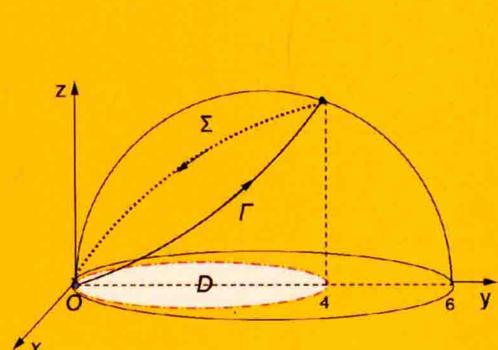
高等数学（上）

第二版

陈 仲 范红军 编著

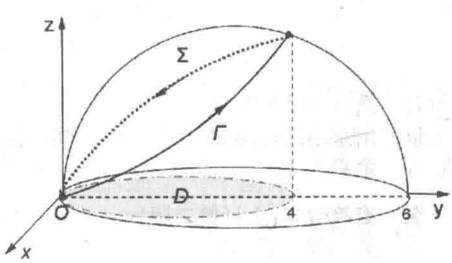


南京大学出版社

高等数学（上）

第二版

陈 仲 范红军 编著



南京大学出版社

内容简介

本书是普通高校本科“高等数学”课程的教材. 全书有两册:《高等数学(上)》,包含极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分、空间解析几何等四章;《高等数学(下)》,包含偏导数与全微分、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分、级数·广义积分收敛性、常微分方程等五章.

本书在深度和广度上符合教育部审定的高等院校“高等数学课程教学基本要求”,并参照教育部考试中心颁发的报考硕士研究生《数学考试大纲》的知识范围. 编写时注重数学的思想和方法,部分内容有更新与优化,并适当地渗透现代数学思想,适合培养高素质人才的目标.

本书内容丰富,叙述详细,讨论深刻,可供综合性大学、理工科大学、师范大学等作为“高等数学”课程的教材,可供参加全国硕士生考研、参加数学竞赛的学生作为参考书,可供广大科技工作者作为自学“高等数学”的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上 / 陈仲,范红军编著. —2 版. —南京:南京大学出版社,2017.7

ISBN 978-7-305-18690-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… ②范… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 109605 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 高等数学(上)(第二版)
编　　著 陈　仲　范红军
责任编辑 刘　灿　　编辑热线 025-83597482

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 南京人文印务有限公司
开　　本 787×1092　1/16　印张 14.75　字数 358 千
版　　次 2017 年 7 月第 2 版　2017 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-18690-5
定　　价 35.00 元

网址:http://www.njupco.com
官方微博:http://weibo.com/njupco
官方微信号:njupress
销售咨询热线:(025) 83594756

第二版前言

本书第一版1998年问世前后，面向南京大学理科的物理、材料科学、计算机、软件工程、电子信息、通信工程、大气科学、地质科学等系科，从1996级本科学生开始作为教材(96—97使用本书讲义)，一直使用到2009年，受到广大教师和学生的好评. 编者的一些独到的教学研究成果或证明方法被同行们引用，很多考研的学生至今仍将本书作为考研复习用书，几个系科将本书作为学生考研指定的数学参考书. 现根据社会需求，南京大学出版社决定将本书修订出第二版.

此第二版，基本上保留了本书第一版的主要特色，如讲到实数基本定理，证明了单调有界准则、连续函数的零点定理和最值定理，讲到一致连续性，讨论了函数的可积性，证明了隐函数存在定理，讲到了一致收敛性等等. 当然，部分要求的内容编者只是作了深入浅出的介绍，或者只介绍概念和结论，一些较难证明用“*”表示，让对数学有兴趣的读者阅读，这些内容对于读者提升学习高等数学的水平大有裨益.

