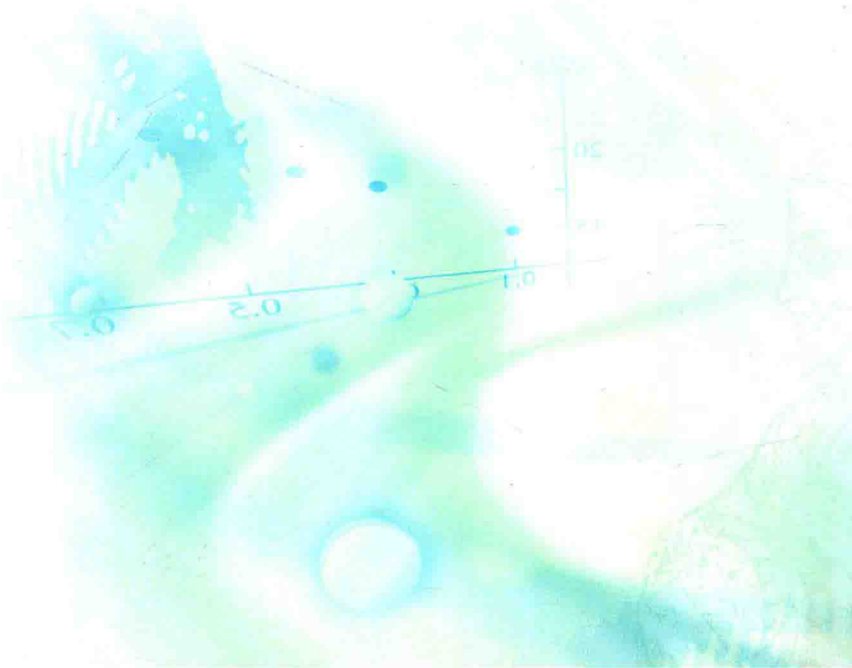
高等学校教材

高等数学

（上册）



王志刚　李文雅　主编

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学

Gaodeng Shuxue

（上册）

王志刚　李文雅　主编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是编者根据多年的教学实践，按照继承与改革的精神，依据“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，并参考了众多国内外教材的基础上编写而成。

本书分上、下两册，上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、微分方程，书末还附有常用的一些初等数学公式、常用的几种曲线及其方程、常用积分公式以及部分习题答案与提示. 其中标有 * 号的内容个别专业根据实际课时可不讲授。

本书结构严谨、逻辑清晰，注重突出高等数学的基本思想、基本理论和方法；在保持经典教材优点的前提下，适当介绍现代数学的思想和方法；对某些内容，通过进行结构调整，适当降低理论深度，加强应用能力的培养。本书可供高等学校理工类本科各专业的学生选用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册/王志刚，李文雅主编. --北京：高等教育出版社，2014. 8
ISBN 978-7-04-039989-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… ②李… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 160372 号

策划编辑 胡 颖 责任编辑 胡 颖 封面设计 王 洋 版式设计 童 丹
插图绘制 杜晓丹 责任校对 孟 玲 责任印制 张福涛

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京天来印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 24.25
字 数 440 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2014年 8 月第 1 版
印 次 2014年 8 月第 1 次印刷
定 价 37.70 元

物 料 号 39989-00

前言

为了适应高等数学的教学改革、提高教学质量和实行高等数学课程分层次教学、统一命题、统一考试和文理科实验班教学的需要，我们长期从事高等数学教学和研究工作的教师编写了本书，它是编者教学和研究经验的总结与体现。

在本书的编写过程中，我们注意把现代数学的思想方法与现代认知理论结合在一起，既突出数学学科自身的特点，继承和保持经典高等数学教材的优点，又力争从体系、内容、方法上进行改革，有所创新，力图做到遵循认知规律，使之简明易懂；既便于教师组织教学，又利于学生理解掌握；教学内容的深广度既与理工类各专业高等数学课程的教学基本要求相当，又与最新颁布的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中高等数学的内容相衔接。本书还充分体现了高等数学在理工类各专业、各领域的广泛应用，加强了对学生应用数学方法分析问题、解决问题能力的培养。

