概率论与数理统计
练习与提高（二）

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI
LIANXI YU TIGAO

刘鲁文
黄 娟 乔梅红
主编

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

概率论与数理统计练习与提高

（二）

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI LIANXI YU TIGAO

刘鲁文　黄娟　乔梅红　主编

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计练习与提高:全2册/刘鲁文,黄娟,乔梅红主编.—武汉:中国地质大学出版社,2018.6(2018.10重印)

ISBN 978-7-5625-4263-6

Ⅰ.①概…

Ⅱ.①刘…②黄…③乔…

Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料

Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第078986号

概率论与数理统计练习与提高 刘鲁文 黄娟 乔梅红 主编

责任编辑:谌福兴 郑济飞 责任校对:徐蕾蕾

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路388号) 邮政编码:430074

电 话:(027)67883511 传真:67883580 E-mail:cbb@cug.edu.cn

经 销:全国新华书店 http://cugp.cug.edu.cn

开本:787毫米×1092毫米 1/16 字数:250千字 印张:9.75

版次:2018年6月第1版 印次:2018年10月第2次印刷

印刷:武汉市籍缘印刷厂

ISBN 978-7-5625-4263-6 定价:28.00元(全2册)

前 言

为了便于在教学中教师批阅和学生使用，本书分为第一分册和第二分册。

第一分册包括随机事件及其概率、多维随机变量及其分布、大数定律与中心极限定理与参数估计。

第二分册包括随机变量及其分布、随机变量的数字特征、样本与抽样分布与假设检验。各章配有习题，书末附有答案。

本书可作为高等学校工科概率论与数理统计课程的教学习题参考书。

本书编写工作由乔梅红负责前言、随机事件及其概率、随机变量及其分布，黄娟负责多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理，刘鲁文负责样本与抽样分布、参数估计和假设检验。

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，书中一定存在不妥之处，希望广大读者批评和指正。

编 者

2018 年 5 月

目　录

第一章　随机变量及其分布 …………………………………………… (1)
　第一节　离散型随机变量及其分布函数 …………………………… (1)
　第二节　连续型随机变量及其分布函数 …………………………… (5)
　第三节　随机变量函数的分布 ……………………………………… (9)
第二章　随机变量的数字特征 ………………………………………… (15)
　第一节　数学期望与方差 …………………………………………… (15)
　第二节　协方差和相关系数　原点矩与中心矩 …………………… (25)
第三章　样本与抽样分布 ……………………………………………… (33)
　第一节　基本概念与样本数字特征 ………………………………… (33)
　第二节　正态总体的抽样分布 ……………………………………… (39)
第四章　假设检验 ……………………………………………………… (46)
　第一节　假设检验的基本思想和单个正态总体参数的假设检验 … (46)
　第二节　两个正态总体参数的假设检验 …………………………… (53)
　第三节　分布函数的假设检验 ……………………………………… (57)
参考答案 ………………………………………………………………… (60)

第一章　随机变量及其分布

第一节　离散型随机变量及其分布函数

知识要点

1. 随机变量

$X(\omega)$是定义在样本空间上的实值单值函数，且事件$\{X(\omega)\leqslant x\}$有确定的概率.

2. 分布函数

$F(x)=P\{X\leqslant x\}$具有以下性质：

(1)$0\leqslant F(x)\leqslant 1$；　(2)若 $x_1\leqslant x_2$，则 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

(3)$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$；　(4)$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)$.

3. 离散型随机变量

(1)概率分布 $P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\cdots$；

(2)概率分布的性质 $0\leqslant p_i\leqslant 1, i=1,2,\cdots, \sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1, F(x)=\sum\limits_{x_i\leqslant x}p_i$；

(3)常见分布：两点分布，二项分布，泊松分布.

典型例题

例 1　把 4 封信随机地投入 4 个空信箱，随机变量 X 表示投信后所剩的空信箱的数目，则其分布函数 $F(x)=$______________________.

