

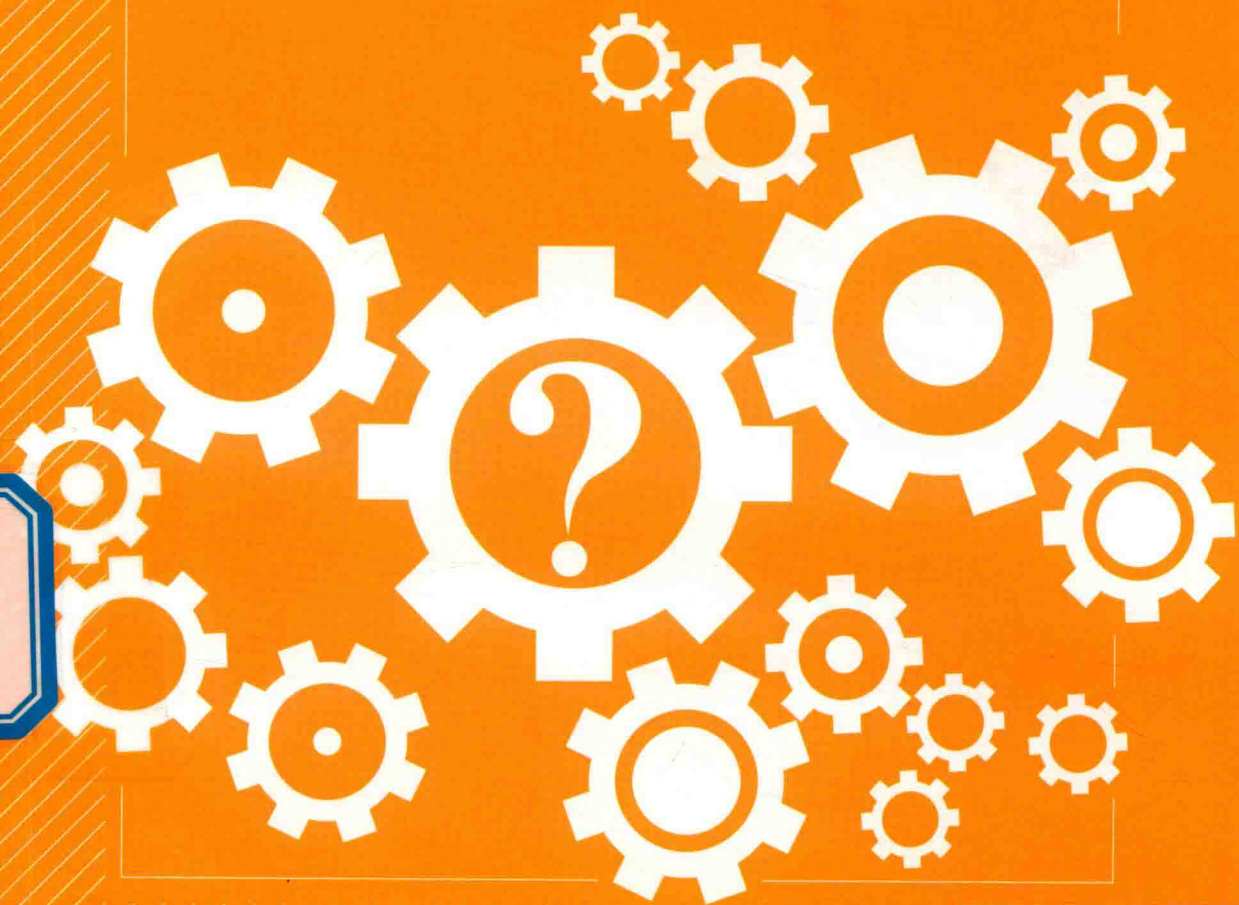
国家“万人计划”领军人才
广东省“特支计划”教学名师 联合资助
广州市教育局教育名家工作室

| 大学师范生与中学师生参考用书 |

问题驱动的 中学数学课堂教学

理论与实践卷

曹广福 张蜀青 著



清华大学出版社

问题驱动的 中学数学课堂教学

理论与实践卷

曹广福 张蜀青 著



清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书从数学内容的思想性角度为高中数学教师 and 大学师范生以及数学教育研究生的教学与实习提供了建议性意见,书中针对教材内容与课堂教学给出了大量案例分析,同时还以课堂评析、实录等方式提供了作者在中学授课的部分教学案例供一线教师参考。