本书的例子、习题大部分按节配置，遵循循序渐进的原则，既注意基本概念、基本理论和方法，又注意加强各专业具有应用性的例子和习题的配置。每章后配置总习题，供学完一章后复习、总结、提高之用。每章开始给出的学习指导是按照教学基本要求编写的，目的是使学生了解本章的重点、难点和必须掌握的知识点，读者应认真阅读，加以巩固和提高。

完成本书（上、下册）全部教学内容，建议用 176 学时，不讲授带有 * 号内容的个别专业建议用 128 学时，各校也可根据实际自行掌握。

本书由王志刚、李文雅主编。第一章由张勇军执笔，第二章由符一平执笔，第三章由张燕和孙妍平执笔，第四、五、六章由王冬梅和林彩霞执笔，第七章由梁莉执笔，第八章和附录由李胜军执笔，第九章由郭纪云执笔，第十章由黄冬明执笔，第十一章由王李和王浩华执笔，第十二章由李今平执笔. 全书图形由王浩华完成，王志刚、李文雅负责修改和统稿。

本书的出版得到海南省中西部高校提升综合实力工作资金项目、海南省教育厅科研基金（编号 Hjkj2012-29）和海南大学 2013 年度自编教材资助项目（编号 Hdzbjc1305）资助。

限于编者水平，本书难免存在不妥之处，希望广大读者批评指正。

编　者

2014 年 1 月

目录

第一章　函数与极限 …… 1
§1.1　映射与函数 …… 2
1.1.1　集合、区间与邻域 …… 2
1.1.2　映射 …… 5
1.1.3　函数 …… 7
习题 1.1 …… 13
§1.2　数列的极限 …… 14
1.2.1　数列极限的定义 …… 14
1.2.2　收敛数列的性质 …… 20
习题 1.2 …… 22
§1.3　函数的极限 …… 22
1.3.1　函数极限的定义 …… 22
1.3.2　函数极限的性质 …… 27
习题 1.3 …… 29
§1.4　无穷小与无穷大 …… 30
1.4.1　无穷小 …… 30
1.4.2　无穷大 …… 32
习题 1.4 …… 33
§1.5　极限运算法则 …… 34
1.5.1　极限的四则运算法则 …… 34
1.5.2　复合函数的极限运算法则 …… 38
习题 1.5 …… 39
§1.6　极限存在准则　两个重要极限 …… 40
1.6.1　极限存在准则 …… 40
1.6.2　两个重要极限 …… 42
习题 1.6 …… 46
§1.7　无穷小与无穷大阶的比较 …… 47
习题 1.7 …… 50
§1.8　函数的连续性与间断点 …… 51
1.8.1　函数的连续性 …… 51

1.8.2 函数的间断点 …… 54
习题 1.8 …… 56
§1.9 连续函数的性质 …… 57
1.9.1 连续函数的有关定理 …… 57
1.9.2 闭区间上连续函数的性质 …… 58
习题 1.9 …… 61
总习题一 …… 62
第二章 导数与微分 …… 64
§2.1 导数的概念 …… 65
2.1.1 引例 …… 65
2.1.2 导数的定义 …… 66
2.1.3 求导数举例 …… 67
2.1.4 单侧导数 …… 70
2.1.5 导数的几何意义 …… 71
2.1.6 函数的可导性与连续性的关系 …… 72
习题 2.1 …… 73
§2.2 函数的求导法则与基本求导公式 …… 74
2.2.1 函数导数的四则运算法则 …… 74
2.2.2 反函数的求导法则 …… 76
2.2.3 复合函数的求导法则 …… 78
2.2.4 基本求导公式和求导法则 …… 81
习题 2.2 …… 83
§2.3 高阶导数 …… 84
2.3.1 高阶导数的概念 …… 84
2.3.2 高阶导数的求导法则 …… 87
习题 2.3 …… 89
§2.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 …… 90
2.4.1 隐函数的导数 …… 90
2.4.2 对数求导法 …… 91
2.4.3 由参数方程所确定的函数的导数 …… 92
习题 2.4 …… 95
§2.5 函数的微分 …… 96
2.5.1 微分的定义 …… 96
2.5.2 微分的几何意义 …… 99
2.5.3 基本初等函数的微分公式与微分运算法则 …… 99