解：要求分布函数，先求概率分布. 每封信都有 4 种投法，样本点总数为 4^4. X 可能的取法只有 4 种：0，1，2，3，只须算 X 取这 4 个值的概率.

$$P(X=0)=\frac{4!}{4^4}=\frac{3}{32}, P(X=1)=\frac{C_4^1C_4^2 3!}{4^4}=\frac{9}{16}$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2(C_4^2+C_4^1\times 2)}{4^4}=\frac{21}{64}, P(X=3)=\frac{C_4^1}{4^4}=\frac{1}{64}$$

由分布函数定义，可得

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{3}{32}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{21}{32}, & 1\leqslant x<2,\\ \dfrac{63}{64}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

例 2 一批产品有 50 件,其中有 8 件次品、42 件正品.现从中取出 6 件,令:X 为取出 6 件产品中的次品数.则 X 就是一个随机变量.它的取值为 $0,1,2,\cdots,6$.$\{X=0\}$表示取出的产品全是正品这一随机事件;$\{X\geqslant 1\}$表示取出的产品至少有一件是次品这一随机事件.

例 3 将 1 枚硬币掷 3 次,令:X 为出现的正面次数与反面次数之差.试求 X 的分布律.

解:X 的取值为 $-3,-1,1,3$.并且

X	-3	-1	1	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

例 4 设随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=n\}=c\left(\frac{1}{4}\right)^n \quad (n=1,2,\cdots,\infty)$$

试求常数 c.

解:由离散型随机变量的性质,得

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

该级数为等比级数,故有

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}P\{X=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}c\left(\frac{1}{4}\right)^n=c\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

所以 $c=3$.

例 5 15 件产品中有 4 件次品、11 件正品.从中取出 1 件,令 X 为取出的一件产品中的次品数.则 X 的取值为 0 或者 1,并且 $P\{X=0\}=\dfrac{11}{15}$, $P\{X=1\}=\dfrac{4}{15}$.

即 $X\sim B\left(1,\ \dfrac{4}{15}\right)$.

例 6 一张考卷上有 5 道选择题,每道题列出 4 个可能答案,其中只有一个答案是正确的.某学生靠猜测至少能答对 4 道题的概率是多少?

解：每答一道题相当于做一次伯努利试验，$A=\{答对一题\}$，$P(A)=\frac{1}{4}$，则答 5 道题相当于做 5 重伯努利试验. 记 X 为答对的题目数，则 $X\sim B(5,\frac{1}{4})$.

所以
$$P\{X\geqslant 4\}=P\{X=4\}+P\{X=5\}=C_5^4\left(\frac{1}{4}\right)^4\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{64}.$$

练习题

A 类题

1. 填空题

(1) 某射手每次击中目标的概率为 0.8，如果独立射击了 3 次，则 3 次中命中目标次数为 k 的概率 $P(X=k)=$__________.

(2) 若随机变量 X 服从泊松分布 $P(3)$，则 $P(X\geqslant 2)=$__________.

(3) 设 X 服从参数为 p 的两点分布，则 X 的分布函数为__________.

(4) 若随机变量 X 的概率函数为 $P(X=k)=c\cdot 2^{-k}(k=1,2,3,4)$，则 $c=$__________.

(5) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\leqslant x<1,\\ 0.8, & 1\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$ 则 X 的概率分布为__________.

2. 选择题

(1) 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=b\lambda^k(k=1,2,\cdots)$，且 $b>0$，则 λ 为(　　).

(A) $\lambda>0$ 的任意实数　　(B) $\lambda=\frac{1}{b+1}$

(C) $\lambda=b+1$　　(D) $\lambda=\frac{1}{b-1}$

(2) 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 和 X_2 的分布函数，为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某一随机变量 X 的分布函数，则下列答案应选择(　　).

(A) $a=\frac{3}{5},b=-\frac{2}{5}$　　(B) $a=\frac{2}{3},b=\frac{2}{3}$

(C) $a=-\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$　　(D) $a=\frac{1}{2},b=-\frac{3}{2}$

3. 计算下列各题

(1)袋中有 10 个球,分别编号为 1～10,从中任取 5 个球,令 X 表示取出 5 个球的最大号码,试求 X 的分布列.

(2)袋中有 6 个球,分别标有数字 1,2,2,2,3,3,从中任取一个球,令 X 为取出的球的号码,试求 X 的分布列及分布函数.