本书有别于传统的数学教育理论书籍,作者融数十年数学研究与教学经验于数学教育研究中,提出了一些新颖的见解,直接面向一线教学提出具体的教学建议,不失为一本具有重要指导意义的一线教师教学参考书。

本书适合大学师范生作为教法教材或参考书,也可以作为中学一线教师的培训用书或教学指导用书及中学生的参考读物,还可以作为数学教育研究工作者及数学教育研究生的参考书。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

问题驱动的中学数学课堂教学.理论与实践卷/曹广福,张蜀青著. —北京:清华大学出版社,2018(2018.10 重印)

ISBN 978-7-302-50921-9

I. ①问… II. ①曹… ②张… III. ①中学数学课—课堂教学—教学研究
IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 190121 号

责任编辑:刘 颖

封面设计:傅瑞学

责任校对:王淑云

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市铭诚印务有限公司

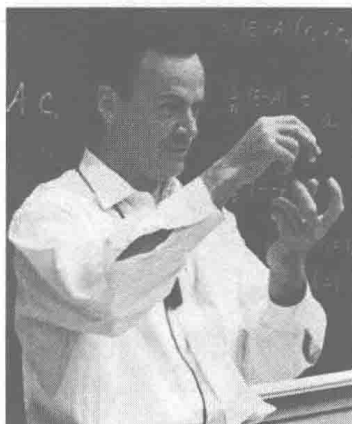
经 销:全国新华书店

开 本:170mm×240mm 印 张:13.75 字 数:190 千字

版 次:2018 年 8 月第 1 版 印 次:2018 年 10 月第 2 次印刷

定 价:39.80 元

产品编号:079928-01

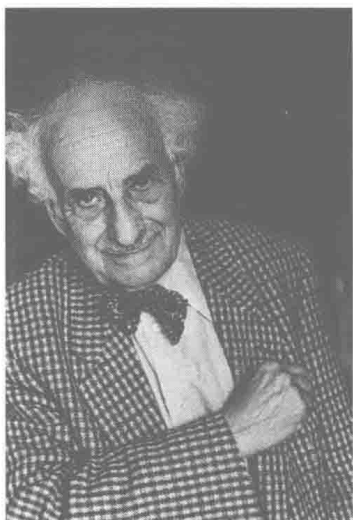


理查德·费曼

我不能创造的,我也无法理解

——费曼

许多人认为,理查德·费曼(Richard Feynman,1918年5月11日—1988年2月15日)是20世纪诞生于美国的最伟大的物理学家,一个独辟蹊径的思考者、超乎寻常的教师、尽善尽美的演员,1965年,他因在量子电动力学方面做出的卓越贡献,获得诺贝尔物理学奖。费曼认为他对物理学最重要的贡献不是量子电动力学或超流理论,而是根据他20世纪60年代在加州理工学院授课录音整理而成的三卷教材《费曼物理学讲义》。费曼有一种特殊能力,他能把复杂的观点用简单的语言表述出来,这使得他成为一位硕果累累的教育家。在获得的诸多奖项中,他自豪的是1972年获得的奥尔斯特教育奖章。



汉斯·弗赖登塔尔

数学教育是数学的再创造

——弗赖登塔尔

弗赖登塔尔(H. Freudenthal, 1905—1990)是国际上极负盛名的荷兰数学家和数学教育家。他是著名数学家布劳威尔的学生,早年从事纯粹数学研究,以代数拓扑学和李群研究方面的杰出工作进入国际著名数学家的行列。作为著名的数学家,弗赖登塔尔非常关注教育问题,他很早就把数学教育作为自己思考和研究的对象,在这一点上弗赖登塔尔与其他科学家有所不同,其他高水平的科学家开始关注和投入研究教育问题时往往是在他们年老之后,而弗赖登塔尔被教育问题所吸引从很早就开始了。他本人对此有一个解释:我一生都是做教师,之所以从很早就开始思考教育方面的问题,是为了把教师这一行做好。弗赖登塔尔指导、推动和亲身参与了荷兰的数学教育改革实践,并对 20 世纪国际数学课程的改革与发展做出了重大贡献。弗赖登塔尔一生发表关于数学教育的著述达几百篇(部),其中三本著作《作为教育任务的数学》《播种和除草》及《数学结构的教学现象》用多种文字出版,在国际上产生了很大的影响。

总 / 序

介入中学数学教育已有若干年,我时常在思考一个问题:“数学教育的本质到底是什么?我们该教给学生什么?”其实很多人都在思考这个问题,也都有自己的认识,有一种“高大上”的说法:“教学生如何思考,如何学习”。可我们真的知道怎么教学生思考吗?我们真的知道怎么指导学生学习的吗?我们把很多问题归咎于应试教育,问题是,我们能进行什么样的教育?

