽原理部 七九五

綜論 七九五

算法 七九五

祖暅之原理與球體積部 七九六

祖暅之原理分部 七九六

算法 七九六

球體積分部 七九六

題解 七九六

綜論 七九六

算法 七九六

數學與天文曆法總部

上元積年部 八〇一

題解 八〇一

綜論 八〇一

算法 八〇二

插值法與相減相乘法部 八一

題解 八一

等間距二次插值法分部 八一

題解 八一

三次和高次插值法分部 八一

綜論 八一

算法 八一

不等間距插值法分部 八一

綜論 八一

算法 八一

相減相乘法分部 八三五

算法 八三五

綴術分部 八三五

題解 八三五

算法 八三五

其他問題部 八三九

弧矢割圓分部	八三九
綜論	八三九
黃赤道差分部	八三九
綜論	八三九
黃赤道內外度分部	八四一
綜論	八四一
白道交周分部	八四二
綜論	八四二
其餘問題分部	八四四
算法	八四四

引用書目

一元方程解法(開方術)總部

主編 段耀勇 周暢

開方部

綜論

宋·楊輝《楊輝算法·乘除通變本末》開方乃算法中大節目，勾股、旁要、演段、鎖積多用。例有七體：一曰開平方，二曰積平圓，三曰開立方，四曰開立圓，五曰開分子方，六曰開三乘以上方，七曰帶從開方。並載少廣、勾股二章作一日學一法，用兩月演習題目，須討論用法之源，庶久而無失念矣。

清·孔廣森《少廣正負術內篇》卷上 少廣者，所以測量物之形體，推積以知冪，推冪以知邊。凡數之始必生於邊，邊與邊乘是為平冪，邊與冪乘是為立冪，冪與冪乘是為三乘方，冪與積乘為四乘方，積與積乘是為五乘方。其廣袤相等者，為正諸乘方，不等者為從諸乘方。有廣袤故有和較，有和較故有正負。和則以所求之邊減之，較則於所求之邊加之，得多為正，得少為負。凡以正乘者，同名不變，異名則變。凡以負乘者，異名不變，同名則變。正負交變，必視其異形同實之件，相權而互齊之。斯隱詭糅錯之數皆見，蓋其理近於方程，而其用以該商功勾股之變，簡以御繁，易以知難者焉。自唐王孝通《緝古算經》，宋秦九韶《數學九章》已寓其術。厥後欒城李氏大申明之，著《測圓海鏡》《益古演段》二書。至明而失其傳，遂有顧氏《測圓釋術》之編出，不達敬齋所立天元一細草，盡舉而刪去，妄哉。西人入中國，見此法取而更修之謂之借根方。然彼或譯言東來法，未嘗泯其得自中國也。但借根方不復因天元以取定法，又開方不用古從廉、負隅、益積、翻積諸式。於是有數無法，煩亂而不可究，非本少廣之意矣。廣森備官翰林，與窺中秘得見王秦李三家之書，覃思研究，通其義類，試諸籌計，得草若干。顧今人抄習於開諸乘方之法，苦其方廉稠疊，而莫明其方廉之所由生。宣城梅氏《少廣拾遺》亦但有平方立方廉隅圖，至三乘方以上則云不能為圖。愚謂物之形體，平方、立方盡之矣。特平冪立積之不可知者，乃借諸乘方以求之。本有其數而無其形，將圖其有形者則冪不可以為邊，積不可以為冪。將於其無形者，而假圖以明其數，則冪積即可變為邊，諸乘皆可變為平方也。輒構諸乘方廉隅圖書首。