2.5.4 高阶微分 …… 102
2.5.5 微分在近似计算中的应用 …… 104
习题 2.5 …… 107
总习题二 …… 109
第三章 微分中值定理与导数的应用 …… 111
§3.1 微分中值定理 …… 112
3.1.1 罗尔定理 …… 112
3.1.2 拉格朗日中值定理 …… 115
*3.1.3 柯西中值定理 …… 118
习题 3.1 …… 119
§3.2 洛必达法则 …… 120
3.2.1 $\frac{0}{0}$型未定式 …… 121
3.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$型未定式 …… 122
习题 3.2 …… 125
*§3.3 泰勒公式 …… 126
*习题 3.3 …… 135
§3.4 函数的单调性与曲线的凹凸性 …… 136
3.4.1 函数的单调性 …… 136
3.4.2 曲线的凹凸性与拐点 …… 139
习题 3.4 …… 143
§3.5 函数的极值与最大值最小值 …… 144
3.5.1 函数的极值及其求法 …… 144
3.5.2 最大值与最小值问题 …… 146
习题 3.5 …… 150
§3.6 函数图形的描绘 …… 151
3.6.1 渐近线的概念及其求法 …… 152
3.6.2 函数图形的描绘 …… 154
习题 3.6 …… 157
*§3.7 曲率 …… 158
3.7.1 弧微分 …… 158
3.7.2 曲率及其计算公式 …… 160
3.7.3 曲率圆与曲率半径 …… 164
*习题 3.7 …… 166

总习题三 …… 167
第四章　不定积分 …… 169
§4.1　不定积分的概念与性质 …… 170
4.1.1　原函数与不定积分的概念 …… 170
4.1.2　不定积分的几何意义 …… 172
4.1.3　基本积分公式 …… 173
4.1.4　不定积分的性质 …… 174
习题 4.1 …… 176
§4.2　换元积分法 …… 177
4.2.1　第一类换元积分法 …… 177
4.2.2　第二类换元积分法 …… 182
习题 4.2 …… 189
§4.3　分部积分法 …… 191
习题 4.3 …… 195
*§4.4　几类特殊函数的不定积分 …… 197
4.4.1　有理函数的不定积分 …… 197
4.4.2　三角函数有理式的不定积分 …… 202
4.4.3　简单无理函数的不定积分 …… 204
*习题 4.4 …… 206
§4.5　积分表的使用 …… 207
习题 4.5 …… 209
总习题四 …… 210
第五章　定积分 …… 213
§5.1　定积分的概念与性质 …… 214
5.1.1　两个实例 …… 214
5.1.2　定积分的定义 …… 215
5.1.3　定积分的几何意义 …… 216
5.1.4　定积分的基本性质 …… 217
习题 5.1 …… 221
§5.2　微积分基本公式 …… 222
5.2.1　变上、下限积分的概念与性质 …… 222
5.2.2　微积分基本定理 …… 224
习题 5.2 …… 226
§5.3　定积分的计算 …… 227
5.3.1　定积分的换元积分法 …… 228