在教学过程中，编者发现本书第一版还是存在一些问题，如例题不多，部分例题要更新，有些概念的讲授可进一步深化与完善，一些定理和公式的证明还可进一步改进等. 这也是我们出修订版的一大原因. 这一版中，编者改进了“推广积分中值定理”的证明；增加了“推广牛顿一莱布尼茨公式”；讨论了“连续性”“可积性”与“原函数存在性”这三个概念的关系；改进了三重积分在直角坐标下的两个计算公式的证明等等. 这一版中，编者还在每一章最后新编了“复习题”(书后有简解)，其中部分是编者的原创题. 此外，编者还调整了一些章节的内容，如场论部分删去正交曲线坐标下的三度表达式；微分方程部分删去微分方程组、偏微分方程、动力系统介绍等要求较高的内容，并改写了两个附录，删去一个附录.

本书内容丰富，叙述详细，讨论深刻. 如果教学课时不够，部分内容可留给学生课后自学.

为了教学的方便，编者将原书《大学数学》(上册，下册)改为三册，更名为《高等数学》(上，下)与《线性代数》.

本书这次修订与出版得到南京大学出版社蔡文彬主任和吴汀编辑的大力支持，得到南京大学各级领导的大力支持，编者谨此表示衷心的感谢.

限于编者的水平，本书难免还存在缺点和错误，期待智者赐教.

编　者

2017年6月

第一版前言

本书是为综合大学本科物理、计算机、电子、天文、大气科学等系科“大学数学”课程编写的教材. 它符合国家教委 1989 年审订的综合大学本科物理类专业“高等数学课程教学基本要求”和教育部 1998 年制定的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求.

本书分上、下册. 上册包含一元微积分、线性代数初步、空间解析几何、多元函数微分学和重积分;下册包含线面积分、级数与广义积分学、线性代数和微分方程. 书末有 4 个附录. 本书可分三个学期讲授,总学时 288.

本书是我们多年从事“大学数学”课程教学的产物. 在编写过程中,我们力求做到:

1. 强化数学基础. 我们的教学对象是理科中对大学数学要求较高的系科,其教学任务除使学生获得大学数学的基本概念、基本理论和基本方法外,还要使学生受到良好的科学训练,受到数学思想方法、逻辑推理能力的培养. 因此,全书力求基本理论的系统性和叙述的严密性,其中大部分定理给出简洁、严格的证明,旨在培养学生一定的数学素养,为学习专业课打下基础.

2. 改革课程体系. “微积分”“微分方程”和“线性代数”在一些高等学校是作为三门课程独立开设的. 这次我们将这三部分内容统筹布局,略有交叉,互有渗透,但保持各章的相对独立. 例如:在“极限”之后介绍“级数的基本概念”,在“不定积分”之后增加一节“简单的微分方程”,在“定积分”之后讲授“广义积分”的基本概念,而对于这些概念的深入研究,留在后面的专列章节中讲授. 又如:在“空间解析几何”之前增加一章“线性代数初步”,将矩阵、向量和行列式的知识提前讲授;在下册中将“线性代数”安排在“微分方程”之前等. 我们的思想是将“大学数学”作为一个整体,由浅入深,循序渐进,并把线性代数的方法引入微积分和微分方程,这对于简化分析运算、提高数学水平很有好处. 我们感到,这样的课程体系具有科学性和适用性.

3. 更新教学内容. 一是将部分经典内容优化或深化,对部分经典定理给出新证明. 例如:在导数部分建立“取对数求导公式”;在广义积分部分建立“广义牛顿-莱布尼兹公式”,两类广义积分敛散性判别统一处理;对于空间曲线弧长计算公式、曲线积分计算公式、正交曲线坐标下的散度与旋度公式等都给出了我们自己的新证明. 二是增加了差分方程、动力系统和外微分等知识的介绍.

4. 渗透现代数学知识. 我们在介绍经典数学内容的同时,注意渗透现代数学的观点和方法,适当地运用现代数学的术语和符号,为学生以后学习现代数学提供了“接口”.

本书在编写中还十分注重对学生解题技巧和演算能力的培养,选编了大量具有启发性、典型性的例题和习题,并注重一题多解,前后呼应. 习题分 A,B 两组,A 组为基本要求,B 组为较高要求. 书末附有习题答案与提示.