一元方程解法(開方術)總部·開方部

又 卷中 古《少廣經》，但有正立方開法。《隋志》云：宋末南徐州從事史祖沖之設開差冪開差立，學官莫能究其深奧。此實開從立方之權輿也。但從立方之視正立方變矣，而從立方之中，又有正變之不同。其正者方有六面，各兩兩相等，本以長濶相乘，與高再乘得積，故據較以求邊者，則以高濶較長濶較相併，為從廉，兩較相乘為方法，開之得濶也。據和以求邊者，即併兩和為負廉，亦兩和相乘為方法也。若其方法非由廉數相乘而得者，乃變而或缺其旁，或虛其裏，不必截然有六面之可尋矣。要其方廉之加減，立法仍同，固正變可以通御者爾。

清·梅文鼎《少廣拾遺》 少廣為《九章》之一，其開平方方法，為薄海內外測冪家所需，非隸首不能作也。

清·汪萊《乘方釋例序》 算學之書，汗牛充棟，莫不以開方為大法。故九數之中，方田、粟米、商功、勾股四者之精義，反復研究終統於少廣一章。

清·黎應南《開方說跋》 開方者，除法也。超步定位，肇始於少廣。

清·丁取忠《開方說序》 開方之用進退步法，始於《九章》之少廣及《孫子算經》，然古人祇以馭開平方、立方之帶縱者，未嘗有正負相間之諸乘方也。

清·李善蘭《開方別術序》 算數莫難於開方。

開平方分部

開平方方法

題解

《九章算術》卷四《少廣》 開方 三國魏·劉徽注 求方冪之一面也。

唐·李淳風等《九章算術注釋》 此術「開方」者，求方冪之面也。

宋·謝察微《謝察微算經》 開方，即自乘還原也。

清·鄧建章《中西算法入門匯通》卷上《釋名》 方，大方也。一乘為平方，再乘為立方。三乘為三乘方，以下類推。【略】廉，倍也。【略】隅，小方也。與大

方同狀。平方隅，一曰廉。

清·張作楠《倉田通法·量倉通法》卷三 平方，長濶相等，如碁局。帶縱平方，長多於濶，如直田。縱之濶如平方，長則如縱。縱與方相乘，得縱積。以加方積，成長方形。

清·劉澤楨《中西數學通解》卷一〇 平方

平方者，等邊四直角之面積也。以形而言，則為兩矩所合。以積而言，則為自乘之數。因其有廣無厚，故曰平方。因其縱橫相等，故曰正方。蓋方積面也，而其邊則線也。有線求面，則自乘而得積。有面求線，則開方而得邊。開方之法，略與歸除同，但歸除有法有實。而開方則有實無法，故古人立為商除廉隅之制以相求。

平方帶縱

帶縱平方者，兩等邊直角長方面積也。有積數因長比闊之較，或長與闊之和而得邊，故曰帶縱。蓋正方之縱橫皆同，故止有積，即可得其邊。若長方則縱橫不等，知其積。又必知其縱橫相差之較或縱橫相併之和，始能得其邊。

算法

《九章算術》卷四《少廣》 今有積五萬五千二百二十五步。問為方幾何。

答曰：二百三十五步。

明·吳敬《九章算法比類大全》卷四《少廣》 法曰：置積五萬五千二百二十五步為實。照前法商置第一位得二百。下法亦置二百進二位為二萬，名曰方法。與上商二除實四萬，餘實一萬五千二百二十五。乃二乘方法得四萬，為廉法，一退得四千。下法再退得百。續商置第二位，以廉法四千商實得三十，下法亦置三十進一位為三百，為隅法。以廉、隅二法共四千三百，皆與上商三除實一萬二千九百，餘實二千三百二十五。乃二乘隅法三百，得六百，併入廉法四千，共四千六百。一退得四百六十，下法再退得一。又商置第三位，以廉法四百六十商實得五。下法亦置五，為隅法，以廉、隅二法共四百六十五，皆與上商五除實盡。合問。