5.3.2 定积分的分部积分法 …… 232
习题 5.3 …… 234
§5.4 反常积分 …… 235
5.4.1 无穷限积分 …… 235
5.4.2 瑕积分 …… 241
习题 5.4 …… 245
总习题五 …… 246
第六章 定积分的应用 …… 249
§6.1 定积分的元素法 …… 250
§6.2 定积分在几何学上的应用 …… 251
6.2.1 平面图形的面积 …… 251
6.2.2 空间立体的体积 …… 256
*6.2.3 平面曲线的弧长 …… 259
习题 6.2 …… 260
*§6.3 定积分在物理学上的应用 …… 261
6.3.1 变力沿直线所作的功 …… 261
6.3.2 水压力 …… 263
6.3.3 引力 …… 265
*习题 6.3 …… 266
总习题六 …… 267
第七章 微分方程 …… 269
§7.1 微分方程的基本概念 …… 270
7.1.1 引例 …… 270
7.1.2 微分方程的基本概念 …… 271
习题 7.1 …… 274
§7.2 一阶微分方程 …… 275
7.2.1 可分离变量的微分方程 …… 275
7.2.2 可化为可分离变量的方程 …… 277
7.2.3 一阶线性微分方程 …… 281
7.2.4 一阶微分方程的简单应用 …… 287
习题 7.2 …… 291
*§7.3 可降阶的二阶微分方程 …… 293
7.3.1 $y''=f(x)$ 型的微分方程 …… 293
7.3.2 $y''=f(x,y')$ 型的微分方程 …… 294
7.3.3 $y''=f(y,y')$ 型的微分方程 …… 297

*习题 7.3 …… 299
§7.4 高阶线性微分方程 …… 299
7.4.1 线性微分方程的解的结构 …… 300
*7.4.2 常数变易法 …… 303
习题 7.4 …… 307
§7.5 二阶常系数线性微分方程 …… 307
7.5.1 二阶常系数齐次线性微分方程 …… 308
*7.5.2 二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 312
*7.5.3 n 阶常系数线性微分方程 …… 319
习题 7.5 …… 321
总习题七 …… 321
附录 …… 324
附录一 常用的一些初等数学公式 …… 324
附录二 常用的几种曲线及其方程 …… 330
附录三 常用积分公式 …… 333
部分习题答案与提示 …… 344
参考文献 …… 375

第一章　函数与极限

学习指导

本章教学目的与要求

1. 掌握函数的表示法和函数的几何形态；理解复合函数和反函数概念；熟练掌握基本初等函数和了解初等函数.

2. 深刻理解极限概念；了解极限的两个存在准则——单调有界准则和夹逼准则；熟练掌握极限的运算法则；牢固掌握两个重要极限.

3. 理解无穷小，掌握它的性质和无穷小阶的比较；理解无穷大及其与无穷小的关系，理解极限与无穷小的关系.

4. 理解函数连续性的概念；熟练掌握连续函数的性质；了解函数的间断点及分类.

5. 掌握初等函数的连续性及闭区间上连续函数的性质.

重点　函数的定义；基本初等函数；极限概念与极限运算；初等函数的连续性.

难点　映射；复合函数；极限概念.

关键词　函数；映射；极限；无穷小；连续.

函数是高等数学的主要研究对象，而极限方法又是研究函数的基本方法和重要手段. 本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

§1.1 映射与函数

1.1.1 集合、区间与邻域

1. 集合概念

所谓**集合**是指具有某种(或某些)属性的一些对象的全体(简称“集”). 集合中的每个对象称为该集合的**元素**. 集合通常用大写的拉丁字母如 $A,B,C,\cdots$ 来表示,元素则用小写的拉丁字母如 $a,b,x,y,\cdots$ 来表示. 当 x 是集合 E 的元素时,我们就说 x **属于** E,记作 $x\in E$;当 x 不是集合 E 的元素时,就说 x **不属于** E,记作 $x\notin E$.