(3)设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{k}{15}$, $k=1,2,3,4,5$.

求:(a)$P(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2})$;(b)$P(1\leqslant x\leqslant 3)$;(c)$P(X>3)$.

(4)在一座写字楼内有 5 套供水设备,任一时刻每套供水设备被使用的概率都为0.1,且各设备的使用是相互独立的.求在同一时刻被使用的供水设备套数的概率分布,并计算下列事件的概率:(a)恰有两套设备被同时使用;(b)至少有 3 套设备被同时使用;(c)至少有 1 套设备被使用.

B 类题

1. 同时掷 2 枚骰子，直到一枚骰子出现 6 点为止，试求抛掷次数 X 的概率分布律.

2. 在汽车行进路上有 4 个十字路口设有红绿灯，假定在第一、第三个路口汽车遇绿灯通行的概率为 6.0，在第二、第四个路口通行的概率为 5.0，并且各十字路口红绿灯信号是相互独立的，求该汽车在停下时，已通过的十字路口数的概率分布.

3. 设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 都是分布函数，又 $a>0,b>0$ 是两个常数，且 $a+b=1$，求证：$F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$ 也是分布函数.

第二节　连续型随机变量及其分布函数

知识要点

1. 概率密度函数

非负函数 $f(x)$ 使得分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

2. 概率密度函数的性质

(1) $f(x)\geqslant 0,\ -\infty< x<+\infty$.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$.

(3) $P(a<x\leqslant b)=P(a\leqslant x<b)=P(a\leqslant x\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;

$P(X<a)=P(X\leqslant a)=F(a)$, $P(X\geqslant a)=P(X>a)=1-F(a)$.

(4)若 $f(x)$ 在点 x 处连续,则 $F'(x)=f(x)$.

3. 常见分布

均匀分布、指数分布、正态分布.

典型例题

例 1 已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x$, $-\infty<x<+\infty$,则系数 A $=$__________;$B=$__________;$P(-1<X<1)=$__________;X 的概率密度 $f(x)$ __________.

解:由分布函数的性质 $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$,可知 $\begin{cases}A+B(-\frac{\pi}{2})=0\\ A+B(\frac{\pi}{2})=1\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{\pi}$.

$$P(-1<X<1)=F(1)-F(-1)=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=F'(x)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x)'=\frac{1}{\pi(1+x^2)}, -\infty<x<+\infty$$

例 2 一个靶子是半径为 2m 的圆盘,设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比,并设射击都能中靶,以 X 表示弹着点与圆心的距离. 试求随机变量 X 的分布函数.

解:(1)若 $x<0$, 则 $\{X\leqslant x\}$ 是不可能事件,于是 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=P(\varnothing)=0$.

(2)若 $0\leqslant x\leqslant 2$,由题意,$P(0\leqslant X\leqslant x)=kx^2$. 因为 $x=2$ 时,$p(0\leqslant X\leqslant x)=k2^2=1$ 是必然事件,所以 $k=\frac{1}{4}$,于是

$$F(X)=P\{X\leqslant x\}=P\{X<0\}+P\{0\leqslant X\leqslant x\}=\frac{x^2}{4}$$

(3)若 $x\geqslant 2$,则 $\{X\leqslant x\}$ 是必然事件,于是 $F(x)=P\{X\leqslant x\}=1$.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^2}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

练习题

A 类题

1. 填空题

(1)已知连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}A+Be^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 则 $A=$ __________；$B=$ __________；$P(\frac{1}{2}<x<2)=$ __________；$f(x)=$ __________.

(2)设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\frac{a}{1+x^2}(-\infty<x<+\infty)$，则 $a=$ __________；$P(X>0)=$ __________；$P(X=0)=$ __________.

(3)设 X 服从参数为 θ 的指数分布，则 X 的概率密度为 __________.

(4)若随机变量 ξ 在(1,6)上均匀分布，则方程 $X^2+\xi X+1=0$ 有实根的概率为 ____.

(5)若随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P(2<X<4)=0.3$，则 $P(X<0)=$ __________.

(6)设随机变量 X 服从 $U(-1,1)$，则 X 的概率密度为 __________.