诺贝尔物理学奖获得者、著名物理学家、加州理工学院教授理查德·费曼(Richard Feynman)最后一次住院治疗前,在其办公室的黑板上写下:“我不能创造的,我也无法理解(What I cannot Create, I do not understand)。”从教育的角度说,这句话是很有道理的。很多人都读过弗赖登塔尔的《作为教育任务的数学》,我以为,概括起来,《作为教育任务的数学》表述了两个基本观点:(1)数学教育应该结合学生的生活体验与数学现实;(2)数学教育是数学的“再创造”。虽然我对于弗赖登塔尔在《数学教育再探》《除草与播种》等论著中的一些观点持保留意见,但我相信,无论是数学教育工作者还是数学教育研究者乃至教材编写者,大概都会认同弗赖登塔尔的这两个观点。然而,如何结合学生的生活体验与数学现实?实际操作时往往会出现问题。中学数学教材无论是引入一个概念还是建立一个定理,通常都会创设一些问题情境,其目的也正是因为体现与学生的生活体验相结合。问题是,我们为什么要创设这样的问题情境?它真的能反映出我们所建立的概念或定理的科学本质吗?以复数的引入为例,几乎所有的教材都是以 $x^2 + 1 = 0$ 在实数范围内无解所以需要扩充数域作为复数导入的问题情境。有些人认为,从代数的角度看,无非是定义一些抽象

的运算使之成为一个代数或域,对抽象代数耳熟能详的人来说,这的确是一件自然的事情。可如果一个中学生问你:“老师,为什么要研究 $x^2 + 1 = 0$ 这样的方程? 它有意义吗?”教师该如何回答? 如果你无法回答学生的问题,你又如何让学生相信这个概念是重要的? 学生又如何知道该怎样使用这套理论? 结合学生的生活体验与数学现实的具体体现是创设合适的问题情境,但这个问题情境应该是有价值的真实情境,而不是虚无缥缈、不着边际的虚假或毫无意义的情境,与其这样,还不如直截了当地引入数学概念。

说到真实的问题情境,必然涉及另一个本质问题,什么叫数学的“再创造”? 如果教师自己都不知道数学是怎么被创造出来的,他(她)又如何引导学生去“再创造”? 教师或数学教育研究工作者固然有别于数学研究工作者,教师与数学教育研究工作者可以不必做具体的数学研究,但至少应该懂数学,具备数学的鉴赏能力,否则他(她)的教育或研究必然是空中楼阁,甚至不知所云,缺少实际的可操作性。

小学数学教育属于启蒙教育,需要教育学、心理学的指导,一个小学数学教师如果对教育学、心理学一无所知,他一定是个不合格的教师。但从中学开始,数学内容的思想性上升为数学教育的核心,应该将数学的“再创造”作为数学教育的灵魂。这就给数学教师与数学教育研究工作者提出了一个严肃的问题:“我们真的懂数学吗? 我们具备数学鉴赏能力吗? 我们到底该从事或研究什么样的数学教育?”如果我们不懂数学,不具备数学的鉴赏能力,我们又如何引领学生进行数学的“再创造”? 除了依样画葫芦,还能干什么?

任何数学概念与定理都不是数学家或物理学家头脑中的臆想物,都有其产生的背景,有些概念甚至经过了数百年的考验才最终登堂入室得到广泛的认同,还有些理论曾让数学家与物理学家们争论不休甚至引起了极度恐慌。如果数学只是数学家的游戏,那么它就不会被科学家们深究不放,不弄清楚其真面目誓不罢休。可以说,直至微积分,一切的数学都离不开现实与自然科学,即使是现代数学,追根溯源,也与自然科学有着千丝万

缕、数说不清的渊源。数学课堂怎么引导学生“再创造”？有一种观点认为越简单越好，不要把简单问题复杂化，果真如此，最简单的做法是单刀直入开门见山地告诉学生一个数学概念或定理，就如前面提到的复数那样。如果是这样，我们从事的还是数学教育吗？恐怕充其量不过是数学知识的传授，而且其中夹杂着很多虚假的成分让学生难辨真伪。