不包含任何元素的集合称为**空集**,记作$\varnothing$. 通常情况下我们将全体实数的集合称为实数集,用 $\mathbf{R}$ 表示;全体有理数的集合称为有理数集,用 $\mathbf{Q}$ 表示;全体整数的集合称为整数集,用 $\mathbf{Z}$ 表示;全体自然数的集合称为自然数集,用 $\mathbf{N}$ 表示,等等. 例如,$\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$,$\frac{1}{2}\notin\mathbf{Z}$,$\frac{1}{2}\notin\mathbf{N}$,$\frac{1}{2}\notin\varnothing$.

集合的表示方法通常有两种. 一是**列举法**,就是把集合中的元素一一列举出来表示. 例如,自然数集合 $\mathbf{N}$ 可以表示为

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

另一种是**描述法**,若集合 M 是具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的,就可以表示为

$$M=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如集合

$$E=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$

表示所有满足不等式 $x^2+y^2\leqslant 1$ 解的全体.

设 A,B 是两个集合,如果集合 A 中的元素都是集合 B 的元素,则称集合 A 是集合 B 的**子集**,记作 $A\subseteq B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supseteq A$(读作 B 包含 A),如图 1.1 所示.

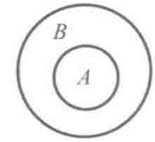


图 1.1

如果集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称集合 A 与集合 B **相等**,记作 $A=B$. 例如,设 $A=\{-1,1\}$,$B=\{x\mid x^2-1=0\}$,则 $A=B$.

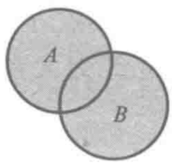
若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的**真子集**,记作 $A\subsetneqq B$. 例如,$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$. 显然,空集是任何非空集合的真子集,即 $\varnothing\subsetneqq A$.

2. 集合的运算

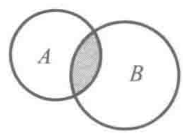
(1) **并集** 集合 A 与集合 B 所有的元素合并在一起组成的集合(相同元素只取一次),称为集合 A 与 B 的并集,记作 $A\cup B$,读作 A 并 B,如图 1.2(a)所示.

(2) **交集** 集合 A 与集合 B 的公共元素所组成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作 $A\cap B$,读作 A 交 B,如图 1.2(b)所示.

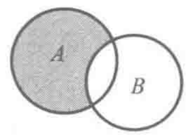
(3) **差集** 设有两集合 A 与 B,属于集合 A 而不属于集合 B 的所有元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集,记作 $A-B$,读作 A 减 B,如图 1.2(c)所示.



(a) $A\cup B$



(b) $A\cap B$



(c) $A-B$

图 1.2

特别地,若集合 $B\subsetneqq A$,则称 $A-B$ 为集合 B 关于集合 A 的**余集**,亦称**补集**,记作 $\overline{B}$ 或 B^C. 通常我们所讨论的问题是在一个全集 I(常称为**基本集**)中进行,所研究的其他集合 A 都是 I 的子集,此时称 $I-A$ 为集合 A 的余集,记作 $\overline{A}$ 或 A^C.

集合的运算满足下面的基本法则.

设 A,B,C 为三个任意集合,则有下列法则成立:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,

$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$;

(4) 等幂律 $A\cup A=A,A\cap A=A$;

(5) 吸收律 $A\cup\varnothing=A,A\cap\varnothing=\varnothing$,

$A\cup B=B,A\cap B=A$(其中 $A\subseteq B$),

$A\cup(A\cap B)=A,A\cap(A\cup B)=A$;

(6) 对偶律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C,(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

需要说明的是,集合的并与交的定义以及对偶律都可以推广到有限多个和

无限多个集合的情形.

3. 区间与邻域

区间是数学中常用到的实数集,包括4种有限区间和5种无限区间,分别为有限区间:

(1) 闭区间:$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

(2) 开区间:$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;

(3) 半开半闭区间:$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$,$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$;

无限区间:$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$;$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$,$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$;$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$.