书中用“*”标出的内容供教师选用,一般留给学生课外阅读.

本书在编写中,重点参考了由陈仲、姚天行合编的《微积分学引论》一书(南京大学出版社出版,1991 年版),选用了该书的部分习题.

本书在编写过程中,得到南京大学数学系佟文廷、陆文钊、姜东平、许绍溥、姚天行等老师的大力支持和帮助,由他们组成的专家组对本书的教学大纲进行评审,提出了许多有益的建议;特别得到我们的老师叶彦谦教授的指导,他担任我们"大学数学"课程建设的顾问,并仔细审阅本书初稿,提出许多宝贵的意见;在本书出版前的4年中,王现、丁南庆、丁德成、孙建华、曹荣美、周如海、林成森、何炳生、马传渔、尹会成、张明生、王芳贵、朱乃谦、江惠坤、范克新、黄卫华、杨兴州、华茂芬、曹苏平、程健、邵荣、黄振友、李耀文、金其年等24位老师曾先后使用本书的讲义进行教学,并提出许多改进意见;本书的出版还得到南京大学教务处、南京大学出版社的大力支持.编者谨此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限,书中缺点和不足难免,诚恳期待专家和读者不吝赐教.

目　　录

第一章　极限与连续

第二章　导数与微分

第三章　不定积分与定积分

第四章　空间解析几何

第一章　极限与连续

高等数学的主要内容是导数与积分，这两个概念都是某种形式的极限，因此极限是高等数学的基础，学好极限概念将有助于学好“高等数学”这门课程.

§1.1　预备知识

1.1.1　常用的数学符号

1）$\forall$ 表示**任取**. 也表示任给；对一切的；对于任意一个等. 例如：$\forall \varepsilon>0$ 表示任取正数 ε.

2）$\exists$ 表示**存在**. 也表示存在某个；至少找到一个等. 例如：$\exists \delta>0$ 表示存在正数 δ.

3）$\Rightarrow$ 表示**推出**. 也表示使得；蕴含等. 例如：$A\Rightarrow B$ 表示如果命题 A 成立，可推出命题 B 成立；命题 A 是命题 B 的充分条件；命题 B 是命题 A 的必要条件.

4）$\Leftrightarrow$ 表示**等价**. 也表示充分必要等. 例如：$A\Leftrightarrow B$ 表示命题 A 等价于命题 B；命题 B 是命题 A 成立的充要条件.

5）$\xlongequal{\text{def}}$ 表示**定义**. 例如：$A \xlongequal{\text{def}} B$ 表示命题 A 的定义是命题 B；用命题 B 来定义命题 A.

6）max 表示**最大**. 例如：$\max\{1,2,3,4,5\}=5$.

7）min 表示**最小**. 例如：$\min\{1,2,3,4,5\}=1$.

8）$\sum\limits_{i=1}^{n}$ 表示**求和**. 例如：$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

9）$\prod\limits_{i=1}^{n}$ 表示**求积**. 例如：$\prod\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$.

10）$\square$ 表示**证毕**. 一个定理或命题证明完毕，尾部记 $\square$ 表示证毕.

正确运用上述数学符号，可大大简化文字叙述，言简意赅.

1.1.2　集　合

1）集合的基本概念

我们将具有某种特定性质的一组事物的全体称为**集合**，记为 $A=\{x\,|\,x$ 具有某种性质$\}$. 一集合中的每个个体称为该集合的**元素**. 若 a 是集合 A 的元素，记为 $a\in A$；若 a 不是集合 A 的元素，记为 $a\notin A$. 一般地，用 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用 $a,b,c,\cdots$ 表示元素.

集合中的元素具有确定性，互异性，无序性.

只含有限多个元素的集合称为**有限集**，有限集常用列举法表示. 例如集合 A 含有限个

元素 $a,b,c,\cdots,d$,则 $A=\{a,b,c,\cdots,d\}$. 含有无限多个元素的集合称为**无限集**.