《九章算術》卷四《少廣》 有積二萬五千二百八十一。問為方幾何。

答曰：一百五十九步。

又有積七萬一千八百二十四步。問為方幾何。

答曰：二百六十八步。

宋·楊輝《楊輝詳解九章算法》卷六《少廣》 解題：圓三象天。方四象地。圓居方四分之三。以積立術。求方助乘除之妙用。考究源流莫不由此。

明·嚴恭《通原算法》

術曰：置積為實。借一算步之超一等，言百之面

十也，言萬之面百也。上商二百乘下隅為廉二百，呼除本積二二除去四萬，餘積三萬一千八百二十四步為實。倍廉為方法，得四百。續上商六十，乘下隅為廉六十，於四百之下，與上商六十呼除本積。四六除去二萬四千，六六除去三千六百。餘積四千二百二十四步為實。又倍廉六十，得一百二十。併入方法，共五百二十。續上商八步，乘下隅為廉八步，於五百二十之下，與上商八步，呼除本積。五八除去四千，二八除去一百六十，八八除去六十四步，適盡。得方面二百六十八步，合前問。

明·吳敬《九章算法比類大全》卷四《少廣》

法曰：圓三象天，方四象地，圓居方四分之三，以積立術求方，助乘除之妙用。考究源流，莫不由此而治之。置積七萬

一千八百二十四步為實。別置一算，為下法。原下之法。從末位常超一位，約實。百下定十，萬下定百。於實上商置第一位得二百。下法之上亦置上商。二百進一位得二萬。名曰方法。與上商二除實四萬，餘實二萬一千八百二十四。乃二乘方法得四萬，為廉法，一退得四千。下法再退，得百。於上商之次續商第二位。以廉法四千，商實得六十。下法之上亦置上商，六十進一位為六百為隅法。以隅、廉二法共四千六百，皆與上商六除實二萬七千六百。餘實四千二百二十四。乃二乘隅法六百得一千二百。併入廉法四千共五千二百，一退得五百二十。下法再退得一。又於上商置第三位，以廉法五百二十商實得八。下法亦置上商八為隅法。以廉、隅二法共五百二十八，皆與上商

二	百	六	十	八
廉	長	三	百	零
方	積	五	萬	五
千	二	百	二	十
五	百	二	十	五
步	為	實		
置	第	一	位	得
二	百			
下	法	亦	置	二
百	進	二	位	為
二	萬			
名	曰	方	法	
與	上	商	二	除
實	四	萬		
餘	實	一	萬	五
千	二	百	二	十
五				
為	廉	法		
一	退	得	四	千
下	法	再	退	得
百				
續	商	置	第	二
位	以	廉	法	四
千	商	實	得	三
十				
為	隅	法		
以	廉	隅	二	法
共	四	千	三	百
皆	與	上	商	三
除	實	一	萬	二
千	九	百		
餘	實	二	千	三
百	二	十	五	
乃	二	乘	隅	法
三	百			
得	六	百		
併	入	廉	法	四
千	共	五	千	二
百	一	退	得	四
百	四	十		
又	於	上		
商	置	第	三	位
以	廉	法	五	百
二	十	商	實	得
八				
為	隅	法		
以	廉	隅	二	法
共	五	百	二	十
八	皆	與	上	商

八除實盡。合問。

《九章算術》卷四《少廣》 有積五十六萬四千七百五十二步四分步之一。問爲方幾何。

答曰：七百五十一半。

明·嚴恭《通原算法》 術曰：列積步以四分通之，納子。又以四分再自乘得六十四乘之爲實。以開方法除之，得一萬二千二十四分，却以四分自乘之，得一十六爲法，除之即得。

明·吳敬《九章算法比類大全》卷四《少廣》 法曰：置積五十六萬四千七百五十二步，以分母四通之，加內子一共得二百二十五萬九千九百。又以分母四乘之，得九百三萬六千三十六爲實。照前法商置第一位得三千，下法亦置三千，進三位爲三百萬爲方法，與上商三除實九百萬，餘實三萬六千三十六。乃二乘法得六百萬，爲廉法，三退得六千。下法六退得一。續商置第四位以廉法六千商實得六，下法亦置六爲隅法，以廉、隅二法共六千六，皆與上商六，除實盡。得三千六，却以分母四爲法除之，得七百五十一半。合問。