2. 选择题

(1)设函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in[a,b],\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 问区间 $[a,b]$ 为下列哪一个区间时，$f(x)$ 才可能是某个随机变量的概率密度函数(   ).

(A) $[0,\frac{\pi}{2}]$　　(B) $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$　　(C) $[0,\pi]$　　(D) $(0,2\pi)$

(2)设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 3<x<6,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 则 $P\{3<X\leqslant 4\}=$(   ).

(A) $P\{1<X\leqslant 2\}$　　(B) $P\{4<X\leqslant 5\}$

(C) $P\{3<X\leqslant 5\}$　　(D) $P\{2<X\leqslant 7\}$

(3)设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随 σ 的增大，概率 $P(|X-\mu|<\sigma)$(   ).

(A)单调增大　　(B)单调减少

(C)保持不变　　(D)增减不变

(4)设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$，且 $f(-x)=f(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a 有(   ).

(A) $F(-a)=1-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$　　(B) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$

(C) $F(-a)=F(a)$　　(D) $F(-a)=2F(a)-1$

(5)设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，则必有(　　).

(A) $\sigma_1<\sigma_2$　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$

(C) $\mu_1<\mu_2$　　(D) $\mu_1>\mu_2$

3. 计算下列各题

(1)某台电子计算机，在发生故障前正常运行的时间 X(单位：h)是一个连续型随机变量且 X 服从参数 $\theta=10000$ 的指数分布，求：

(a)概率密度；

(b)正常运行时间 50～100h 之间的概率；

(c)运行 100h 尚未发生事故的概率.

(2)设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-(1+x)e^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

求：(a) $P(X\geqslant 1)$；(b) X 的密度函数.

(3)设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}kx^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

求：(a)常数 k；(b) $P(0.3<X<2)$.

(4)设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x$，$-\infty<x<+\infty$，试求：(a)系数 A 与 B；(b) $P(-1<X\leqslant 1)$；(c) X 的概率密度函数.

B 类题

1. 在半径为 R，球心为 O 的球内任取一点 P，设取任一同心球内的点的概率与该球的体积成正比，记 X 为点 O 与 P 的距离，求 X 的分布函数及概率密度.

2. 某年某地高等学校学生入学考试的数学成绩 X 近似地服从正态分布 $N(65,10^2)$，若 85 分以上为优秀，问数学成绩优秀的学生大致占总人数的百分之几？

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 以 Y 表示对 X 进行 3 次独立试验中 $\{X\leqslant\frac{1}{2}\}$ 出现的次数，求概率 $P(Y=2)$.

第三节　随机变量函数的分布

知识要点

随机变量函数的分布

(1) X 为离散型随机变量，其概率分布为 $P(X=x_i)=p_i, i=1,2,\cdots$，则 X 的函数 $Y=g(X)$ 的概率分布：

(a)当 $y_i=g(x_i)$ 的各值 y_i 互不相等时，Y 的概率分布为 $P(Y=y_i)=p_i, i=1,2,\cdots$；

(b)当 $y_i=g(x_i)$ 的各值 y_i 不是互不相等时，应把相等的值分别合并，并相应地将其概率相加，Y 的概率分布为

$$P(Y=y_i)=\sum_{g(x_j)=y_i} P(X=x_j), i,j=1,2,\cdots$$

(2) X 为连续型随机变量，其概率密度为 $f_X(x)$ 则 X 的函数 $Y=g(X)$ 的概率密度 $f_Y(y)$ 可用如下方法求：

(a)公式法

若 $y=g(x)$ 单调可导，其反函数为 $x=g^{-1}(y)$，则

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X\{g^{-1}(y)\}\cdot\left|\{g^{-1}(y)\}'\right|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha=\min\{g(-\infty),g(+\infty)\}$，$\beta=\max\{g(-\infty),g(+\infty)\}$.

