



同济大学 1907-2017
Tongji University



同济博士论丛
TONGJI Dissertation Series

总主编 伍江 副总主编 雷星晖

颜启明 陈志华 著

多复变亚纯函数及 亚纯映射的唯一性定理

Uniqueness Theorems of Meromorphic
Functions and Meromorphic Mappings in
Several Complex Variables



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

 同济博士论丛
TONGJI Dissertation Series

总主编 伍江 副总主编 雷星晖

颜启明 陈志华 著

多复变亚纯函数及 亚纯映射的唯一性定理

Uniqueness Theorems of Meromorphic
Functions and Meromorphic Mappings in
Several Complex Variables



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书以多复变数的亚纯函数与亚纯映射的唯一性问题为研究对象,首次尝试讨论了涉及超曲面的亚纯映射唯一性问题,得到了一个代数非退化的亚纯映射相交超曲面的弱截断型第二基本定理.本书适合数学及相关专业背景的人士作为参考资料,也可供对此有兴趣的人士阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

多复变亚纯函数及亚纯映射的唯一性定理 / 颜启明, 陈志华
著. —上海: 同济大学出版社, 2018. 9

(同济博士论丛 / 伍江总主编)

ISBN 978-7-5608-6809-7

I. ①多… II. ①颜… ②陈… III. ①多复变函数—研究
②半纯映射—研究 IV. ①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 058164 号

多复变亚纯函数及亚纯映射的唯一性定理

颜启明 陈志华 著

出品人 华春荣 责任编辑 张智中 熊磊丽

责任校对 徐春莲 封面设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

排版制作 南京展望文化发展有限公司

印 刷 浙江广育爱多印务有限公司

开 本 787 mm×1092 mm 1/16

印 张 7

字 数 140 000

版 次 2018 年 9 月第 1 版 2018 年 9 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-6809-7



定 价 40.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

“同济博士论丛”编写领导小组

组 长：杨贤金 钟志华

副 组 长：伍 江 江 波

成 员：方守恩 蔡达峰 马锦明 姜富明 吴志强
徐建平 吕培明 顾祥林 雷星晖

办公室成员：李 兰 华春荣 段存广 姚建中

“同济博士论丛”编辑委员会

总 主 编：伍 江

副 总 主 编：雷星晖

编委会委员：（按姓氏笔画顺序排列）

丁晓强	万 钢	马卫民	马在田	马秋武	马建新
王 磊	王占山	王华忠	王国建	王洪伟	王雪峰
尤建新	甘礼华	左曙光	石来德	卢永毅	田 阳
白云霞	冯 俊	吕西林	朱合华	朱经浩	任 杰
任 浩	刘 春	刘玉擎	刘滨谊	闫 冰	关侗红
江景波	孙立军	孙继涛	严国泰	严海东	苏 强
李 杰	李 斌	李风亭	李光耀	李宏强	李国正
李国强	李前裕	李振宇	李爱平	李理光	李新贵
李德华	杨 敏	杨东援	杨守业	杨晓光	肖汝诚
吴广明	吴长福	吴庆生	吴志强	吴承照	何晶晶
何敏娟	何清华	汪世龙	汪光焘	沈明荣	宋小冬
张 旭	张亚雷	张庆贺	陈 鸿	陈小鸿	陈义汉
陈飞翔	陈以一	陈世鸣	陈艾荣	陈伟忠	陈志华
邵嘉裕	苗夺谦	林建平	周 苏	周 琪	郑军华
郑时龄	赵 民	赵由才	荆志成	钟再敏	施 骞
施卫星	施建刚	施惠生	祝 建	姚 熹	姚连璧

袁万城	莫天伟	夏四清	顾 明	顾祥林	钱梦騷
徐 政	徐 鉴	徐立鸿	徐亚伟	凌建明	高乃云
郭忠印	唐子来	閻耀保	黄一如	黄宏伟	黄茂松
戚正武	彭正龙	葛耀君	董德存	蒋昌俊	韩传峰
童小华	曾国荪	楼梦麟	路秉杰	蔡永洁	蔡克峰
薛 雷	霍佳震				