定义 1.1.1 已知集合 A,B,若 $\forall a\in A\Rightarrow a\in B$,则称 A 是 B 的**子集**,记为$A\subseteq B$. 若 $A\subseteq B$,且 $\exists b\in B$,使得 $b\notin A$,则称 A 是 B 的**真子集**,记为 $A\subset B$. 不含任何元素的集合称为**空集**,记为$\varnothing$.

我们规定空集是任何集合的子集,即对任意集合 A,有$\varnothing\subseteq A$. 例如 $A=\{0,1\}$时,A 的全部子集是$\{0\}$,$\{1\}$,$\{0,1\}$,$\varnothing$.

2) 集合的并、交、差运算

定义 1.1.2 设 A,B 是集合,则集合 A,B 的并、交、差分别定义为

$$A\cup B\xlongequal{\text{def}}\{x\mid x\in A,\text{或 }x\in B\};$$

$$A\cap B\xlongequal{\text{def}}\{x\mid x\in A,\text{且 }x\in B\};$$

$$A\backslash B\xlongequal{\text{def}}\{x\mid x\in A,\text{但 }x\notin B\}.$$

在研究集合与集合之间的关系时,常将具有某种性质的研究对象的全体称为**全集**,记为 Ω 若 A 是 Ω 的子集,称 $\Omega\backslash A$ 为 A 的**补集**,记为$\overline{A}$.

关于集合的并,交,差,有下列性质(证明从略):

定理 1.1.1 设 A,B,C 是集合,则有

1° $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A.$ (交换律)

2° $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$ (结合律)

3° $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$ (分配律)

4° $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$ (德-摩根(De-Morgan)律)

3) 常用的数集

自然数集 $\mathbf{N}\xlongequal{\text{def}}\{x\mid x=0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$

正整数集 $\mathbf{N}^*\xlongequal{\text{def}}\{x\mid x=1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$

整数集 $\mathbf{Z}\xlongequal{\text{def}}\{x\mid x=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n,\cdots\}.$

有理数集 $\mathbf{Q}\xlongequal{\text{def}}\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{p}{q},p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^*,p\text{ 与 }q\text{ 互素}\right\}.$

有理数总可用有限小数或无限循环小数表示,我们将无限不循环小数称为**无理数**,有理数与无理数统称为**实数**,全体实数的集合称为**实数集**,记为 $\mathbf{R}$. 全体正实数的集合记为 $\mathbf{R}^+$. 实数在几何上用数轴上的点表示,数轴上的每一点表示一个实数.

下面是本书在空间解析几何、多元函数部分常用的与实数集有关的几个集合:

二维平面 $\mathbf{R}^2\xlongequal{\text{def}}\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}.$

三维空间 $\mathbf{R}^3\xlongequal{\text{def}}\{(x,y,z)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R},z\in\mathbf{R}\}.$

4) 邻域

定义 1.1.3 (邻域) 设 $a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$.

1° $U_\delta(a)\xlongequal{\text{def}}\{x\mid |x-a|<\delta\}$称 $U_\delta(a)$为**点 a 的 δ 邻域**,并称点 a 为**邻域的中心**,称 δ 为**邻域的半径**.

2° $\mathring{U}_\delta(a)\xlongequal{\text{def}}\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$称$\mathring{U}_\delta(a)$为**点 a 的去心 δ 邻域**.

3° $U_\delta^+(a) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid 0<x-a<\delta\}$称$U_\delta^+(a)$为**点 a 的右 δ 邻域.**

4° $U_\delta^-(a) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid 0<a-x<\delta\}$称$U_\delta^-(a)$为**点 a 的左 δ 邻域.**

1.1.3　数学归纳法

在高等数学和现代数学的各学科中,数学归纳法是证明一个命题成立常用的数学方法,有时甚至是不可替代的方法.

在数学中,证明一个与所有正整数有关的命题 $P(n)$时,常用数学归纳法.数学归纳法含第一数学归纳法和第二数学归纳法.用**第一数学归纳法**证明的步骤是:

1) 证明 $n=1$(或为其他某个正整数)时命题成立,即 $P(1)$成立.