其中 a,b 为确定实数,分别称为区间的**左端点**和**右端点**. 区间右端点 b 和左端点 a 的差 $b-a$ 称为**区间长度**. $+\infty$ 及 $-\infty$ 分别读作正无穷大和负无穷大,它们不表示任何数,仅仅是个记号.

区间在数轴上可如图 1.3 表示.

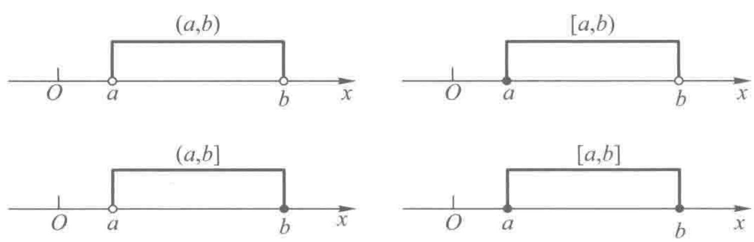


图 1.3

我们经常要在一个点的"邻近"讨论函数的某个性质,为此引入"邻域"概念.

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数集,即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta,\delta>0\}$$

称为点 a 的 δ **邻域**,点 a 称为**邻域的中心**,δ 称为**邻域的半径**.

点 a 的 δ 邻域也可表示为区间 $(a-\delta,a+\delta)$(如图 1.4),这是一个以 a 为中心,以 2δ 为长度的开区间.

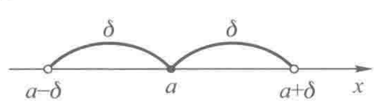


图 1.4

有时用到的邻域不包含邻域中心,点 a 的 δ 邻域内去掉中心 a 后,所得的区间 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ **去(空)心邻域**,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$(如图 1.5). 即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta,\delta>0\}.$$

为了方便,有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的**左 δ 邻域**,把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的**右 δ 邻域**.

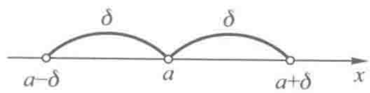


图 1.5

1.1.2 映射

1. 映射的概念

定义 1.1 设 A,B 是两个非空集合,如果按照某种对应法则 f,使得对集合 A 中的每一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素与其对应,这样的对应法则叫做**从集合 A 到集合 B 的映射**. 记作

$$f:A\to B \quad 或 \quad A\xrightarrow{f}B.$$

如果映射 f 把集合 A 中的元素 a 映射为集合 B 中的元素 b,那么元素 b 叫做元素 a 的**像**,而把元素 a 叫做元素 b 的**原像**. 即 $b=f(a)$.

例 1.1 用 $[x]$ 表示“不超过实数 x 的最大整数”,这样就形成从实数集 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射:

$$[x]=不超过\ x\ 的最大整数:\mathbf{R}\to\mathbf{R}.$$

例如,$[-1.5]=-2$,$[1.5]=1$,$[2]=2$. 在这个映射下,实数集 $\mathbf{R}$ 的像就是全体整数的集合.

2. 映射的分类

假设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射,即 $f:A\to B$.

(1) 如果集合 A 的不同元素在集合 B 中有不同的像,那么称 f 是**一对一的映射**,也称为**单映射**,简称**单射**.

(2) 如果集合 B 的每个元素都是集合 A 的元素的像,也就是说,集合 A 的像 $f(A)=B$,那么称 f 为**满映射**,简称**满射**.

(3) 如果 f 既是单映射,又是满映射,那么称 f 是**一一对应的映射**,简称**一一映射**,又称**双射**. 在这种情况下,通过映射 f,集合 A 的元素和集合 B 的元素是相互唯一对应的.