秘书组成员：谢永生 赵泽毓 熊磊丽 胡晗欣 卢元姗 蒋卓文

总序

在同济大学 110 周年华诞之际，喜闻“同济博士论丛”将正式出版发行，倍感欣慰。记得在 100 周年校庆时，我曾以《百年同济，大学对社会的承诺》为题作了演讲，如今看到付梓的“同济博士论丛”，我想这就是大学对社会承诺的一种体现。这 110 部学术著作不仅包含了同济大学近 10 年 100 多位优秀博士研究生的学术科研成果，也展现了同济大学围绕国家战略开展学科建设、发展自我特色，向建设世界一流大学的目标迈出的坚实步伐。

坐落于东海之滨的同济大学，历经 110 年历史风云，承古续今、汇聚东西，秉持“与祖国同行、以科教济世”的理念，发扬自强不息、追求卓越的精神，在复兴中华的征程中同舟共济、砥砺前行，谱写了一幅幅辉煌壮美的篇章。创校至今，同济大学培养了数十万工作在祖国各条战线上的人才，包括人们常提到的贝时璋、李国豪、裘法祖、吴孟超等一批著名教授。正是这些专家学者培养了一代又一代的博士研究生，薪火相传，将同济大学的科学研究和学科建设一步步推向高峰。

大学有其社会责任，她的社会责任就是融入国家的创新体系之中，成为国家创新战略的实践者。党的十八大以来，以习近平同志为核心的党中央高度重视科技创新，对实施创新驱动发展战略作出一系列重大决策部署。党的十八届五中全会把创新发展作为五大发展理念之首，强调创新是引领发展的第一动力，要求充分发挥科技创新在全面创新中的引领作用。要把创新驱动发展作为国家的优先战略，以科技创新为核心带动全面创新，以体制机制改

革激发创新活力,以高效率的创新体系支撑高水平的创新型国家建设。作为人才培养和科技创新的重要平台,大学是国家创新体系的重要组成部分。同济大学理当围绕国家战略目标的实现,作出更大的贡献。

大学的根本任务是培养人才,同济大学走出了一条特色鲜明的道路。无论是本科教育、研究生教育,还是这些年摸索总结出的导师制、人才培养特区,“卓越人才培养”的做法取得了很好的成绩。聚焦创新驱动转型发展战略,同济大学推进科研管理体系改革和重大科研基地平台建设。以贯穿人才培养全过程的一流创新创业教育助力创新驱动发展战略,实现创新创业教育的全覆盖,培养具有一流创新力、组织力和行动力的卓越人才。“同济博士论丛”的出版不仅是对同济大学人才培养成果的集中展示,更将进一步推动同济大学围绕国家战略开展学科建设、发展自我特色、明确大学定位、培养创新人才。

面对新形势、新任务、新挑战,我们必须增强忧患意识,扎根中国大地,朝着建设世界一流大学的目标,深化改革,勠力前行!

方 钢

2017年5月

论丛前言

承古续今，汇聚东西，百年同济秉持“与祖国同行、以科教济世”的理念，注重人才培养、科学研究、社会服务、文化传承创新和国际合作交流，自强不息，追求卓越。特别是近 20 年来，同济大学坚持把论文写在祖国的大地上，各学科都培养了一大批博士优秀人才，发表了数以千计的学术研究论文。这些论文不但反映了同济大学培养人才能力和学术研究的水平，而且也促进了学科的发展和国家的建设。多年来，我一直希望能有机会将我们同济大学的优秀博士论文集中整理，分类出版，让更多的读者获得分享。值此同济大学 110 周年校庆之际，在学校的支持下，“同济博士论丛”得以顺利出版。