《九章算術》卷四《少廣》 又有積三十九億七千二百一十五萬六百二十五步，問爲方幾何。

答曰：六萬三千二十五步。

開方術曰：置積爲實。借一算，步之，超一等。三國魏·劉徽注 言百之面十也，言萬之面百也。議所得，以一乘所借一算爲法，而以除。劉徽注 先得黃甲之面，上下相命，是自乘而除也。除已，倍法爲定法。劉徽注 倍之者，豫張兩面朱算定表，以待除，故曰定法。其復除。折法而下。劉徽注 欲除朱算者，本當副置所得成方，倍之爲定法，以折、議、乘，而以除。如是當復步之而止，乃得相命，故使就上折下。復置借算，步之如初，以復議一乘之，劉徽注 欲除朱算之角黃乙之算，其意如初之所得也。所得副以加定法，以除。以所得副從定法。劉徽注 再以黃乙之面加定法者，是則張兩青算之表。復除，折下如前。若開之不盡者，爲不可開，當以面命之。劉徽注 術或有以借算加定法而命分者，雖粗相近，不可用也。凡開積爲方，方之自乘當還復其積分。令不加借算而命分，則常微少；其加借算而命分，則又微多。其數不可得而定。故惟以面命之，爲不失耳。譬猶以三除十，以其餘爲三分之一，而復其數可舉。不以面命之，加定法如前，求其微數。微數無名者以爲分子，其一退以十爲母，其再退以百爲母。退之彌下，其分彌細，則

朱算雖有所乘「棄」之數，不足言之也。若實有分者，通分內子爲定實，乃開之。訖，開其母，報除。唐·李淳風等注釋 分母不可開者，並通之積先合二母。既開之後，一母尚存，故開分母，求一母爲法，以報除也。若母不可開者，又以母(再)乘定實，乃開之。訖，令如母而一。李淳風等注釋 分母不可開者，本一母也。又以母乘之，乃合二母。既開之後，亦一母存焉。故令一母而一，得全面也。又按：此術「開方」者，求方算之面也。「借一算」者，假借一算，空有列位之名，而無除積之實。方隅得面，是故借算列之於下。「步之，超一等」者，方十自乘，其積有百，方百自乘，其積有萬，故超位至百而言十，至萬而言百。「議所得，以一乘所借算爲法，而以除」者，先得黃甲之面，以方爲積者兩相乘。故開方除之，還令兩面上下相命，是自乘而除之。「除已，倍法爲定法」者，實積未盡，當復更除，故豫張兩面朱算表，以待復除，故曰定法。「其復除，折法而下」者，欲除朱算，本當副置所得成方，倍之爲定法，以折、議、乘之，而以除。如(初)是，當復步之而止，乃得相命，故使就上折之而下。「復置借算，步之如初，以復議一乘之，所得副以加定法，以定法除」者，欲除朱算之角黃乙之算。「以所得副從定法」者，再以黃乙之算「面」加定法，是則張兩青算之表，故如前開之，即合所問。

宋·賈憲《黃帝九章算經細草》卷四《少廣》《永樂大典》卷一六三四 法曰：置積爲實，別置一算名曰下法，原下之法。於實數之下，自末位常超一位，初乘時過一位，今超一位。約實至首位盡而止。一下定一，一百下定十，萬下定百，百萬下定千。於實上商置第一位得數，以方法一一，二二，三三，四四，五五，六六，七七，八八，九九之數爲商，商本體實數。下法之上，亦置上商數。即原乘法數也。名曰方法。於本積內，去其一方。命上商除實，法實相呼，以破積數。二乘法，一退爲廉。一方帶兩直，以助其狀如廉，故二乘退位。下法再退，下法，即定位之算，再退重定。於上商之次，續商第二位得數。與上意同。於廉法之次，照上商置隅，一方帶二廉，正闕一角，角即名隅。以方廉二法，亦原乘之法也。皆命上商除實，二乘隅法併入廉法一退。倍隅人廉作一大方，以乘次位得數。下法再退，前意。商置第三位得數。下法之上照上商置隅。以廉隅二法，皆命上商除實。第二位解意同。得平方一面之數。更有不盡之數，依第三位體面倍隅入廉退位商之。