要做好数学教育研究首先需要了解数学，懂得鉴赏数学。这就好比音乐教师给学生分析一首歌，如果教师不清楚音乐表达的是一种什么样的情感，不知道词曲作者创作该曲的背景，甚至连乐曲是什么调、什么节拍都不甚了解，他怎么向学生剖析？从这个意义上说，无论是搞数学教育还是做数学教育研究，有必要先学好数学，学会鉴赏数学。

数学教育该以什么样的方式进行？这本无一定之规，课堂是教学的最基本形式，少数有天赋的学生也可能自学成才或者因为特定的环境脱颖而出，就大众而言，通常都需要经过课堂教学这样的特定形式。数学教育是否需要改革？答案是肯定的，问题是改什么？为什么要改？

数学对于数学教师与数学教育研究者而言应该是个“白箱”，换言之，数学教师与数学教育研究者应该对数学有透彻的了解，这种了解并非指你是否懂得某个概念与定理，知道怎么用它们，更重要的是，你要清楚概念与定理产生的背景以及它们的科学价值。我们常常把数学文化放在嘴上，我们真的了解什么叫数学文化吗？数学文化不等于介绍一些数学史，或者开展一些课外数学兴趣活动，更重要的是，数学文化体现在每一节数学课的教学过程中。打个比方，一幅画摆在你的面前，如果你是个普通的观赏者，你可能朦胧地觉得这幅画好不好看，至于怎么个好看，你就说不出所以然来了，如果你面对的是一幅抽象派的画作，你可能压根就无法判定它好还是不好。但如果你是个专业的鉴赏家（不一定是画家），你可能不仅了解作者是谁，是在什么背景下画的这幅画（历史），你可能还知道这幅画表达了作者什么样的情感，能解读出画中的每一个细节（文化）。当然，光线、构图、色彩等则是画家与鉴赏家的基本功（内容）。任何一个高水平解说员对你解说一幅画作的时候一定不会仅仅停留在作者是怎么用光的，构图如

何,用了什么色彩,而是向你解释,如此用光为了表达什么样的意境,构图为什么精巧,色彩表达了什么样的感情,包括远近高低、清晰模糊等都传递了什么信息,这就是文化。数学也是如此,只不过与绘画相比,它更为抽象,需要具备与众不同的鉴赏能力才能读懂,我们有多少数学课堂传递了数学文化?如果教师做不到,还奢谈什么数学文化?

数学对于学生而言好比“黑箱”,数学教师与数学教育工作者不仅应该了解数学知识,更应该了解数学文化,知道数学在表达什么,它缘何产生,对数学乃至自然科学产生了什么影响,他的重要性体现在哪里?我们如何判断一个数学结果的好坏?好在哪里?不好在哪里?只有这样才能引导学生一步一步揭开“黑箱”的秘密。

课堂教学的最高境界是什么?是自由王国,是无招胜有招。

很多人认为教师讲课应该好好写备课笔记,讲什么、重点难点是什么应该做到心中有数。这些自然有一定道理,但知道重点难点就算备好课了吗?假如让你在不同的时间里给两个班上同样内容的课,你第一次上课与第二次上课有没有差别?差别在哪里?对于新教师来说,也许两次课基本没有什么差别,因为他或者照着讲义(PPT)读,或者把讲义熟记了下来,可以一字不漏地把讲义内容背出来。这样的课成功与否取决于你讲义的水平如何,但不管如何成功,这样的课都算不上高水平的授课。什么是高水平的授课?无论你重复讲多少次同样内容的课,你使用的语言都可能各不相同,但意思却是一样的,也就是说,你抓住的是课程的精髓与思想,至于用什么样的语言来表达则是次要的。尤其是有了多媒体之后,很多东西完全可以通过屏幕展示,无须教师费事书写。说到底,语言与文字只是知识的载体,知识又是思想的载体,教师的任务是通过语言将知识所承载的思想传递给学生,而要达到这种境界,绝不是站在与所传授的知识同一水平线上能够做到的,教师需要站在更高的层面上才能真正看清楚知识所承载的思想,否则他(她)只能是照本宣科、依样画葫芦。