“同济博士论丛”的出版组织工作启动于 2016 年 9 月，计划在同济大学 110 周年校庆之际出版 110 部同济大学的优秀博士论文。我们在数千篇博士论文中，聚焦于 2005—2016 年十多年间的优秀博士学位论文 430 余篇，经各院系征询，导师和博士积极响应并同意，遴选出近 170 篇，涵盖了同济的大部分学科：土木工程、城乡规划学（含建筑、风景园林）、海洋科学、交通运输工程、车辆工程、环境科学与工程、数学、材料工程、测绘科学与工程、机械工程、计算机科学与技术、医学、工程管理、哲学等。作为“同济博士论丛”出版工程的开端，在校庆之际首批集中出版 110 余部，其余也将陆续出版。

博士学位论文是反映博士研究生培养质量的重要方面。同济大学一直将立德树人作为根本任务，把培养高素质人才摆在首位，认真探索全面提高博士研究生质量的有效途径和机制。因此，“同济博士论丛”的出版集中展示同济大

学博士研究生培养与科研成果,体现对同济大学学术文化的传承。

“同济博士论丛”作为重要的科研文献资源,系统、全面、具体地反映了同济大学各学科专业前沿领域的科研成果和发展状况。它的出版是扩大传播同济科研成果和学术影响力的重要途径。博士论文的研究对象中不少是“国家自然科学基金”等科研基金资助的项目,具有明确的创新性和学术性,具有极高的学术价值,对我国的经济、文化、社会发展具有一定的理论和实践指导意义。

“同济博士论丛”的出版,将会调动同济广大科研人员的积极性,促进多学科学术交流、加速人才的发掘和人才的成长,有助于提高同济在国内外的竞争力,为实现同济大学扎根中国大地,建设世界一流大学的目标愿景做好基础性工作。

虽然同济已经发展成为一所特色鲜明、具有国际影响力的综合性、研究型大学,但与世界一流大学之间仍然存在着一一定差距。“同济博士论丛”所反映的学术水平需要不断提高,同时在很短的时间内编辑出版110余部著作,必然存在一些不足之处,恳请广大学者,特别是有关专家提出批评,为提高同济人才培养质量和同济的学科建设提供宝贵意见。

最后感谢研究生院、出版社以及各院系的协作与支持。希望“同济博士论丛”能持续出版,并借助新媒体以电子书、知识库等多种方式呈现,以期成为展现同济学术成果、服务社会的一个可持续的出版品牌。为继续扎根中国大地,培育卓越英才,建设世界一流大学服务。

伍 江

2017年5月

前言

本书以多复变数的亚纯函数与亚纯映射的唯一性问题为研究对象,获得了一些关于亚纯函数与亚纯映射的唯一性定理,主要包含以下几方面内容.

首先,基于亚纯函数关于小函数的截断型第二基本定理,讨论了亚纯函数分享四个小函数时的重值问题.具体来讲,就是对非常数亚纯函数 f^i ($1 \leq i \leq 3$) 与小函数 a_j ($1 \leq j \leq 4$), 考虑 $f^i - a_j$ 的重数不超过 k_j 的零点, 其重数 $\nu_{f^i - a_j, \leq k_j}$ 满足 $\nu_{f^1 - a_j, \leq k_j}^2 = \nu_{f^2 - a_j, \leq k_j}^2 = \nu_{f^3 - a_j, \leq k_j}^2$, 其中 $\nu_{f^i - a_j, \leq k_j}^2 = \min\{2, \nu_{f^i - a_j, \leq k_j}\}$. 可以得出这样的结论: 只要符合条件 $k_1 = \dots = k_4 = 15, k_4 = 14$ 且 $k_1 = k_2 = k_3 = 16$ 和 $k_4 = 13$ 且 $k_1 = k_2 = k_3 = 17$ 中的任何一个, 就有 $f^1 = f^2$, 要么 $f^2 = f^3$ 或 $f^3 = f^1$.

其次, 对于亚纯映射 f, g 和某个给定的超平面 H , 研究内积 (f, H) 的零点集包含于 (g, H) 的零点集中的情况. 在这个零点集的包含关系下, 若对 f 和 g 关于超平面的密指量函数之比加以限制, 仍可获得一个亚纯映射相交超平面的唯一性定理. 这推广了亚纯函数情形下的定理. 而且关于活动超平面的情况, 也有相应的结果.