《九章算術》卷四《少廣》 今有積一千五百一十八步四分步之三。問爲圓周幾何。

答曰：一百三十五步。三國魏·劉徽注 於徽術，當周一百三十八步一十分步之一。唐·李淳風等注釋 此依密率，爲周一百三十八步五十分步之九。

宋·賈憲《黃帝九章算經細草》卷四《少廣》《永樂大典》卷一六三四 法曰：分母乘全步入內，子以圓法十二乘之。又以分母再自乘乘之。開平方求積。以分母自乘為法除之，以分母自乘為法除實得周。

草曰：分母四乘全步，一千五百一十八步。入內子三，得六千七十五。以圓法十二乘之，得七萬二千九百。又以分母四再自乘為六十四。乘之為實，四百六十六萬五千六百。開平方別置一算為下法，原下之法。從未常超一位約實，百下約十，萬下約百，百萬下約千。實上商置第一位得數，二千。下法之上，亦置上商二十，名曰方法。乃命上商除實四百萬，二乘方法一退，為廉，乘作四千退為四十。下法再退，百下定十。於上商之次續商第二位得數，一百，共為二千一百。廉法之次，上商置隅一百，以廉隅二法皆命上商除實，除四十一萬，餘二十五萬五千六百。二乘隅法，併為廉一退，得四千二百。下法再退，於末位百下定十。又以上商置第三位得數，六十。下法之上亦置隅六十，除實，適盡得二千一百六十。以分母自乘為法，除之。

宋·楊輝《楊輝詳解九章算法》卷六《少廣》 解題：以方改圓驗方圓相通也。圓居四分之三。

明·嚴恭《通原算法》 術曰：列積步，以四分通之，納子，十二乘之。又以四分再自乘，得六十四乘之為實。以開方除之，得二千一百六十分。却以四分自乘得一十六為法。除之即得。

明·吳敬《九章算法比類大全》卷四《少廣》 法曰：以方改圓，圓居方四分之三也。置積一千五百一十八步，以分母四乘之得六千七十二，加入內子三，共得六千七十五，以圓法十二乘之，得七萬二千九百。又以分母四乘之得二十九萬一千六百，為實。以開平方方法除之。照前法，商置第一位得五百，下法亦置上商五五進二位，得五萬為方法，與上商五除實二十五萬，餘實四萬一千六百，乃三乘方法得一十萬為廉法，一退得一萬，下法再退得萬，續商置第二位，以廉法一萬商實得四十，下法亦置上商四十，進一位為四百，為隅法，以廉隅二法，共一萬四百，皆與上商四除實盡，得五百四十。却以分母四為法除之。得圓周合問。

《九章算術》卷四《少廣》 又有積三百步。問為圓周幾何。

答曰：六十步。三國魏·劉徽注 於徽術，當周六十一步五十分步之十九。

唐·李淳風等注釋 依密率，為周六十一步一百分步之四十一。

明·吳敬《九章算法比類大全》卷四《少廣》 法曰：置積三百步，以圓法十二乘之得三千六百步，為實。以開平方方法除之，上商六十步，下法亦置上商六十進一位為六百，為方法，與上商六除實盡。合問。