3. 映射的运算

(1) 映射的逆

考虑映射 $f:A\to B$. 如果 f 是一一对应的映射,即双射,那么通过映射 f,集合 A 的元素和集合 B 的元素是相互唯一对应的. 因此,对集合 B 的任意一个元素 b,集合 A 都有唯一的元素 a 和它对应;这两个元素的关系是

$$b=f(a),$$

这时元素 a 叫做元素 b 的**逆像**,记作 $f^{-1}(b)$,即

$$a=f^{-1}(b).$$

这样的对应关系,确定了从集合 B 到集合 A 的映射,叫做映射 f 的**逆映射**,记作

$$f^{-1}:B\to A \quad 或 \quad B\xrightarrow{f^{-1}}A$$

例 1.2 考虑映射

$$y=\sin x:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1].$$

这是一个一一对应的映射,它的逆映射是

$$x=\arcsin y:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

(2) 映射的复合

考虑两个映射

$$f:A\to B,\ g:B\to C.$$

在这种情况下,对集合 A 的任意一个元素 a,集合 B 都有唯一的元素 $b=f(a)$ 和它对应;接下来,既然 $f(a)$ 是集合 B 的元素,那么通过映射 g,集合 C 就有唯一的元素 c 和 $f(a)$ 对应,元素 c 可表示为

$$c=g(f(a)).$$

根据这样的对应关系,可以确定从集合 A 到集合 C 的映射,称为映射 f,g 的**复合映射**(如图 1.6),记作

$$g\circ f:A\to C \quad 或 \quad g(f(a)):A\to C.$$

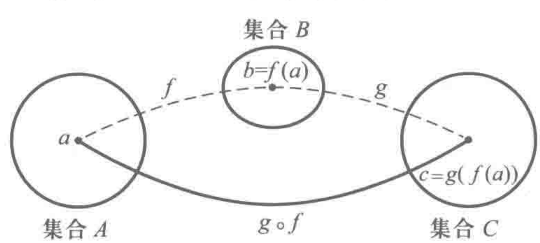


图 1.6

例 1.3 考虑两个映射

$f(x)=\ln x:(0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$, $g(x)=\sin y:(-\infty,+\infty)\to[-1,1]$.

它们的复合映射是

$$g(f(x))=\sin\ln x:(0,+\infty)\to[-1,1].$$

1.1.3 函数

1. 函数的概念

定义 1.2 设数集 $D\subset\mathbf{R}$,则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的**函数**,通常记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**或**函数**,D 称为**定义域**,记作 D_f,即 $D_f=D$.

在函数定义中,对每个 $x\in D$,通过对应法则 f 总有唯一确定的值 y 与之对应,这个值称为函数 f 在 x 处的**函数值**,记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$. 函数值的全体构成的数集称为函数 f 的**值域**,记作 R_f,即

$$R_f=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

在理解函数定义时,值得注意的是:

(1) 由函数定义可以看出,值域 R_f 是由定义域 D 和对应法则 f 所决定的,于是,定义域 D 和对应法则 f 就成为确定函数的两个要素. 换言之,如果两个函数的定义域和对应法则一样,则这两个函数就是同一个函数. 例如,$f(x)=c$(c 是常数),$x\in\mathbf{R}$ 和 $g(x)=\dfrac{cx}{x}$,$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,由于定义域不一样,故不是同一个函数. 而 $y=\sin\sqrt{x}$,$x\in[0,+\infty)$,$u=\sin\sqrt{v}$,$v\in[0,+\infty)$ 和 $y=\sin|x|$,$x\in[0,+\infty)$,虽然形式或者表示变量的字母不同,但定义域和对应法则一样,都表示同一个函数.

(2) 函数的定义域通常按照以下两种情形来确定:一种是对有实际背景的函数,根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如,在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s,开始下落的时刻 $t=0$,落地的时刻为 $t=T$,则 s 与 t 之间的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,t\in[0,T].$$

这种函数的定义域就是$[0,T]$;另一种是对抽象地用算式表达的函数,通常约定这个函数的定义域就是使得算式有意义的所有实数组成的数集,这种定义域称为函数的自然定义域. 在这种情况下,函数的定义域 D 可以省略不写,而只用对