最后,给出了一个代数非退化的亚纯映射相交超曲面的弱截断型第二基本定理,并利用该定理,首次尝试讨论了涉及超曲面的亚纯映射唯一性问题,得到一个唯一性定理.

目 录

总序	
论丛前言	
前言	
引言	1
第 1 章 亚纯函数唯一性定理	7
1.1 亚纯函数值分布理论	7
1.1.1 Nevanlinna 理论的基本定义与记号	7
1.1.2 Nevanlinna 理论的两个基本定理	9
1.1.3 关于小函数的 Nevanlinna 理论	10
1.2 亚纯函数唯一性问题	12
1.2.1 亚纯函数唯一性定理	12
1.2.2 主要结果的证明	17
第 2 章 亚纯映射涉及超平面的唯一性定理	30
2.1 亚纯映射值分布理论	30
2.2 关于超平面的亚纯映射唯一性问题	40

2.2.1	亚纯映射唯一性定理代表性结果	41
2.2.2	零点集包含关系下的唯一性定理	42
2.2.3	几个待解的问题	47
第3章	亚纯映射涉及活动超平面的唯一性定理	49
3.1	关于活动超平面的第二基本定理	49
3.1.1	活动超平面与小映射	49
3.1.2	涉及活动超平面的第二基本定理	50
3.2	涉及小映射的亚纯映射唯一性问题	58
3.2.1	涉及小映射的亚纯映射唯一性定理简史	58
3.2.2	零点集包含关系下涉及小映射的亚纯映射 唯一性定理	62
第4章	亚纯映射涉及超曲面的唯一性定理	69
4.1	亚纯映射关于超曲面的第二基本定理	69
4.1.1	相关背景与结果	69
4.1.2	弱 Cartan 型的第二基本定理	71
4.2	亚纯映射涉及超曲面的唯一性问题	82
参考文献	93
后记	97

引言

众所周知,一个多项式在只差一个常数因子的条件下可由它的零点唯一确定.不过对于超越整函数与亚纯函数来说,就没有这么简单,因而也更具魅力.例如: e^z , e^{-z} 函数值等于 $0, \pm 1, \infty$ 的点是相同的,但它们明显不同.而复变函数论中的唯一性问题主要是讨论在什么情况下两个亚纯函数是恒等的.20世纪20年代,由 R. Nevanlinna^[1]建立的亚纯函数值分布理论是获得亚纯函数唯一性定理的重要工具.事实上,在1929年, Nevanlinna^[6]证明了两个非常数亚纯函数 f, g 若在五个相异的函数值处有相同的逆像,则 f 与 g 相等;若在四个相异的函数值处有相同的逆像且重数一致,则 g 必可由 f 经某种类型的线性分式变换得到.直至今日,这仍是亚纯函数唯一性问题最重要的结论之一.

值得注意的是一个 \mathbb{C}^n 上的亚纯函数可以看作为 \mathbb{C}^n 到 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 的一个亚纯映射,因而 \mathbb{C}^n 至 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ 的亚纯映射自然地被列为唯一性问题的研究对象.与亚纯函数的唯一性问题几乎在值分布理论建立之初就成为值分布理论的研究内容有所不同,在高维情况下,虽然对亚纯映射值分布理论的研究很早就有(例如[36]),但是关于亚纯映射的唯一性问题是最近30年才蓬勃发展起来的(见[25],[20]和[15]).不过

随着关于亚纯映射的值分布理论逐渐成熟与深入,亚纯映射唯一性问题的研究也日益受到重视.

本书主要是陈述我们在多复变值分布理论中的唯一性问题方面的研究成果,为了陈述的完整性与可读性,因而亦将介绍多复变亚纯函数、亚纯映射值分布理论及唯一性问题的相关知识.

全书共分 4 章:第 1 章主要讨论亚纯函数唯一性问题中的重值问题;第 2 章介绍零点集包含关系下的亚纯映射涉及超平面的唯一性问题;而第 3 章在第 2 章的基础上给出关于活动超平面的结果;最后一章尝试讨论了亚纯映射涉及超曲面的唯一性问题.