《九章算術》卷四《少廣》 開圓術曰：置積步數，以十二乘之，以開方除之，即得周。三國魏·劉徽注 此術以周三徑一為率，與舊圓田術相返覆也。於徽術，以三百一十四乘積，如二十五而一，所得，開方除之，即周也。（開方除之，即徑。）是為據見釋以求周，猶失之於微少。其以二百乘積，二百五十七而一，開方除之，即徑，猶失之於微多。李淳風等注釋 此注於徽術求周之法，其中不用「開方除之，即徑」六字，今本有者，衍贖也。依密率，八十八乘之，七而一。按周三徑一之率，假令周六徑二，半周半徑相乘得三。周六自乘得三十六，俱以等數除，得三。周之數十二也。其積：本周自乘，合以二乘之，十二而一，得積三也。術為一乘不長，故以十二而一，得此積。今還元，置此積三，以十二乘之者，復其本周自乘之數。凡物自乘，開方除之，復其本數。故開方除之，即周。

晉·佚名《孫子算經》卷中 今有積二十三萬四千五百六十七步。問為方幾何。

答曰：四百八十四步九百六十八分步之三百一十一。

術曰：置積二十三萬四千五百六十七步為實。次借一算為下法。步之，超一位至百而止。商置四百於實之上。副置四萬於實之下，下法之上，名為方法。命上商四百，除實。除訖，倍方法，一退，下法再退。復置上商八十，以次前商。副置八百於方法之下，下法之上，名為廉法。方、廉各命上商八十，以除。訖，倍廉法，上從方法。方法一退，下法再退。復置上商四，以次前。副置四於方法之下，下法之上，名曰隅法。方、廉、隅各命上商四，以除實。除訖，倍隅法，從方法。上商得四百八十四，下法得九百六十八，不盡三百一十一。是為方四百八十四步九百六十八分步之三百一十一。

北魏·張丘建《張丘建算經》卷中 今有田積一十二萬七千四百四十九步，問為方幾何。

答曰：三百五十七步。

術曰：以開方除之即得。隋·劉孝孫細草 置前積步數於上。借一算子於下。常超一位，步至百止。以上商置三百於積步之上。又置三萬於積步之下，下法之上，名曰方法。以方命上商，三三如九，除九萬。又倍方法，一退，下法再退。又置五十於上商之下。又置五百於下法之上，名曰隅法。以方、隅二法除實，餘有四千九百四十九。又倍隅法，以併方，得七千，退一等，下法再退。又置七於上商五十之下。又置七於下法之上，名曰隅法。以方、隅

二法除實，得合前問。

今有田方一百二十一，欲以爲圓，問周幾何。

答曰：四百一十九步八百三十九分步之一百三十一。

術曰：方自相乘，又以十二乘之爲實。開方除之即得。劉孝孫細草 以一百二十一自相乘得一萬四千六百四十一。又以十二乘之一十七萬五千六百九十二。借一算子於下。常超一位，步至百止。上商得四百。下置四萬爲方法，命上商除一十六萬。倍方法，退一位，得八千，下法退二等。又置上商得一十。又置下法之一百，名曰隅法。以方、隅除實八千一百。又置倍隅法從方法，退一等，得八百二十。又置九於一十之下。又置九於下法之上，名隅法。以方命上商，八九七十二，除七千二百。又以方法二命上商九，除一百八十。又以隅法九命上商九，除八十一，餘一百三十一，即四百一十九步八百三十九分步之一百三十一。合前問。

又 今有圓田周三百九十六步，欲爲方，問得幾何。

答曰：一百一十四步二百二十九分步之七十二。

術曰：周自相乘，十二而一。所得，開方除之即得方。劉孝孫細草 置三百九十六，自相乘得一十五萬六千八百一十六。以十二而一得一萬三千六十八。以開方法除。借一算子於下。常超一位至百止。上商置一百，下置一萬於下法之上，名曰方法。以方法命上商，除實一萬。退方法，倍之，下法再退。又置一十於上商之下。又置一百於下法上，名曰隅法。以方、隅二法皆命上商，除實二千一百。又隅法倍之，以從方法，退一位，下法再退。又置四於上商一十之下。又置四於下法之上，名曰隅法。以方、隅二法皆命上商，除實八百九十六，餘得七十二。合前問。