2) 对任意正整数 $n(n\geqslant 2)$,假设 $P(n)$成立,由此假设出发,证明 $P(n+1)$成立.

则有结论:命题 $P(n)$对一切正整数成立.

用**第二数学归纳法**证明的步骤是:

1) 证明 $n=1$(或为其他某个正整数)时命题成立,即 $P(1)$成立.

2) 对任意正整数 $n(n\geqslant 2)$,假设 $P(2),P(3),\cdots,P(n)$成立.由此假设出发,证明 $P(n+1)$成立.

则有结论:命题 $P(n)$对一切正整数成立.

例 1　(伯努利不等式①)　设实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 符号相同,且都大于-1,$n\in\mathbf{N}^*$,证明:

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n. \tag{1.1.1$_n$}$$

证　$n=1$ 时$(1.1.1)_1$ 取等号成立.归纳设$(1.1.1)_n$ 成立,因 $1+x_{n+1}>0$,则

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1})\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_n)(1+x_{n+1})\\&=(1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1})+(x_1x_{n+1}+x_2x_{n+1}+\cdots+x_nx_{n+1})\\&\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}\quad(\text{因 } x_ix_{n+1}\geqslant 0),\end{aligned}$$

因此$(1.1.1)_{n+1}$成立,于是$\forall n\in\mathbf{N}^*$,$(1.1.1)_n$ 成立. □

例 2　(AG 不等式)　设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$(a_1a_2a_3\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}. \tag{1.1.2$_n$}$$

证　$n=1$ 时,左边$=a_1$,右边$=a_1$,所以$(1.1.2)_1$ 式成立.归纳假设$(1.1.2)_{n-1}$式成立.即假设任意 $n-1$ 个正数的几何平均不大于其算术平均.记

$$\bar{x}=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}.$$

不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,则 $a_1\leqslant\bar{x}\leqslant a_n$,于是

$$(a_n-\bar{x})(\bar{x}-a_1)\geqslant 0 \Leftrightarrow \bar{x}(a_1+a_n-\bar{x})\geqslant a_1a_n,$$

由归纳假设,对于 $n-1$ 个正数 $a_2,a_3,\cdots,a_{n-1},(a_1+a_n-\bar{x})$有

$$\begin{aligned}&[a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-\bar{x})]^{\frac{1}{n-1}}\leqslant\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+(a_1+a_n-\bar{x})}{n-1}\\&\Leftrightarrow a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-\bar{x})\leqslant(\bar{x})^{n-1}\end{aligned}$$

① 伯努利(Bernuolli, 1654—1705),瑞士数学家.

$$\Leftrightarrow \ a_2a_3\cdots a_{n-1}\bar{x}(a_1+a_n-\bar{x})\leqslant(\bar{x})^n$$
$$\Rightarrow \ a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n=a_2a_3\cdots a_{n-1}a_1a_n\leqslant(\bar{x})^n,$$

因此$(1.1.2)_n$式成立. 于是$(1.1.2)_n$式对于$\forall n\in\mathbf{N}^*$成立. □

例 3 证明不等式$\left(\frac{n}{3}\right)^n<n!<\left(\frac{n}{2}\right)^n, n\in\mathbf{N}^*$(左边$n\geqslant1$;右边$n\geqslant6$). $\quad(1.1.3)_n$

证 先证$(1.1.3)_n$的左边,$n=1$时显然成立,假设此不等式对$n\geqslant2$成立$\left(\frac{n}{3}\right)^n<n!$,则

$$(n+1)!=(n+1)\cdot n!>(n+1)\left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

下面只要证明

$$(n+1)\left(\frac{n}{3}\right)^n>\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3, \tag{1.1.4}$$

应用二项式定理,有

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}\\&=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\&<1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}<2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=3-\frac{1}{n}<3,\end{aligned}$$