教师的教学有层次上的差别。如果教师的课堂教学仅仅停留在就知识论知识,没有对知识的独立见解,也没有对知识的主客观评判,那么,他

的教学就仅仅停留在传授知识的层面上。如果教师的课堂教学具有对概念、原理的深入剖析,而且这种剖析蕴含着自己对知识的独到见解,这种见解也许基于对历史的了解,也许基于自身的研究积累,那么他的教学就有了文化内涵。这就是课堂教学中知识与文化的差别。

很多人认为教学水平取决于教学经验的积累,此言大谬,教学经验的积累的确可以让教师的教学变得更加成熟,但未必能决定他教学的高度,换句话说,经验的积累可以在同一层面上使他的教学更完善,例如教态、语言、板书等都可以通过经验的积累逐步规范与提高。然而,决定教师教育高度的根本因素则是教师的眼界与素养。如果一个教师能够抓住问题的本质,有对问题的独到见解,哪怕他的语言不够规范,仪表不够端庄,板书不够工整,他的教学也是高水平的。反之,如果教师缺少把握本质问题的能力,教学只是停留在细枝末节上,无论他的举止多么高雅,语言多么幽默,板书多么工整,他的教学也是低水平的。

有人说:“教育的关键是教会学生如何学习”,问题是如何教会学生学习?这是个值得探讨的问题。学会学习的根本在于掌握基本的思维方法,能否掌握思维方法与思想取决于你对相关学科的鉴赏力。教师传授思想的过程就是教会学生如何学习、如何鉴赏。

本书着眼于高中数学内容的思想性为教师们的教学和大学师范生以及数学教育研究生的教育实习提供了建设性意见,书中针对教材内容与课堂教学给出了大量案例分析,同时设计了部分高中数学内容的教案供一线教师参考。

本人非数学教育专业出身,无非是凭借多年从事数学研究与数学教学经验发表一些粗浅的认识,行文素喜信马由缰,不专业之处在所难免,也算为中国数学教育研究添一块另类的砖头。谬误之处,恭请方家批评指正。

曹广福

2018年4月

本 / 卷 / 序

本套丛书的第一卷终于付梓了,与后续几卷相比,本卷内容显得庞杂了一些。部分内容取材于我与我的学生过去几年中已经发表的文章,所以前后的逻辑关系未见得严谨,更像是一本论文集。

本卷主要围绕着目前基础教育中的很多重大问题展开讨论,内容包括数学素养、课堂教学评价、素质教育、数学文化等若干方面。与很多数学教育书籍不同的是,我们的立足点始终在数学内容的思想性,正如弗赖登塔耳所说:“数学教育是数学的再创造”,如果我们不了解数学的内容、思想、方法与意义,再创造从何谈起?

介入基础教育十余年的时间里,我通过与国内数学教育研究专家们广泛的交流,并向他们学习,同时深入中学一线与中学教师们进行交流、互动,深以为,教育改革、教育理论研究与一线教学之间尚隔着一条鸿沟,这与教育改革、教育研究工作者与一线教师之间交流的深度与广度固然是有关系的,但教材、教参以及很多一线教师对数学的理解有着很大的局限性恐怕是更重要的因素。一方面,师范教育的课程设计是否合理?另一方面,教师培训是否真正起到了提升教师数学素养与眼界的作用?这些问题都值得研究。我始终有一个愿望,希望能将数十年数学研究经验与教学经验融入数学教育研究中,以期给师范教育与一线教师们提供一点参考。本卷是这方面的初步尝试,其中很多观点纯属拙见,正确与否需要经过实践的检验。

最后要对刘颖博士表示特别的感谢,他非常认真细致地审阅了书稿并提出了很多建设性的修改意见。如果没有他耐心的审读,书中错误与疏漏之处想必会更多。

曹广福

2018 年 4 月

目 / 录

第 1 章 问题驱动的数学教学 / 1

1.1 数学教育的本质	1
1.1.1 我们该教什么样的数学	1
1.1.2 数学教育的本质是什么	7
1.1.3 教师成长的代价	17
1.1.4 博士该不该进中学	19
1.1.5 传统教学之殇	20
1.1.6 多媒体存在的意义	25
1.2 “数学化”的数学教育与“生活化”的数学教育	27
1.2.1 纯粹与应用之间的平衡	27
1.2.2 数学与自然科学	28
1.2.3 纯粹数学、应用数学与数学应用	30
1.2.4 “数学化”的数列与“生活化”的数列	33
1.3 课程标准与教材浅议	41
1.3.1 课程标准浅议	41
1.3.2 课程标准与教材中值得商榷的一些问题	43
1.3.3 如何处理教材与课堂之间的关系	48