关于亚纯函数唯一性问题,除了上面提到的 Nevanlinna 五值定理、四值定理,另外一个比较有意思的四值结果是由 Fujimoto^[13]于 1998 年给出的:考虑三个非常数亚纯函数 f^i ($1 \leq i \leq 3$) 及四个相异复数 a_j ($1 \leq j \leq 4$) 满足

$$\min\{2, \nu_{f^1-a_j}\} = \min\{2, \nu_{f^2-a_j}\} = \min\{2, \nu_{f^3-a_j}\}, \\ 1 \leq j \leq 4,$$

则要么 $f^1 = f^2$, 要么 $f^2 = f^3$ 或 $f^3 = f^1$, 其中 $\nu_{f^i-a_j}$ 表示 $f^i - a_j$ 的零点重数. 当然 Fujimoto 在文献[13]中所用技术是针对亚纯映射唯一性问题的. 在第 1 章中,我们讨论的也是此类问题,因而在叙述亚纯函数值分布理论时,多借用亚纯映射的定义方式与语言,这也使得全书呈现出一种统一的风格.

在亚纯函数唯一性问题中,还有一类称为“moving target”的问题. 即不再以固定的函数值为目标,而是考虑慢增长函数(也称小函数). 这最早是由 Nevanlinna 提出的(见[3]). 但苦于没有涉及小函数的截断型第二基本定理,使得在涉及小函数的亚纯函数唯一性问题上想要获得满

意的结果需要付出很大的努力(见[7]和[8]). 突破性的结果出现在最近, Yamanoi^[4]证明了截断型的第二基本定理(参见正文定理1.1.5). 这使涉及小函数的亚纯函数唯一性的研究有了强有力的工具.

在第1章中, 我们讨论涉及小函数的亚纯函数重值问题. 所谓重值问题就是只考虑那些重数小于等于某个正整数 k 的零点. Thai 与 Tan^[12]给出了两个结果:

若 f, g 为两个非常数亚纯函数, $\{a_j\}_{j=1}^5$ 为小函数, 假设

$$\min\{1, \nu_{f-a_j, \leq k}\} = \min\{1, \nu_{g-a_j, \leq k}\}, \quad 1 \leq j \leq 5,$$

则当 $k \geq 3$, 有 $f \equiv g$.

若 f^1, f^2, f^3 为三个非常数亚纯函数, $\{a_j\}_{j=1}^4$ 为小函数, 假设

$$\min\{2, \nu_{f^1-a_j, \leq k}\} = \min\{2, \nu_{f^2-a_j, \leq k}\} = \min\{2, \nu_{f^3-a_j, \leq k}\}, \\ 1 \leq j \leq 4.$$

当 $k \geq 23$ 时, 要么 $f^1 = f^2$, 要么 $f^2 = f^3$ 或 $f^3 = f^1$.

其中第一个结果推广了仪洪勋的工作(参见[9]). 不过在文献[9]中考虑的是更一般的情况 $\min\{1, \nu_{f-a_j, \leq k_j}\} = \min\{1, \nu_{g-a_j, \leq k_j}\}$, 其中的 k_j 可以各不相同. 这给了我们很大启发, 于是在 Thai 的第二个结果中考虑将 k 换成 k_j 来讨论. 当然这就更复杂一些, 我们的结果是:

若假设

$$\min\{2, \nu_{f^1-a_j, \leq k_j}\} = \min\{2, \nu_{f^2-a_j, \leq k_j}\} = \min\{2, \nu_{f^3-a_j, \leq k_j}\}, \\ 1 \leq j \leq 4.$$

如果 $k_j (1 \leq j \leq 4)$ 满足条件 $k_1 = \cdots = k_4 = 15, k_4 = 14$ 且 $k_1 = k_2 = k_3 = 16$ 和 $k_4 = 13$ 且 $k_1 = k_2 = k_3 = 17$ 中任何一个, 就有要么 $f^1 = f^2$, 要么 $f^2 = f^3$ 或 $f^3 = f^1$.