故(1.1.4)式成立,因而$(1.1.3)_n$式的左边不等式成立. 次证$(1.1.3)_n$式的右边,$n=6$时,因$6!=720$,$\left(\frac{6}{2}\right)^6=729$,所以$(1.1.3)_6$式的右不等式成立,假设此不等式对大于6的$n$成立$n!<\left(\frac{n}{2}\right)^n$,则

$$(n+1)!=(n+1)\cdot n!<(n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

下面只要证明

$$(n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^n<\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1}\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2,$$

上式显然成立. 故$(1.1.3)_n$式的右不等式成立. □

1.1.4 极坐标系

在平面上取定点O,从O点出发作一射线Ox,选定长度单位,这就是极坐标系. 称O点为**极点**,称射线Ox为**极轴**(见图1.1). 在平面上任取一点M,点M到极点O的距离为ρ,称ρ为**极径**,Ox轴逆时针旋转到OM方向的角度为θ,称θ为**极角**. 我们用有序组(ρ,θ)来定义点M的**极坐标**,记为$M(\rho,\theta)$,这里$\rho\geqslant0$,$0\leqslant\theta<2\pi$. $\rho=0$表示极点,其极角取任意值. 这样规定后,平面上除极点外,任意一点的直角坐标(x,y)与极坐标(ρ,θ)一一对应,它们的关系是

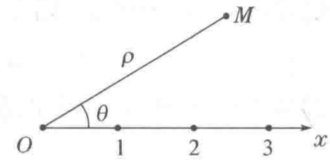


图 1.1

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$

注　在极坐标系的上述定义中,我们对 ρ,θ 的取值范围作了规定.在应用中,有时会用到 ρ,θ 的取值范围不合要求的情况(如下面例 4),此时我们约定:当 $\rho<0$ 时,(ρ,θ) 与 $(-\rho,\theta+\pi)$ 是同一点;当 $-2\pi\leqslant\theta<0$ 时,(ρ,θ) 与 $(\rho,\theta+2\pi)$ 是同一点.

下面举例说明如何画极坐标方程的图形.

例 4　画极坐标方程 $\rho=2\cos 3\theta$ 的图形.

解　首先在直角坐标系 $\theta O\rho$ 平面(将 θ 轴视为 x 轴,将 ρ 轴视为 y 轴)上画出 $\rho=2\cos 3\theta$ 的图形(见图 1.2).然后在极坐标系下用描点法作图.起点为 $A(2,0)$,当 θ 从 0 增大到 $\frac{\pi}{6}$ 时,ρ 从 2 减小到 0;当 θ 从 $\frac{\pi}{6}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时,ρ 为负值,在其反方向 $\left(\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right)$ 之间 ρ 从 0 增大到 2(点 B),再从 2 减小到 0;当 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{5\pi}{6}$ 时,ρ 从 0 增大到 2(点 C),再从 2 减小到 0;当 θ 从 $\frac{5\pi}{6}$ 增大到 π 时,ρ 为负值,在其反方向 $\left(\frac{11\pi}{6},2\pi\right)$ 之间 ρ 从 0 增大到 2(点 D,与点 A 重合),回到起点.此后的图形与前面的图形重合(见图 1.3).

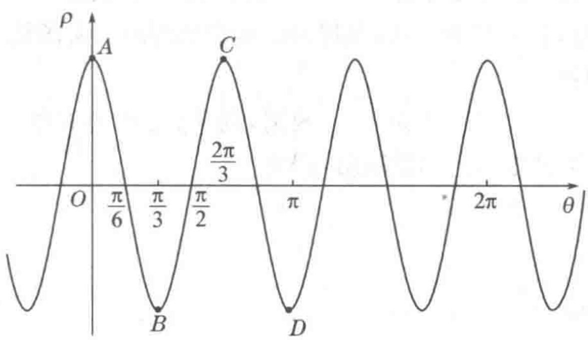


图 1.2

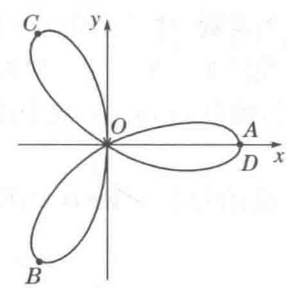


图 1.3

1.1.5　映射与函数

定义 1.1.4　(映射)　设 A,B 是两个非空集合,若 $\forall x\in A$,按某对应法则 f 有唯一的 $y\in B$ 与之对应,则称 f 为 A 到 B 的**映射**,记为