若 $y=g(x)$ 不单调，则可把 $(-\infty,+\infty)$ 分成若干个小区间 Δ_i，使得 $y=g(x)$ 在小区间 Δ_i 上单调，其反函数为 $x=g_i^{-1}(y)$，则

$$f_Y(y)=\begin{cases} \sum\limits_i f_X\{g_i^{-1}(y)\}\cdot\left|\{g_i^{-1}(y)\}'\right|, & y=g(x), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(b)分布函数法

先求出 Y 的分布函数 $F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P\{g(X)\leqslant y\}=\int\limits_{g(x)\leqslant y} f_X(x)\mathrm{d}x$，再将两边对 y 求导，即得 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

典型例题

例 1 随机变量 X 的分布为 $P(X=-2)=0.5, P(X=0)=0.2, P(X=2)=0.3$，则 $Y=X^2$ 的概率分布为________________.

解： $y=x^2$ 的可能值为 0 和 4，

$$P(Y=0)=P(X=0)=0.2,$$
$$P(Y=4)=P(X=-2)+P(X=2)=0.8.$$

例 2 随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases} x^3e^{-x^2}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$ 则 $Y=X^2$ 的概率密度为________________.

解： $y=x^2$ 的反函数为 $x_1=\sqrt{y}$ 或者 $x_2=-\sqrt{y}<0$，$x_1'=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$，$x_2'=-\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$. 因此

$$f_Y(y)=f_X(\sqrt{y})\left|(\sqrt{y})'_y\right|+f_X(-\sqrt{y})\left|(-\sqrt{y})'_y\right|=\frac{1}{2}ye^{-y}(y>0)$$

故
$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}ye^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

例 3　设随机变量 X 具有以下的分布律,试求 $Y=(X-1)^2$ 的分布律.

Y	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

解:Y 有可能取的值为 0,1,4. 且 $Y=0$ 对应于$(X-1)^2=0$,解得 $X=1$,所以,

$$P\{Y=0\}=P\{X=1\}=0.1$$

同理,

$$P\{Y=1\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.3+0.4=0.7$$
$$P\{Y=4\}=P\{X=-1\}=0.2$$

所以,$Y=(X-1)^2$ 的分布律为:

Y	0	1	4
p_k	0.1	0.7	0.2

例 4　设 X 是连续型随机变量,其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}c(4x-2x^2), & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求(1)常数 c;(2)$P\{X>1\}$.

解:(1)由密度函数的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^2 c(4x-2x^2)\mathrm{d}x$$
$$=c\left(2x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{8}{3}c$$
$$c=\frac{3}{8}.$$

(2) $$P\{X>1\}=\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{3}{8}(4x-2x^2)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{3}{8}\left(2x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}.$$

例 5　某电子元件的寿命(单位:h)是以

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 100\\ \frac{100}{x^2}, & x>100\end{cases}$$
为密度函数的连续型随机变量. 求 5 个同类

型的元件在使用的前 150h 内恰有 2 个需要更换的概率.

解: 设:$A=\{$某元件在使用的前 150h 内需要更换$\}$,则

$$P(A)=P\{X\leqslant 150\}=\int_{-\infty}^{150}f(x)\mathrm{d}x=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$$

检验 5 个元件的使用寿命可以看作是在做一个 5 重伯努利试验. $B=\{5$ 个元件中恰有 2 个的使用寿命不超过 150h$\}$,则

$$P(B)=C_5^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}.$$

练习题

A 类题

1. 填空题

(1) 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 服从的分布为________________.

(2) 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $Y=aX+b$ 服从的分布为________________.

(3) 设 $X\sim N(0,1)$,则 $Y=X^2$ 的概率密度函数是________________.

(4) 设随机变量 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布,则随机变量 $Y=X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率密度 $f_Y(y)$ 为________________.

2. 选择题

(1) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,则随机变量 $Y=2X+1$ 的分布函数 $G(y)$ 是(　　).

(A) $G(y)=F(\frac{1}{2}y-\frac{1}{2})$　　(B) $G(y)=F(\frac{1}{2}y+1)$

(C) $G(y)=2F(y)+1$　　(D) $G(y)=\frac{1}{2}F(y)-\frac{1}{2}$

(2) 已知随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & 2<x<e+1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 则随机变量 $Y=X^2$ 的密度函数为(　　).

(A) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(y-1)^2}, & 4<y<(\mathrm{e}+1)^2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(B) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 2<y<\sqrt{\mathrm{e}+1}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$