唐·佚名《夏侯陽算經》卷上《明乘除法》 四曰：開平方除。借一算，爲下法。步之，超一位。羈方十，其積有百；羈方百，其積有萬。至百言十，至萬言百，故曰開平方除也。

又《論步數不等》 今有田二十一頃七十八畝一百八十步。問爲方幾何。

答曰：七百二十三步，奇一百七十一步。

術曰：先置頃，畝於上，以二百四十步乘之得五十二萬二千七百二十步。內零一百八十步。以開方除之。借一算爲下法。步之，超一位至百止。萬上置上商七百。下亦置七萬於實位之下，下法之上，名曰方法。命上商，除實，訖。倍方爲一十四萬。方法一退，下法再退。又置上商二十於前商後。又置二百於方法之下，下法之上，名曰隅法。以方、隅二法皆命上商，以除實，訖。倍隅法爲四百，從上。方法一退，下法再退。又置上商三於前商二十之後。又置三步於

方法之下，下法之上，名曰隅法。以方、隅二法皆命上商，除實，訖。倍隅法得六，從上方法，得一千四百四十六。即是上方得七百二十三步，奇一百七十一步。

帶縱開平方法

算法

《九章算術》卷九《勾股》 今有邑方不知大小，各中開門。出北門二十步有木。出南門一十四步，折而西行一千七百七十五步見木。問邑方幾何。

答曰：二百五十步。

術曰：以出北門步數乘西行步數，倍之，爲實。三國魏·劉徽注 此以折而西行爲股，自木至邑〔南〕一十四步爲勾，以出北門二十步爲〔弦〕率，北門至西隅爲〔單望〕〔股率〕，半廣數。故以出北門乘〔至南〕〔折西〕行股，以半〔股率〕率乘勾之率。然北〔此〕率居半，以西行，故又倍之，合東，盡之也。并出南〔北〕門步數，爲從法。開方除之，即邑方。劉徽注 此術之幕，東西〔如邑方〕，南北〔邑〕自木盡邑南〔四〕十〔四〕步之幕。各南北步爲廣，邑方爲表，故連兩廣爲〔從〕法〔從〕，并以爲隅外之幕也。

北魏·張丘建《張丘建算經》卷中 今有弧田，弦六十八步五分步之三，爲田二畝三十四步四十五分步之三十一。問矢幾何。

答曰：矢一十二步三分步之二。

術曰：置田積步，倍之爲實。以弦步數爲從法。開方除之即得矢。

又 卷下 今有圓圖上周一丈五尺，高一丈二尺，受粟一百六十八斛五斗二十七分斛之五。問下周幾何。

答曰：一丈八尺。

術曰：置粟積尺，以三十六乘之，以高而一。所得，以上周自相乘減之，餘，以上周尺數從，而開方除之。所得，即下周。隋·劉孝孫細草 置粟一百六十八斛五斗，以分母二十七乘之，內子五，得四千五百五十。又以斛法乘之，得七千三百七十一。又以三十六乘，得二十六萬五千三百五十六。又以二十七除之，得九千八百二十八。又以