$$f:A\to B,$$

并称 y 为 x 关于映射 f 的**像**,记为 $f(x)$.称 x 为 y 的**原像**,称 A 为映射 f 的**定义域**,记为 $D(f)$,称像 $f(x)$ 的集合为映射 f 的**值域**,记为 $f(A)$.

下面介绍几个特殊的映射:

1) 若 $B=f(A)$,称 $f:A\to B$ 为**满映射**,或称 f 将 **A 映到 B 上**.

2) 若 $\forall x_1,x_2\in A$,$x_1\neq x_2$ 有 $f(x_1)\neq f(x_2)$①,称 $f:A\to B$ 为**单映射**.

3) 若 $f:A\to B$ 是满映射,又是单映射,则称 $f:A\to B$ 为 **1—1 映射**,或**双映射**.

定义 1.1.5　(函数)　设 $A\subseteq\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$),称映射 $f:A\to\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$)为**函数**,记为函数 $f:A\to$

① 当 A 不是数集时,$x_1\neq x_2$ 意指 x_1 与 x_2 是不同的元素.

R(或**C**)或函数 $y=f(x),x\in A$. 称 x 为**自变量**,称 y 为**因变量**,称 $f(x)$为函数在 x 的**函数值**. 称 $D(f)\overset{\text{def}}{=\!=}A$ 为函数的**定义域**,称 $f(A)\overset{\text{def}}{=\!=}\{f(x)\mid x\in A\}$为函数的**值域**. 特别

1) 当 x,y 皆为实数时,称 $y=f(x)$为**实变函数**,简称**实函数**;

2) 当 x 为实数,y 为复数时,称 $y=f(x)$为**复值函数**;

3) 当 x,y 皆为复数时,称 $y=f(x)$为**复变函数**,简称**复函数**.

要确定一个函数必须指明两点:第一,定义域;第二,对应法则. 函数的值域通常不必指明. 因为当定义域和对应法则确定之后,值域也就确定了.

例如 $S=\pi r^2,r>0$,给出了圆面积 S 关于半径 r 的函数关系. 它的定义域为一切正实数,其值域显然也是一切正实数.

又如 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$给出了函数 y 与自变量 x 的函数关系,对于用解析式给出的函数关系,如果没有标明定义域,我们通常把定义域理解为使这些解析式在实数(或复数)范围内有意义的一切自变量的值. 对上述函数,若规定 $x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}$,则定义域为$(-1,1)$;若规定 $x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{C}$,则定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;若规定 $x\in\mathbf{C},y\in\mathbf{C}$,则定义域为复平面$\{(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathbf{R},x_2\in\mathbf{R}\}(x=x_1+\mathrm{i}x_2)$上除去两点$(1,0),(-1,0)$的一切复数.

在本课程中,除几处用到复值函数外,若无特别声明,凡提到的函数都理解为实函数,并简称为**函数**. 对于复函数,本课程不予讨论.

定义 1.1.6 (逆映射与复合映射) 设 $f:A\to B$ 为 1—1 映射,则 $\forall y\in B$,存在唯一的 $x\in A$,使得 $f(x)=y$,这个由 B 到 A 的映射称为 f 的**逆映射**,记为

$$f^{-1}:B\to A.$$

设有映射 $f:A\to B,g:B\to C$,则由

$$g\circ f(x)\overset{\text{def}}{=\!=}g(f(x))$$

定义的 A 到 C 的映射称为 f 与 g 的**复合映射**. 记为

$$g\circ f:A\to C.$$

特别,在上述定义中若 $A\subseteq\mathbf{R},B\subseteq\mathbf{R},C\subseteq\mathbf{R}$,则称相应的逆映射 $f^{-1}:B\to A$ 为**反函数**,称复合映射 $g\circ f:A\to C$ 为**复合函数**.