1.4 数学课堂教学与评价的核心要素	50
1.4.1 关于课堂教学的形式	50
1.4.2 数学课堂的核心要素	52
1.4.3 导数概念课案例与评析	57

第2章 知识、文化、素养、能力与数学素养 / 63

2.1 知识、素养及能力	63
2.2 数学知识、数学素养及数学能力	65
2.2.1 数学知识、数学素养与数学能力之间的关系	65
2.2.2 数学直觉与直观	67
2.2.3 再论数学素养	69
2.3 数学课堂如何培养与提升学生的数学素养	72
2.3.1 应试与素质之间的平衡	72
2.3.2 数学直觉与数学思辨	73
2.3.3 三尺讲台无穷天地	76
2.3.4 教育与考试	83
2.3.5 “朦胧”的数学题	85
2.4 数学与哲学	86
2.4.1 数学中的哲学问题	86
2.4.2 形式主义数学	88
2.4.3 数学的真理性	89
2.4.4 论数学证明	91
2.5 课堂教学中的思辨、演绎与算法	93
2.5.1 思辨与数学	93
2.5.2 思辨在数学教育中的重要性	96

第3章 从数学教育的本质看数学基础教育改革 / 100

3.1 新中国基础教育改革回顾	100
3.1.1 八次基础教育改革简介	100
3.1.2 八次改革的基本特点	103
3.2 数学教育本质再探	103
3.2.1 教育中的再创造	103
3.2.2 关于任意角的三角函数	104
3.3 改革将走向何方	107
3.3.1 中国教师英国执教的启示	107
3.3.2 中外基础教育孰优孰劣	108
3.3.3 我们要解决什么样的问题	111
3.3.4 基础教育是否存在统一国际基准	114
3.3.5 几点建议	116

第4章 一堂关于《基本不等式》的“同课异构”评析 / 124

4.1 教师的课堂设计	124
4.2 课堂评析	126

第5章 函数教学与案例设计 / 129

5.1 集合论教学策略与案例	129
5.1.1 是谁把数学推向了深渊	129
5.1.2 集合论教学案例设计	132
5.2 函数教学与教学案例设计	135

5.2.1 函数教学	135
5.2.2 函数教学案例设计	140

第6章 浅谈微积分教学 / 167

6.1 极限与连续	167
6.1.1 分析学的起源	167
6.1.2 极限简论	168
6.1.3 芝诺悖论、二进制与区间套	171
6.1.4 二分法、聚点原理与有限覆盖原理	173
6.1.5 连续性简论	175
6.2 导数与微分	180
6.2.1 导数概念的教学	180
6.2.2 微分思想与近似公式	181
6.3 积分与应用	183
6.3.1 定积分教学策略	183
6.3.2 从直觉到方法	185
6.4 微积分学基本定理	187
6.4.1 微积分学基本定理教学实录	187
6.4.2 中学微积分学基本定理传统教学案例	193

参考文献 / 197

名词索引 / 200

第1章 问题驱动的数学教学

1.1 数学教育的本质

1.1.1 我们该教什么样的数学

第二次世界大战结束后,国际上较早进行中小学数学教育改革的国家之一是美国。众所周知,自20世纪50年代以来,美国进行了4次大的数学教育改革^[1],分别是:

- (1) 新数学运动。
- (2) 回到基础。
- (3) 问题解决。
- (4) 课程标准。

每一次改革都有着深刻的社会背景,例如新数学运动源于美苏军备竞赛,苏联人率先将人造地球卫星送上了太空,这让发了第二次世界大战横财的美国人心理很不平衡,他们认为科技实力是决定国家强弱的关键,而科技实力取决于基础教育,于是开始了著名的新数学运动。然而,若干次的数学教育改革,并没有能让美国人满意,他们甚至为他们的孩子在国际数学水平测试中表现欠佳而纠结,也因此对亚洲特别是中国的中小学数学教育产生了兴趣。2009年,中国第一次参加了国际PISA(Programme for International Student Assessment,国际学生评估项目)评估,图1.1是这次评估的数学素养分数对比。它显示了中国学生的数学测试水平远远高于国际平均水平,美国学生则低于国际平均水平^[2]。

到底是什么导致了中美学生数学测试之间的这种差异?美国中小学