高一丈二尺除之，得八百一十九。又以上周自乘，得二百二十五。以減上數，餘五百九十四。又以上周一丈五尺為從法，開方。合前問。

北周·甄鸞《五經算術》卷下 《禮記》投壺法：「壺頸脩七寸，腹脩五寸，口徑二寸半，容斗五升。」注云：「脩，長也。腹容斗五升，三分益一，則為二斗，得圓困之象，積三百二十四寸。以腹脩五寸約之，所得求其圓周，二尺七寸有奇。是為腹徑九寸有餘。」甄鸞按：斛法一尺六寸二分，上十之，得一千六百二十寸為一斛。積寸下退一等，得一百六十二寸為一斗。積寸倍之，得三百二十四寸為二斗。積寸以腹脩五寸約之得六十四寸八分。乃以十二乘之得積七百七十寸六分。又以開方除之得圓周二十七寸，餘四十八寸六分。倍二十七，從方法得五十四。下法一亦從方法，得五十五。以三除二十七寸得九寸。又以三除不盡四十八寸六分，得一十六寸二分。與法俱上十之，是為壺腹徑九寸五百五十分寸之一百六十二。母與子亦可俱半之，為二百七十五分寸之八十一。唐·李淳風等《注釋》按：其問宜云：今有壺腹脩五寸，容斗五升。三分益一則為二斗，得圓困之象。問積寸之與周徑各幾何。曰：積三百二十四寸。周二尺七寸二百七十五分寸之二十四十三。徑九寸二百七十五分寸之八十一。術宜云：置二斗，以斗法乘之得積寸。以腹脩五寸除之。所得，以十二乘之。開方除之得周數。三約之即得徑數。

開立方方法分部

開立方方法

題解

《九章算術》卷四《少廣》 開立方 三國魏·劉徽注 立方適等，求其一面也。

唐·李淳風等注釋 開立方知，立方適等，求其一面之數也。

宋·謝察微《謝察微算經》 用字例義 開立，即自乘再乘之還原也。

清·劉澤楨《中西數學通解》卷一六 立方

立方者，等邊六面之體積也。以形而言，雖為六面十二邊之所合。以積而言則為自乘再乘之數。因其縱橫與高俱相等，故十二邊皆如一線。其得一邊，而十二邊莫不相同。其積之也，自線而面，自面而體，次第相乘，而後得其全積。其開之也，必次第折之，而後得其一邊，是故古人立為方廉長廉之制。帶縱較數立方 帶縱立方者，兩兩等邊長方體積也。高闊相等，惟長不同者，為帶一縱立方。長闊相等，而皆比高多者，則為帶兩縱相同之立方。至於長闊高皆不等者，則為帶兩縱不同之立方。開之之法，大概與立方同，祇有帶縱之異耳。又 帶縱和數立方 帶縱較數立方，其法已難。而帶縱和數立方，立法尤難。

算法

《九章算術》卷四《少廣》 開立方 術曰：置積為實。借一算，步之，超二等。三國魏·劉徽注 言千之面十，言百萬之面百。議所得，以再乘所借一算為法，而除之。劉徽注 再乘者，亦求為方幕。以上議命而除之，則立方等也。除已，三之為定法。劉徽注 為當復除，故豫張三面，以定方幕為定法也。復除，折而下。劉徽注 復除者，三面方幕以皆自乘之數，須得折，議定其厚薄爾。開平幕者，方百之面十；開立幕者，方千之面十。據定法已有成方之幕，故復除當以千為百，折下一等也。以三乘所得數，置中行。劉徽注 設三廉之定長。復借一算，置下行。劉徽注 欲以為隅方，立方等未有定數，且置一算定其位。步之，中超一，下超二（位）〔等〕。劉徽注 上方法，長自乘而一折；中廉法，但有長，故降一等；下隅法，無面長，故又降一等也。復置議，以一乘中，劉徽注 為三廉備幕也。再乘下，劉徽注 令隅自乘，為方幕也。皆副以加定法。以定除。劉徽注 三面三廉，一隅皆已有幕，以上議命之而除去三（表）〔幕〕之厚也。除已，倍下，并中，從定法。劉徽注 凡再以中，三以下，加定法者，三廉各當以兩面之幕連於兩方之面，一隅連於三廉之端，以待復除也。言不盡意，解此要當以基，乃得明耳。復除，折下如前。開之不盡者，亦為不可開。劉徽注 術亦有以定法命分者，不如故幕開方，以微數為分也。若積有分者，通分內子為定實。定實乃開之。訖，開其母以報除。唐·李淳風等注釋 分母可開者，並通之積先合三母。既開之後一母尚存，故開分母，求一