例 5 设 $f(x)=x^2,g(x)=\log_a x$,试求函数 $f\circ g(x),g\circ f(x),g^{-1}(x)$,并确定其定义域.

解 $f\circ g(x)=(\log_a x)^2,\quad x\in(0,+\infty);$

$g\circ f(x)=\log_a(x^2)=2\log_a|x|,\quad x\in\mathbf{R}\backslash\{0\};$

$g^{-1}(x)=a^x,\quad x\in\mathbf{R}.$

1.1.6 初等函数

在中学里,大家已学过幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数,并讨论了它们的初等性质,例如定义域、值域、单调性、奇偶性、有界性、周期性等,这些内容在以后的学习中都是重要的.

定义 1.1.7 （*初等函数*）　幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数等 5 类函数称为**基本初等函数**. 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算与有限次复合而得到的函数称为**初等函数**.

初等函数是最常见、应用最广的一类函数，是高等数学课程研究的主要对象. 以后学习广义积分和级数时，我们将介绍由这些概念所产生的特殊函数.

现在介绍一个特殊的指数函数

$$y=\mathrm{e}^x,$$

这里 e 是一个重要常数，我们将在 1.2.6 中详细讨论它（e≈2.718 281 828 459 045…为无理数）. 此函数的反函数记为

$$y=\ln x\xlongequal{\text{def}}\log_{\mathrm{e}}x.$$

由于

$$x^\mu=\mathrm{e}^{\mu\ln x}\quad(x>0);\qquad a^x=\mathrm{e}^{x\ln a}\quad(a>0,a\neq1);$$

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}\quad(a>0,a\neq1);\ \cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right);$$

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x;\qquad \arctan x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

可见函数 e^x 与 $\sin x$ 具有特别重要的作用，我们称 e^x 与 $\sin x$ 为初等函数的**生产函数**. 如果我们研究了生成函数的性质，只要再讨论反函数、复合函数以及函数的加减乘除四则运算的性质，那么就可推知所有初等函数的性质.

下面介绍一类由 e^x 生成的初等函数——双曲函数：

$$\operatorname{sh}x=\sinh x\xlongequal{\text{def}}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}),\qquad \operatorname{ch}x=\cosh x\xlongequal{\text{def}}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}),$$

$$\operatorname{th}x=\tanh x\xlongequal{\text{def}}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}},\qquad \operatorname{cth}x=\coth x\xlongequal{\text{def}}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}},$$

分别称为**双曲正弦，双曲余弦，双曲正切，双曲余切**. 它们的图形见图 1.4.

由双曲函数的定义，容易验证下列公式：

$$\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x},\quad \operatorname{cth}x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x},$$

$$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1,$$

$$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y,$$

$$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y,$$

$$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x,$$

$$\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x,$$

$$\operatorname{th}2x=\frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x},\quad \operatorname{cth}2x=\frac{1+\operatorname{cth}^2x}{2\operatorname{cth}x}.$$

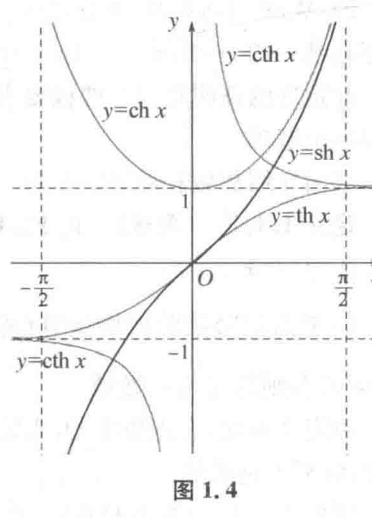


图 1.4

这些公式与三角公式有很多相似之处，读者要特别注意符号上的区别.

最后举例介绍**分段函数**的概念，它是把函数的定义域分为若干区间及一些点，在不同区间上用不同的解析表达式表示函数关系. 分段函数一般不是初等函数.